Chapitre III : L'intégrale de Cauchy

I Intégrale curviligne dans le plan

Déf : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.
On appelle forme différentielle continue à valeurs complexes une application $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ continue.

Traditionnellement, on note dx l'application qui à $z \in U$ associe $(x,y) \mapsto x$
dy ——— $(x,y) \mapsto y$
$d z$ ——— $(x,y) \mapsto x+$
$d\bar{z}$ ——— $(x,y) \mapsto x-$

On note $\Omega(U, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des formes différentielles sur U
tout $\omega \in \Omega(U,\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique $\omega = f\,dx + g\,dy$
avec $f, g : U \to \mathbb{C}$ continues ou $\omega = f'\,dz + g'\,d\bar{z}$

avec $f = f' + g'$ et $g = \frac{f'-g'}{i}$

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une application $\mathcal{C}^1$, alors on note
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \partial f\, dz + \bar{\partial} f\, d\bar{z}$$

avec $\bar{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Une forme de ce type sera dite <u>exacte</u>.

Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une application $\mathcal{C}^1$ et $\omega = f\,dx + g\,dy$ une forme différentielle sur U

Déf : On pose
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[f(x(t),y(t))\,x'(t) + g(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt$$
où on a posé $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Proposition : (i) si $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ croissant alors $\int_{\gamma\circ\phi}\omega = \int_\gamma \omega$

(ii) si ϕ est décroissant alors $\int_{\gamma\circ\phi}\omega = -\int_\gamma \omega$.

preuve : formule de changement de variable.

(iii) si $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ alors $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

preuve : intégrale d'une dérivée.

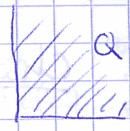
On étend la définition de chemin $\mathcal{C}^1$ aux chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

ie $\gamma : [a,b] \to U$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tq
γ est continue sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$.

On définit alors $\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{\gamma|_{[a_i;a_{i+1}]}} \omega$

les formules 1, 2, 3 sont alors toujours satisfaites.

Soit $Q = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0 \}$



Déf : on dit que K est un compact à bord si $K \subset \mathbb{C}$ est compact et $\forall z \in K$ $\exists\, U \subset \mathbb{C}$ et $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ un difféo $\mathcal{C}^1$ à jacobien > 0 tq $\varphi(U \cap K) = V \cap Q$

Si on note $\partial K = \overline{K} \setminus \mathring{K} = \{ z \in K \text{ tq } \forall r > 0 \;\; D(z,r) \not\subset K \}$

on voit que $\varphi(U \cap \partial K) = V \cap \partial Q$

exemples : $\overline{D(0,1)}$, $[0,1] \times [0,1]$, $\{ z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ sont des compacts à bord

Soit K un compact à bord et $\gamma_1 : [a_1, b_1], \dots, \gamma_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$ des courbes paramétrées $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
On dit que $\gamma = \{ \gamma_1, \dots, \gamma_n \}$ est une paramétrisation positivement orientée de ∂K

si $\forall x \in \partial K$ sauf nb. fini $\exists!\, i \in \{1, \dots n\}$ et $\exists!\, t_i \in [a_i, b_i)$ tq $\gamma_i(t) = x$

et si on écrit $\varphi(\gamma_i(t)) = (x_i(t), y_i(t))$ on a

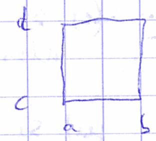
soit $x_i(t) = 0$ et $y_i'(t) \leq 0$
soit $y_i(t) = 0$ et $x_i'(t) \geq 0$.

Théorème de Green-Riemann

Soit K un compact à bord $\subset U \subset \mathbb{C}$ et $\omega = f\,dx + g\,dy$ une forme différentielle avec f et g $\mathcal{C}^1$. Supposons que ∂K est positivement paramétré par $\gamma_1, \dots, \gamma_n$

alors
$$\int_{\partial K} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Preuve : dans le cas où $K = [a,b] \times [c,d]$



on a
$$\int_{\partial K} \omega = \int_a^b f(t,c)\,dt + \int_c^d g(b,t)\,dt - \int_a^b f(t,d)\,dt - \int_c^d g(a,t)\,dt$$

et
$$\iint_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d dy \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) + \int_c^d dy \left(\int_a^b dx \frac{\partial g}{\partial x} \right)$$
$$= \int_a^b dx \left(f(x,c) - f(x,d) \right) + \int_c^d \left(g(b,y) - g(a,y) \right) dy$$

dans le cas général.

Soit $z \in K$, $\exists\, U \subset \mathbb{C}$, $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ tq $z \in U$ et $\varphi(U \cap K) = V \cap Q$

soit $r > 0$ tq $D(z, 2r) \subset U$ et ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$

tq $\psi|_{D(z,r)} = 1$ et $\psi|_{D(z,2r)^c} = 0$ [facile avec des fonctions plateau]

II Formule de Cauchy

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et $c : [a,b] \to U$ une application C^1 par morceaux, on dispose de l'intégrale

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(c(t))\,c'(t)\,dt$$ qu'on appelle intégrale de Cauchy

<u>Remarque</u> : si f est la dérivée d'une fonction holomorphe F alors

$$\int_c f(z)\,dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

En particulier cette intégrale ne dépend que des extrémités de c.

On a une sorte de réciproque de la formule précédente :

<u>Proposition</u> : Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Sont équivalents

(i) f admet une primitive holomorphe sur U

(ii) pour tout chemin fermé C^1_{pm} c, $\int_c f(z)\,dz = 0$

<u>démo</u> : (i) ⇒ (ii) déjà fait.
(ii) ⇒ (i)
On commence par montrer que U est connexe par arcs C^1_{pm}.
On choisit $z_0 \in U$ et on note

$V = \{ z \in U \text{ tq } \exists\, \gamma : [a,b] \to U \ C^1_{pm} \ \ \gamma(a) = z_0,\ \gamma(b) = z \}$.
Un argument de connexité habituel montre $U = V$.

On pose alors $\forall z \in U$ $\quad F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$ où γ relie z_0 à z
D'après l'hypothèse (ii) ceci est bien défini.
Reste à voir que $F' = f$.

Soit $z \in U$ tq $D(z,r) \subset U$. On a $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(z)\,dz$

par continuité uniforme $\forall \varepsilon > 0$, si r assez petit on a $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall w \in [z, z+h]$

et $\int_{[z,z+h]} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z+th)\,h\,dt$

d'où $\left| \int_{[z,z+h]} f(z)\,dz - h f(z) \right| \leq \int_0^1 \varepsilon |h|\,dt = \varepsilon |h|$. cqfd.

<u>Exemples</u> : fonction rationnelles $R(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ssi $n \neq 1$

- en effet si $n \neq 1$ on connaît une primitive
- Si $n = 1$ on calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta})^n} = 2i\pi \neq 0$.

$z = a + re^{i\theta}$

Théorème : Si U est un ouvert convexe, toute fonction holomorphe sur U admet une primitive.

preuve : on choisit $z_0 \in U$ et on pose $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z)\,dz$.

La preuve précédente se répète pourvu qu'on ait $\forall z, h$ tq $z, z+h$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(z)\,dz \quad \text{soit} \quad \int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$$

où T est le triangle de sommets $z_0, z, z+h$.

le résultat est alors une conséquence du théorème général suivant.

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $K \subset U$ un compact à bord paramétré par γ. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U)$

on a
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

preuve : on écrit $f(z) = P(z) + iQ(z)$ de sorte que $f(z)dz = (P+iQ)dx + i(P+iQ)$

d'où
$$d(f(z)\,dz) = i\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \left[i\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dx\,dy = 0$$
C.R.

Indice d'un chemin : soit $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ et $z \notin \operatorname{Im} c$

On définit l'indice de c par rapport à z par la formule $\operatorname{Ind}(c,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{dw}{w-z}$

Proposition : La fonction
$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} c &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ z &\longmapsto \operatorname{Ind}(c,z) \end{aligned}$$
est à valeurs entières, continue et vaut 0 sur la composante non bornée

démo : - La continuité provient de la continuité de l'intégrale à paramètres

- $\operatorname{Ind}(c,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{c'(t)\,dt}{c(t)-z}$ $\quad \operatorname{Ind}(c,z) \in \mathbb{Z} \iff \exp\left(\int_a^b \frac{c'(t)\,dt}{c(t)-z}\right) = 1$

On pose $\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{c'(t)\,dt}{c(t)-z}\right)$ de sorte que $\varphi'(t) = \frac{\varphi(t)c'(t)}{c(t)-z}$

On pose $h(t) = \frac{\varphi(t)}{c(t)-z}$ de sorte que $h'(t) = \frac{\varphi'(t)(c(t)-z) - c'(t)\varphi(t)}{(c(t)-z)^2} = 0$

ainsi $h(a) = h(b)$ et comme $c(a) = c(b)$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$.

- Si z tend vers l'∞ $\frac{c'(t)}{c(t)-z}$ tend uniformément vers 0. On en déduit le dernier point.

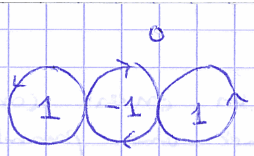
Exemple : On note $\mathcal{C}(a,r)$ le chemin paramétré par $c(t) = a + e^{it}$, $t \in [0,$

on a
$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}(\mathcal{C}(a,r), z) &= 0 \quad \text{si } |z-a| > r \\ &= \operatorname{Ind}(\mathcal{C}(a,r), 0) \quad \text{si } |z-a| < r. \end{aligned}$$

On calcule alors $\operatorname{Ind}(\mathcal{C}(a,r),0) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = 1.$

si on paramètre $c(t) = a + e^{-it}$ on trouvera -1

Exemple plus compliqué



Théorème (Formule de Cauchy pour un convexe)

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Alors pour tout chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ et tout $z \notin \mathrm{Im}\, c$ on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z)\, \mathrm{Ind}(c,z).$$

démo : on écrit $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + \frac{f(z)}{w-z}$

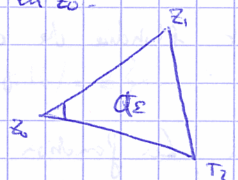
On pose $g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{z\}$ continue en z.

Le théorème précédent montre que g admet une primitive holomorphe et donc

$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0$ et il reste $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z)\, \mathrm{Ind}(c,z)$

Petit point technique : en fait il faudrait démontrer le th. principal pour une fonction holomorphe sur un convexe sauf un point où elle est seulement continue.

Cela revient à mq si z_0, z_1, z_2 forme un triangle T avec $z_0, z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ alors $\int_T f(z)\, dz = 0$ et f seulement continue en z_0.



On a une suite de quadrilatères Q_ε tq $\int_{T_\varepsilon} f(z)\, dz = 0$

et bien sûr $\int_T f(z)\, dz = \int_{T_\varepsilon} f(z)\, dz + \int_{Q_\varepsilon} f(z)\, dz$.

Il suffit donc de montrer que $\int_{Q_\varepsilon} f(z)\, dz$ tend vers 0, pour cela on utilise le lemme suivant

Lemme : En général, si f est continue sur $\mathcal{U}$ et $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ est un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ alors $\left|\int_c f(z)\, dz\right| \leq \sup_c |f| \cdot \mathrm{long}(c)$

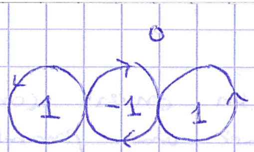
preuve : $\left|\int_c f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f(c(t))\, \dot{c}(t)\, dt\right| \leq \sup_c |f| \int_a^b |\dot{c}(t)| = \sup_c |f|\, \mathrm{long}(c)$.

III Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Alors f est analytique sur $\mathcal{U}$. De plus si $a \in \mathcal{U}$ et $r = d(a, \partial\mathcal{U})$ alors

f est développable en série entière de $z-a$ sur $D(a,r)$.

Exemple plus compliqué



Théorème (Formule de Cauchy pour un convexe)

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Alors pour tout chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ et tout $z \notin \operatorname{Im} c$ on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z) \operatorname{Ind}(c, z).$$

démo : on écrit $\dfrac{f(w)}{w-z} = \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} + \dfrac{f(z)}{w-z}$

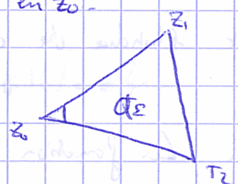
On pose $g(w) = \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ continue en z.

Le théorème précédent montre que g admet une primitive holomorphe et donc

$\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_c \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0$ et il reste $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z) \operatorname{Ind}(c,z)$

Petit point technique : en fait il faudrait démontrer le th. principal pour une fonction holomorphe sur un convexe sauf un point où elle est seulement continue.

Cela revient à mq si z_0, z_1, z_2 forme un triangle T avec $z_0, z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ alors $\int_T f(z)\, dz = 0$ et f seulement continue en z_0.



On a une suite de quadrilatères Q_ε tq $\int_{T_\varepsilon} f(z)\, dz = 0$.

et bien sûr $\int_T f(z)\, dz = \int_{T_\varepsilon} f(z)\, dz + \int_{Q_\varepsilon} f(z)\, dz$.

Il suffit donc de montrer que $\int_{Q_\varepsilon} f(z)\, dz$ tend vers 0, pour cela on utilise le lemme suivant

Lemme : En général, si f est continue sur $\mathcal{U}$ et $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ est un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ alors $\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq \sup_c |f| \cdot \operatorname{long}(c)$

preuve : $\left| \int_c f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(c(t))\, \dot c(t)\, dt \right| \leq \sup_c |f| \int_a^b |\dot c(t)| = \sup_c |f| \operatorname{long}(c)$.

III Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Alors f est analytique sur $\mathcal{U}$. De plus si $a \in \mathcal{U}$ et $r = d(a, \partial\mathcal{U})$ alors f est développable en série entière de $z-a$ sur $D(a,r)$.

démo : soit $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset U$

La formule de Cauchy nous donne $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

On écrit $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a+a-z} = \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n \geq 0} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}$

Notons $M = \sup_{D(a,r)} |f|$, on a $\forall w \in \mathcal{C}(a,r)$

$$\left| \frac{f(w)}{w-a} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \right| \leq \frac{M}{r} \frac{|z-a|^n}{r^n}$$ donc la série converge normalement sur $\mathcal{B}(a,r)$ $\forall |z| < r$.

ainsi $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$

où $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}}$ et ce $\forall z \in D(a,r)$.

Par unicité du développement, a_n ne dépend pas de r et la formule est bien un DSE

Corollaire : si $f \in A(U)$ alors le rayon de convergence de la série entière égale à f en a est au moins $d(a, \partial U)$.

Exemple : étude de la fonction $Li_2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$

La série est de rayon 1, elle est a priori holomorphe sur $D(0,1)$
mais $Li_2'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{-1}{z} \ln(1-z)$

Soit L la détermination principale du log. définie sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.
et posons $g(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-w)}{w} dw$

Ceci a un sens : $-\frac{\ln(1-w)}{w}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ qui est étoilé $/\!/ 0$.

donc il existe une primitive holomorphe qui s'annule en 0. On a donc $g = Li_2$

ainsi le rayon de convergence de Li_2 en u est $\geq |u-1|$.

IV Propriétés des fonctions holomorphes

1) Inégalités de Cauchy

Si $X \subset \mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$ est continue, on pose $\|f\|_X = \sup_{z \in X} |f(z)|$

au vu de la formule $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w) dw}{(w-a)^{n+1}}$

Corollaire : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$ $\forall a \in U$ et $\forall r > 0$ tq $\overline{D(a,r)} \subset U$

on a $|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\mathcal{C}(a,r)}$

théorème (Liouville) Toute fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

preuve : on écrit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ $\forall r > 0$ $|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow a_n = 0$ $\forall n > 0$. $\Rightarrow f(z) = a_0$

Corollaire (D'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant $P(Z)$ a une racine

preuve: Par l'absurde, sinon $f(z) = \frac{1}{P(Z)}$ est holomorphe et $\lim_{Z \to +\infty} f(z) = 0$

donc f est bornée, donc constante, absurde.

Exemple: $\sin z$ est borné sur $\mathbb{R}$, holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Il n'est donc pas borné sur $\mathbb{C}$ en effet $\lim_{t \to +\infty} \sin it = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i} = -\infty$

2) Principe du maximum

théorème: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$
Si $|f|$ a un maximum local dans U alors f est constante.

preuve: Supposons que $|f|$ admet un max local en $a \in U$.
Alors $\exists r > 0$ tq $\overline{D(a,r)} \subset U$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ $\forall z \in D(a,r)$

On va montrer que $f(z) = f(a)$ au voisinage de a, on conclura par principe des zéros isolés. Si $f(a) = 0$, c'est clair.

Sinon on écrit $\forall z \in D(a,r)$ $\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$

si f est non constante, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + a_{n_0} (z-a)^{n_0} + o((z-a)^{n_0})$

si $a_{n_0} = r_0 e^{i\theta_0}$ pour $z = a + t e^{-i\theta_0/n_0}$ on a

$\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + t^{n_0} + o(t^{n_0})$ pour t assez petit $1 + t^{n_0} + o(t^{n_0}) > 1$
et $|f(z)| > |f(a)|$ contradiction.

Corollaire: Si U est un ouvert borné de $\mathbb{C}$, f continue sur $\overline{U}$, holomorphe sur U
alors $\|f\|_{\overline{U}} = \|f\|_{\partial U}$

Preuve: $\overline{U}$ est compact, f atteint son max en $a \in \overline{U}$. Si $a \in \partial U$ ok
si $a \in U$, alors f est constante sur U et donc $\overline{U}$ par continuité.

Théorème (Lemme de Schwarz) Soit f holomorphe sur $D(0,1)$
tq $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$ et tq $f(0) = 0$

alors $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z)| \leq |z|$ et si $\exists z \neq 0$ tq $|f(z)| = |z|$
alors $\exists u \in \mathbb{C}$ $|u| = 1$ tq $f(z) = uz$ $\forall z \in D(0,1)$.

preuve posons $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$ g est continue en 0 $\Rightarrow g$ holomorphe

$\forall 1 > r > 0$ $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ sur $\mathcal{C}(0,r)$
Par principe du maximum, c'est vrai sur $\overline{D(0,r)}$
Passant à la limite $|g(z)| \leq 1$
le cas d'égalité nous donne $g = \text{cte}$ de module 1.

3) Propriété de la moyenne

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\overline{D(a,r)} \subset U$ alors $f(a)$ est égal à la moyenne de f sur $\mathcal{C}(a,r)$ et $\overline{D(a,r)}$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(x+iy)\,dx\,dy$$

preuve : Formule de Cauchy sur $\mathcal{C}(a,r)$ $f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}$

Par changement de variables polaires,

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(x+iy)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(a+te^{i\theta})\,t\,dt\,d\theta = \frac{2}{r^2}\int_0^r f(a)\,t\,dt = f(a)$$

4) Théorème de l'application ouverte

Théorème : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert conn et $f \in \mathcal{O}(U)$ une application non constante alors f est ouverte.

Preuve : soit $V \subset U$ et $z_0 \in f(V)$ on veut trouver $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset f(V)$
soit $x_0 \in V$ tq $z_0 = f(x_0)$.

f étant non constante, par principe des zéros isolés, $\exists \eta > 0$ tq $f - z_0$ ne s'annule pas sur $\mathcal{C}(x_0, \eta)$. Fixons un tel η tq $\overline{D(x_0,\eta)}$

Posons $r = \frac{1}{2}\min_{|w-x_0|=\eta} |f(w) - z_0|$. Soit $z_1 \in D(z_0, r)$, si $z_1 \notin f(V)$

alors $w \mapsto \frac{1}{f(w)-z_1}$ est holomorphe sur V et sa rest. à $\overline{D(x_0,\eta)}$ atteint

son max sur $\mathcal{C}(x_0,\eta)$ donc $\frac{1}{|z_0 - z_1|} \leq \max_{|w-x_0|=\eta} \frac{1}{|f(w)-z_1|} = \frac{1}{\min|f(w)-z_1|} =$

ie $|z_0 - z_1| \geq 2r$ contradiction

5) Dérivation complexe sous l'intégrale

Théorème : soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : U \times I \to \mathbb{C}$ une fonction

(i) $\forall t \in I$ $\quad z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe
(ii) $\forall z \in U$ $\quad t \mapsto f(z,t)$ est continue
(iii) $\exists h : I \to [0, +\infty[$ intégrable tq $\forall (z,t) \in U \times I$ $|f(z,t)| \leq h(t)$

Alors la fonction $F : z \mapsto \int_I f(z,t)\,dt$ est holomorphe sur U et $\forall n$

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t)\,dt.$$

preuve : être holomorphe est local, ops $U = D(a,r)$. Soit $0 < s < r$

sur $D(a,s)$ on a $f(z,t) = \sum_{n \geq 0} a_n(t)(z-a)^n$ et l'inégalité de Cauchy

nous donne $|a_n(t)| \leq s^{-n} h(t)$ $\forall s < r$ donc $|r^n a_n(t)| \leq h(t)$

puis $\left| f(z,t) - \sum_{n=0}^{N} a_n(t)(z-a)^n \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n(t)(z-a)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n h(t)$ $\forall z \in D($

d'où $\left| \int_I f(z,t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} \int_I a_n(t)\,dt\,(z-a)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n \int_I h(t)\,dt$ $\quad \alpha_n = \int_I a_n(t)\,dt$

$\Rightarrow$ $F(z) = \sum \alpha_n (z-a)^n$ $\quad F$ hol. et on dérive terme à terme.

Exemple. $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

soit $\alpha > 0$ et $U_\alpha = \{ z \mid Re z > \alpha \}$

$f(z,t) = t^{z-1} e^{-t} = \exp((z-1) \ln t - t)$ est holomorphe // z, continue // t

et $|f(z,t)| \leq e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$ où $z = x+iy$

$\leq e^{(\alpha-1)\ln t} e^{-t}$ si $t \leq 1$

$\leq e^{(\frac{1}{\alpha}-1)\ln t} e^{-t}$ si $t \geq 1$ } intégrable

donc Γ est une fonction holomorphe sur U_α, $\forall \alpha > 0$ donc sur $\{z \mid Re z > 0\}$.

integ par partie, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $\quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

$\Gamma(n+1) = n!$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ $\quad t = u^2 \quad dt = 2u\,du \quad \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2du$

$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.