Chapitre 5 : Formule des résidus

I Simple connexité

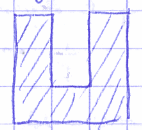
<u>Déf</u>: on dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe si $\forall p \notin U$ et $\forall \gamma$ chemin fermé de U $\quad \mathrm{Ind}(\gamma, p) = 0$.

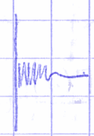
<u>Prop</u>: si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert qui vérifie $\forall p \in U$ $\exists \alpha : [0, +\infty[\to \mathbb{C} \setminus U$ continue avec $\gamma(0) = p$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = \infty$ alors U est simple connexe.

<u>preuve</u>: la fonction $t \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, \alpha(t))$ est constante et tend vers 0 à l'∞, elle est donc nulle.

<u>exemples</u>: ① $\mathbb{C}$, ainsi que tout ouvert convexe ou même étoilé est simp. connexe.

en effet $\forall p \notin U$ étoilé en z_0, $\quad \alpha(t) = (1+t)(p - z_0) + z_0$ convient.

②  n'est pas étoilé mais il est simplement connexe

③  le complémentaire est simp. connexe mais ne vérifie pas la prop.

<u>Théorème</u> (Formule de Cauchy dans un domaine simplement connexe)

Soit U un ouvert simplement connexe, $a \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$, γ chemin fermé de U alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\, dw = f(a)\, \mathrm{Ind}(\gamma, a) \qquad \forall a \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma).$$

<u>preuve</u>. On pose $g(w,a) = \dfrac{f(w) - f(a)}{w-a}$ et il suffit de prouver

$$h(a) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(w,a)\, dw = 0 \qquad \forall a \in U \setminus ~~\mathrm{Im}\gamma~~$$

On pose pour $a \in \Omega = \{ z \,/\, \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0 \}$ $\quad h_1(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$

de sorte que $\forall a \in \Omega \cap U \quad h(z) = h_1(z)$

mais par hypothèse $\Omega \cup U = \mathbb{C}$ et h_1 prolonge h à $\mathbb{C}$

donc h est entière, avec $\lim\limits_{z \to +\infty} |h_1(z)| = 0 \Rightarrow h = 0$ cqfd.

<u>Proposition</u>: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, sont équivalents

(i) U simpl. connexe

(ii) $\forall f \in \mathcal{O}(U)$, f admet une primitive

(iii) $\forall f \in \mathcal{O}(U)$ et $\forall \gamma$ chemin fermé $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$

preuve (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est bien connu,

(i) $\Rightarrow$ (iii) prenons $g(z) = (z-a) f(z)$ et appliquons Cauchy, $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $p \notin U$, $\frac{1}{p-z} \in \mathcal{O}(U)$ et admet une primitive $F(z)$

$$\mathrm{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{p-z} = 0$$

II Formule des résidus

Théorème : soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ simp connexe, $p_1, \dots, p_N$ des points de U, $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p_1, \dots, p_N\})$ avec des singularités polaires en p_i $\forall i$.

Si γ est un chemin fermé de $U \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Rés}(f, p_k)\,\mathrm{Ind}(\gamma, p_k).$$

preuve Pour tout k, on écrit $f(z) = \sum_{n \geq m_k} a_{n,k}(z-p_k)^n$

on note $Q_k(z) = \sum_{n=m_k}^{-1} a_{n,k}(z-p_k)^n$ la partie polaire de f en p_k

La fonction $f(z) - \sum_{k=1}^{N} Q_k(z)$ se prolonge de façon holomorphe à U, on a

donc $\int_\gamma \left(f(z) - \sum Q_k(z)\right) dz = 0$ donc $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \int_\gamma Q_k(z)\,dz$

or $(z-p_i)^n$ admet des primitives si $n \neq -1$ on a $= \sum_k \int_\gamma (z-p_k)^{-1} a_{-1,k}$

$= 2i\pi\, \mathrm{Rés}(f, p_k)\, \mathrm{Ind}$

Application : calcul d'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{ie^{it}\left(2 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)} = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{iz\left(2 - \frac{z+z^{-1}}{2}\right)}$$

$$= \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{2\,dz}{i(4z - z^2 - 1)} = 2i \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}$$ or $z^2 - 4z + 1 = (z - r_1)(z - r_2)$

avec $r_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$ $\quad r_1 \notin D(0,1)$ et $r_2 \in D(0,1)$

$$\frac{1}{(z-r_1)(z-r_2)} = \frac{1}{(r_1-r_2)}\left(\frac{1}{z-r_1} - \frac{1}{z-r_2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-r_1} - \frac{1}{z-r_2}\right) \Rightarrow \mathrm{Rés}\left(\frac{1}{z^2-4z+1}, r_2\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

donc $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\cos t} = 2i \cdot 2i\pi \cdot -\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

Remarque : cette méthode s'applique à toute intégrale de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$ où R est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Théorème de l'indice : soit f une fonction méromorphe sur un ouvert contenant un compact à bord K, on suppose que f n'a ni zéro ni pôles sur ∂K. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \#\{\text{zéros de } f \text{ ds } K\} - \#\{\text{pôles de } f \text{ ds } K\}$$
comptés avec multiplicité.

où ∂K est positivement orienté

Lemme : $\forall p \in \mathring{K}$, $\operatorname{ind}(\partial K, p) = 1$

preuve : soit $r>0$ tq $\overline{D(p,r)} \subset \mathring{K}$ et posons $K_r = K \setminus D(p,r)$
C'est un nouveau compact à bord et $\partial K_r = \partial K - \mathcal{C}(p,r)$

$$\operatorname{ind}(\partial K, p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{dz}{z-p} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K_r}\frac{dz}{z-p} + \operatorname{ind}(\mathcal{C}(p,r), p)$$
$$= 0 + 1$$

en effet, l'intégrale d'une fonction hol. sur le bord d'un compact à bord est nulle.

preuve : au point p on écrit $f(z) = (z-p)^{n(p)}g(z)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $g(p) \neq 0$

de sorte que $f'(z) = n(p)(z-p)^{n(p)-1}g(z) + (z-p)^n g'(z)$

et $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{n(p)}{z-p} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ donc $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, p\right) = n(p)$

et le théorème est une conséquence de la formule des résidus.

Corollaire : soit $f \in \mathcal{O}(U)$, U connexe, f non constante
soit $z_0 \in U$, $w_0 = f(z_0)$ et soit m la multiplicité du zéro de $f - w_0$ en z_0.

Alors il existe $V \subset U$ contenant z_0 et W contenant w_0 tq $\forall w \in W \setminus \{w_0\}$ l'équation $f(z) = w$ a exactement m racines distinctes dans V.

preuve : f est non constante, donc $\exists r>0$ tq $D(z_0, 2r) \subset U$ et f' ne s'annule pas sur $D(z_0, 2r)\setminus\{z_0\}$ et $f(z) = w_0$

on pose $c(t) = f(z_0 + re^{it})$. On a $w_0 \notin \operatorname{Im} c$
on pose W la composante connexe de $D(z_0, 2r) \setminus \operatorname{Im} c$ contenant w_0.

$$\forall w \in W \quad \operatorname{Ind}(c, w) = \operatorname{Ind}(c, w_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f'(z_0+re^{it})\, i\, re^{it}}{f(z_0+re^{it}) - w_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f'}{f} = m.$$

et $\operatorname{Ind}(c, w)$ est égal au nombre de zéros de $f - w$ dans $D(z_0, r)$
On pose $V = D(z_0, r) \cap f^{-1}(W)$. $f : V \to W$ est alors surjective

comme f' ne s'annule pas, les racines sont simples. cqfd.

Corollaire : f est ouverte.

III Calcul d'intégrale

- Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$: soit γ_R le lacet :

on a $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2i\pi \, \text{Rés}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) \text{Ind}(\gamma_R, i) = 2i\pi \, \text{Rés}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right)$

or $\displaystyle\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$ donc $\text{Rés}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i}$

et $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi$.

par ailleurs, $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}$

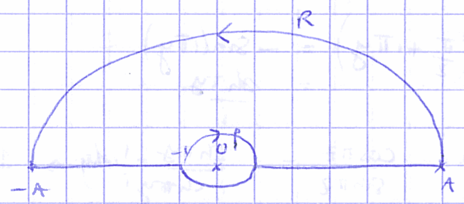
et $\displaystyle\left|\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1} d\theta \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$ et donc tend vers 0

ainsi $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

Cette méthode s'applique à toute intégrale $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ où $\deg Q \geq \deg P$ et Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

- Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Calculons $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\gamma_A} \frac{\sin z}{z} dz$



$\displaystyle = \int_{\gamma_A} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_A} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\gamma_A} \frac{e^{-iz}}{z} dz \ldots$

$\displaystyle\int_{-A}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta + \int_{\rho}^{A} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}$

$\downarrow \rho \to 0$

$\displaystyle -\int_{\rho}^{A} \frac{e^{-ix}}{x} dx - i\pi + \int_{\rho}^{A} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{\pi} i e^{iRe^{i\theta}} d\theta = 0$

$\displaystyle\int_{\rho}^{A} \frac{2i \sin x}{x} dx - i\pi + \text{Reste} = 0$ si le reste tend vers 0, le sinus est dominé.

or $\displaystyle|\text{Reste}| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$ inf à 1, tend vers 0 p.s. Lebesgue $\to 0$.

• Soit C_N le carré de côté $(\pm 1 \pm i)(N+\frac{1}{2})$ et considérons

$$\int_{C_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sh} \pi z}\, dz$$

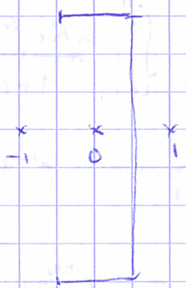
l'intégrand a des pôles simples en $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ etc et un pôle triple en 0.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Rés}(f,k) = \lim_{z \to k} \frac{(z-k)\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sh} \pi z} = \frac{\cos \pi k}{k^2} \lim_{z \to k} \frac{\pi (z-k)}{(-1)^k \pi \operatorname{sh} \pi (z-k)} = \frac{1}{\pi k^2}$$

et $\text{Rés}(f,0) = -\frac{\pi}{3}$ [DL en 0]

Résidus : $$\int_{C_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sh} \pi z}\, dz = 2i\pi \left(-\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi k^2} \right)$$

il suffit donc de montrer que l'intégrale tend vers 0 qd $N \to +\infty$



montrons que $\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sh} \pi z}$ est borné sur ∂C_N. Par périodicité, il suffit de montrer que c'est le cas sur le contour de la figure

× $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right) = -\sin(i\pi y) = \frac{\operatorname{sh} \pi y}{i}$ $\qquad \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right) = \cos(i\pi y) = \operatorname{ch} \pi y$

donc $\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{\operatorname{sh} \pi y}{i \operatorname{ch} \pi y} = \frac{1}{i} \coth \pi y \to 1$ qd $y \to +\infty$.

× $z = x + iN \Rightarrow$ $$\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} = \sim \frac{e^{i\pi(x+iN)} + e^{(i\pi x - iN)}}{e^{i\pi(x+iN)} - e^{i\pi(x-iN)}} = \sim \frac{e^{i\pi x} e^{-\pi N^2} + e^{-i\pi x} e^{\pi N^2}}{e^{i\pi x} e^{-\pi N^2} - e^{-i\pi x} e^{\pi N^2}}$$

$$= \sim \frac{e^{i\pi x} e^{-\pi 2 N^2} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} e^{-\pi 2 N^2} - e^{-i\pi x}}$$