

TD 5.

Exercice 1.

- (a) Calculer $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z - 1)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Indication : Considérer le prolongement par continuité de $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$.
- (b) Calculer $k_n = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n(1+z)(2-z)}$.

Exercice 2.

- (a) Soit $a \in D(0, 1)$. Montrer que $\frac{1}{1 - |a|^2} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z|z - a|^2}$. (Indication : Montrer que $z|z - a|^2 = (z - a)(1 - z\bar{a})$ le long du cercle unité)
- (b) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0, 1))$ de module bornée par $M > 0$. Montrer que $|f'(a)| \leq \frac{M}{1 - |a|^2}$.

Exercice 3. (Une preuve du théorème de Liouville). Soit f entière bornée. Soient $a \neq b$ deux nombres complexes et $R > \max(|a|, |b|)$.

- (a) Calculer $I(R) = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z - a)(z - b)}$ (décomposer en éléments simples).
- (b) Majorer $I(R)$ et conclure.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction entière f telle que $f(z + 1) = f(z)$ et $f(z + i) = f(z)$ est constante.

Exercice 5. Soit f continue sur le disque fermé $\overline{D(a, r)}$, $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(D(a, r))$ ssi $\forall z \in D(a, r)$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. En déduire le théorème de Weierstrass.

Exercice 6. (Lemme de Schwarz)

- (a) Soit $f \in \mathcal{O}(D(0, 1))$ nulle en 0 et bornée en module par $M \geq 0$. Montrer que $|f(z)| \leq M|z|$ sur le disque $D(0, 1)$ et que l'inégalité est une égalité en un point $z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}$ ssi $f(z) = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (b) Donner un lemme analogue lorsque 0 est un zéro de f d'ordre $k > 0$.

Exercice 7. (une application du lemme de Schwarz)

- (a) Soit f holomorphe au voisinage de $\overline{D(a, r)}$, $r > 0$ et bornée par M sur le bord du disque. On suppose $f(a) \neq 0$. Montrer que le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de f dans le disque $|z - a| \leq \frac{r}{3}$ est inférieur à $\frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{M}{f(a)}\right)$.

Indications : Supposer $a = 0$, puis diviser f par des facteurs du type $(1 - \frac{z}{z_k})$ avec z_k

les zéros de f dans $|z| \leq \frac{r}{3}$ (répétés suivant la multiplicité). Appliquer le principe du maximum et évaluer en 0.

Exercice 8. Soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 tel que $|P(z)| = 1$ sur le cercle unité. Montrer que $P(z) = z^n$. (Indication : Utiliser la transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$)

Exercice 9. Soit f holomorphe sur P_+ le demi-plan supérieur $\text{Im}z > 0$, continue et bornée sur $\text{Im}z \geq 0$. Soit $M = \|f\|_{\infty, \partial P_+}$.

- Supposant que f tend vers 0 à l'infini, montrer que $\|f\|_{\infty, P_+} \leq M$.
- Dans le cas général considérer $g : z \mapsto \frac{f^n(z)}{i+z}$ (ou $g'(z) = \frac{f(z)}{(i+z)^\epsilon}$ avec une détermination de la puissance $\epsilon > 0$ choisie).
- Peut-on appliquer ce qui précède à $z \mapsto e^{-z^2}$?
- Considérant un biholomorphisme rationnel du demi-plan sur le disque unité, retrouver le résultat précédent.

Exercice 10.

- Montrer qu'une fonction continue sur $\text{Im}z \geq 0$, holomorphe sur $\{\text{Im}z > 0\} = P_+$, bornée, supposée de plus réelle sur l'axe réelle, est constante.
- Généraliser le résultat ci-dessus afin d'obtenir une description des $f \in \mathcal{O}(P_+) \cap C^0(\overline{P}_+)$ supposées de croissance au plus polynomiale et réelles sur l'axe réel.

Exercice 11. Soit $F : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \frac{\text{Log}z}{z^2 - 1}$ si $z \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$. Soient $0 < \epsilon < R$ et $K(\epsilon, R) = \{z \in \mathbb{C}, \epsilon \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$. Calculer $\int_{\partial K(\epsilon, R)} f(z) dz$.

Faisant $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 12. Soit l'ouvert $B = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}z < 1\}$.

- Quelle est la frontière ∂B de B dans \mathbb{C} (on ne demande pas de démonstration).
- Soit $\epsilon > 0$. On considère la fonction $G_\epsilon(z) = \exp(\epsilon z(z-1))$. Calculer pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sup_{x \in [0,1]} |G_\epsilon(x + iy)|$.
- Soit $F : \overline{B} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur B . On suppose que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \partial B$ et qu'il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que $|F(z)| \leq A \exp(C|\text{Im}z|)$ pour tout $z \in B$.
Montrer que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{B}$ (Indications On pourra considérer la fonction $F(z)G_\epsilon(z)$ et appliquer le principe du maximum).

Exercice 13.

- Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$. Montrer que $|a_n| \leq M \implies |f(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}$

$$\text{et } |f'(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|)^2}.$$

- Supposant f bornée sur le disque, montrer que $|a_n| \leq \|f\|_\infty$ et $|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}$