

TD 2.

Exercice 1. Mq la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $\alpha > 2$.

Exercice 2. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

- (1) Montrer que $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.
- (2) En déduire que si $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0, +\infty]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = L$

Exercice 3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ dans les cas

suivants: $a_{2p} = a^{2p}$ et $a_{2p+1} = b^{2p+1}$, $0 < a < b$; $a_n = \frac{n!}{n^n}$; $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{(-1)^p p!}{(p + \sin p)^p}$

Exercice 4. Mq si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$

converge. On lui associe la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n \frac{z^n}{1 - z^n}$, $n \geq 1$.

- (1) Mq $\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $D(0, 1)$ et que $\sum_{n \geq 1} u_n(z) = \sum_{p \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_n z^{np}$ pour $z \in D(0, 1)$. Quelle identité peut-on en déduire lorsque $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$? ($a_n = (-1)^n$, $a_n = n \dots$?)

- (2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$

(On pourra étudier $(z \mapsto u_n(\frac{1}{z}))_{n \in \mathbb{N}}$).

Exercice 6.

- (1) (Transformation d'Abel) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \sum_{i=m}^n v_i$. Mq si $n > m$ alors $\sum_{i=m}^n u_i v_i = \sum_{i=m}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n$.
- (2) En déduire le comportement sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ des séries $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (3) (Un théorème de Picard) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Mq la série $\sum c_n z^n$ converge sur $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. (Indication: On pourra utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critère de Cauchy).

Exercice 7. (Un théorème d'Abel) Soit $k \geq 1$. Notons $E = \{z \in D(0, 1), \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq k\}$.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_0^{+\infty} c_n z^n$ converge

en $z = 1$. Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in E}} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n \rightarrow \sum_0^{+\infty} c_n = s$

- (1) Vérifier que l'on peut se ramener à $s = 0$.
- (2) Notons f la somme de la série sur $D(0, 1)$. Pour $z \in D(0, 1)$, développer $\frac{f(z)}{1-z}$ en série entière.
- (3) Conclure (Utilisez le fait $s = 0$).
- (4) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Exercice 8. Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} \text{ en } 0; \quad g(z) = \frac{1}{3 - 2z} \text{ en } 3; \quad h(z) = e^z \text{ en } 1.$$

Exercice 9. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ une série de rayon de convergence R .

- (1) Pour $r \in [0, R[$, mq $M(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire les inégalités de Cauchy $|a_n| r^n \leq \max_{|z|=r} |f(z)|$. Et montrer que s'il y a égalité pour un entier n alors $f(z) = a_n z^n$.
- (2) En déduire que $r \mapsto M(r, f)$ est une fonction croissante sur $[0, R[$ et que $\lim_{r \rightarrow R^-} M(r, f) = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 R^{2n} \in [0, +\infty]$.

Exercice 10. On considère la série entière (de la variable $z - 1$) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^n$.

Calculer son rayon de convergence et montrer que, f , la somme de cette série sur $D(1, 1)$ vérifie l'équation $e^{f(z)} = z$.

Exercice 11.

- (1) Préciser les sous-espaces discrets de \mathbb{C} dans la listes suivantes: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$,
 $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}, \bar{A}, A \cup \mathbb{N}^*, e^{iA}, e^{iA} \cup \{1\}$
- (2) Déterminer les sous-espaces connexes d'un espace discret.
- (3) Montrer qu'un sous-ensemble discret et fermé de \mathbb{C} est localement fini.

Exercice 12.

- (1) Déterminer les fonctions analytiques dans $D(0, 1)$ qui vérifient $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Soit f une fonction analytique dans $D(0, 1)$. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels distincts de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ telle que $f(a_n) \in \mathbb{R}$.
 Démontrer que $\forall z \in D(0, 1), \overline{f(\bar{z})} = f(z)$ (Montrez d'abord que $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est analytique).
- (3) Soit f une fonction analytique sur $D(0, 1)$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels qui converge vers 0. On suppose que $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$. Mq f est constante (On raisonne sur la dérivée).