Chapitre 4 Singularités & Fonctions méromorphes

I Singularités isolées

Définition : si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert et $a \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ on dit que a est une singularité isolée de f.

On dit qu'elle est

- éliminable s'il existe $g \in \mathcal{O}(U)$ avec $g|_{U \setminus \{a\}} = f$
- polaire si elle n'est pas éliminable mais il existe $p \geq 1$, $V \subset U$ avec $a \in V$ et $g \in \mathcal{O}(V)$ tq $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ $\forall z \in V \setminus \{a\}$.
- essentielle si elle est ni éliminable ni polaire

Théorème (Riemann) Soit $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ bornée au voisinage de a alors la singularité est éliminable.

Preuve : Supposons que $\lim_{z \to a} f(z) = \ell$ et posons $f(a) = \ell$

puis $g(z) = (z-a) f(z)$ alors g est holomorphe sur $U \setminus \{a\}$

et $\lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} f(z) = \ell$ donc g est hol. sur U

g admet un DL $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ et $f(z) = \sum a_{n+1} (z-a)^n$ holomorphe

En général, on applique ce qui précède à $g(z) = (z-a) f(z)$ qui est donc holomorphe sur U et $\lim_{z \to a} g(z) = 0$ donc $f(z)$ aussi.

Théorème : Une singularité isolée a de $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ est polaire ssi $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ qu'on écrira $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

Preuve dans un sens il est évident que si a est polaire $f(z) \sim \frac{\lambda}{(z-a)^p}$ donc $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$

Réciproquement, si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ $\exists\, D(a,r)$ tq $|f(z)| \geq R$

donc $\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{R}$ $\forall z \in D(a,r)$. D'après le thm de Riemann

$u : z \mapsto \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{O}(D(a,r) \setminus \{a\})$, elle est holomorphe en posant $\frac{1}{f(a)} =$

il existe donc $p \geq 1$ tq $u(z) = (z-a)^p v(z)$ avec $v(a) \neq 0$

et $\exists\, r' < r$ tq v' ne s'annule pas sur $D(a, r')$

on a $f(z) = \frac{1}{v'(z)} \frac{1}{(z-a)^p}$ en posant $g(z) = \frac{1}{v'(z)}$, g est holomo

Thm (Casorati-Weierstrass) si a est une singularité essentielle de $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ alors $\forall r>0$ tq $D(a,r)\setminus\{a\} \subset U$, $f(D(a,r)\setminus\{r\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exemple: $z \longmapsto e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en 0

$z = re^{i\theta}$ $\quad e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{r}e^{-i\theta}} = e^{\frac{\cos\theta}{r}} e^{-\frac{i\sin\theta}{r}}$

r arbitrairement petit, prend toutes les valeurs possibles!

preuve: supposons qu'il existe $r>0$ tq $f(D(a,r)\setminus\{r\})$ non dense alors $\exists\, b, s$ tq $D(b,s) \subset \mathbb{C} \setminus f(D(a,r)\setminus\{r\})$.

posons $u(z) = \dfrac{1}{b - f(z)}$ holomorphe sur $D(a,r)\setminus\{r\}$ et bornée par $\frac{1}{s}$. donc elle est hol. en particulier, elle a une limite en a,

donc $f(z) = b + \dfrac{1}{u(z)}$ a une limite en a (finie ou pas).

II fonctions méromorphes

Déf: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction méromorphe sur U est une fonction holomorphe sur $U \setminus P(f)$ où

- $P(f) \subset U$ est un ensemble discret
- $\forall a \in P(f)$, f a une singularité polaire en a

Terminologie $P(f)$ s'appelle l'ensemble des pôles de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

⚠ Une fonction méromorphe sur U n'est pas définie sur U tout entier!

Exemples ① $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, $P_f = \{z \,/\, Q(z) = 0\}$ si $P \wedge Q = 1$.

② $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$

méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lemme / déf: Une fonction $f \in \mathcal{O}(D(a,r)\setminus\{a\})$ est holomorphe sur $D(a,r)$ ssi elle admet un développement $f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $a_p \neq 0$

- si $p \geq 0$ la singularité est éliminable
- si $p < 0$ a est une singularité polaire.

La partie $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ est appelée partie régulière

La partie $\sum_{n=p}^{-1} a_n (z-a)^n$ ——— polaire

a_{-1} est appelé résidu de f en a, noté $\mathrm{Rés}(f,a)$.

preuve : si f est méromorphe, $\exists p$ $g(z) = (z-a)^p f(z)$ est holomorphe

$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^{n-p} = \sum_{n\geq p} a_{n+p} (z-a)$

Théorème : soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}(U)$ est un anneau commutatif, si U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.

preuve : Soit f et g deux fonctions méromorphes sur U, $P(f)$ et $P(g)$ leurs pôles

alors $f+g$ et fg sont holomorphes sur $U \setminus \{P(f) \cup P(g)\}$ qui est discret

et $\forall z \in U$ on a $f(z) = (z-a)^p f'(z)$ $g(z) = (z-a)^q g'(z)$ avec f' et g' holomorphes donc $f+g(z) = (z-a)^{\min(p,q)} h(z)$. avec h hol.

$fg(z) = (z-a)^{p+q} h(z)$ avec h hol

donc $f+g$ et fg sont holomorphes.

Si U est connexe et $fg \neq 0$ alors $Z(f)$ et $Z(g)$ sont discrets dans $U \setminus P(f) \cup P(g)$ donc $fg \not\equiv 0$.

De même si $f(z) = (z-a)^p h(z)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et h hol. non nulle

$1/f(z) = (z-a)^{-p} h(z)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ est méromorphe.

Exemple : La fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$

en effet $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{x-1}$

permet de définir Γ sur $\{\mathrm{Re}\, z > -1\}$ avec un pôle en 0

$\mathrm{Rés}(\Gamma, 0) = \Gamma(1) = 1$.

ainsi de suite, $\Gamma(x-2) = \frac{\Gamma(x-1)}{x-2} = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)}$

$\mathrm{Rés}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$