TD 6.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$. Montrer que s'il y a égalité dans les inégalités de Cauchy alors la fonction f est un monôme.

Exercice 2.

(a) Montrer qu'une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ continue jusqu'au bord et de module constant sur le cercle unité s'annule sur le disque unité ou est constante.

(b) Montrer qu'une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ continue jusqu'au bord, dont la partie réelle est constante sur le cercle unité est constante.

Exercice 3.

(a) Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq C(1+|z|^\alpha)$ $(\alpha \geq 0)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus α.

(b) Soit f une fonction entière telle que $\liminf_{|z|\to+\infty} |f(z)| > 0$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4. Inégalité de Borel-Carathéodory
Soit f une fonction holomorphe non constante sur un voisinage de $\overline{D(0,R)}$. On pose $A(r) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$ pour $0 \leq r \leq R$.

(a) Montrer que A est une fonction strictement croissante.

(b) On suppose de plus que $f(0) = 0$. Vérifier que si $r > 0$, $A(r) > 0$, et que $|2A(r) - f(z)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in C(0,r)$.

(c) On suppose encore $f(0) = 0$. On pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Montrer que $|\dfrac{g(z)}{z}| \leq \dfrac{1}{R}$ pour tout z tel que $0 < |z| \leq R$. En déduire l'inégalité de Borel-Carathéodory : $|f(z)| \leq \dfrac{2|z|}{R-|z|} A(R)$ sur $D(0,R)$.

Exercice 5. Une fonction $E : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ est dite unitaire si elle est holomorphe continue jusqu'au bord et de module 1 sur le cercle unité.

(a) Montrer que les fonctions unitaires n'ont qu'un nombre fini de zéros, et que si E est unitaire non constante alors E a des zéros et $|E| < 1$ sur $D(0,1)$.

(b) Prouver que si $a \in D(0,1)$, $f_a : \overline{D(0,1)} : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est unitaire.

(c) Prouver que les fonctions unitaires sont - à une constante multiplicative près, les produits finis de fonctions du type f_a.

Exercice 6.

(a) Démontrer que l'application f définie par $f(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z t^2} dt$ est holomorphe dans $Q_+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z > 0\}$ et se prolonge par continuité dans $\overline{Q_+} \setminus \{0\}$ (Pour le prolongement par continuité, on pourra d'abord se ramener à une intégrale sur $[0,A]$, $A > 1$ puis décomposer le domaine d'intégration en $[0,1]$ et $[1,A]$, faire un changement de variable et intégrer par parties dans la deuxième intégrale, ensuite $A \to +\infty$).

(b) Déterminer f dans Q_+ (Utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme afin d'obtenir une équation différentielle simple vérifiée par f, ou bien déterminer la restriction de la fonction à $]0, +\infty[$).

(c) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\pi t^2} dt$.

Exercice 7. Soit $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

(a) Montrer que cette fonction est holomorphe sur $\{\Re z > 0\}$.

(b) Calculer Γ'. Calculer $\Gamma(z+1)$ en fonction de $\Gamma(z)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que pour $\Re z > 0$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$. En déduire que la fonction Γ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit $\alpha > 1$, montrer que l'intégrale $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} \cos(tz) dt$ définit une fonction entière de la variable z.

Exercice 9. On note $P_+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{I}mz > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(P_+) \cap \mathcal{C}^0(\overline{P_+})$ tel que $|f(z)| = O(|z|^{-c})$ à l'infini, avec $c > 0$. Montrer que pour tout $z \in P_+$, $f(z) = \displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$. (Indication : Montrer que la formule de Cauchy est valide sur $[-R, R] \cup (C(0, R) \cap P_+)$.)

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f(z^n)$ converge uniformément sur les compacts de $D(0,1)$ vers une fonction holomorphe g et calculer ses coefficients de Taylors.

Exercice 11.

(a) Soit U un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction qui ne s'annule pas admet un logarithme.

(b) En déduire que si f est une fonction entière qui n'a qu'un nombre fini de zéros alors $f = Pe^g$ avec g une fonction entière et P un polynôme.

Exercice 12. Montrer qu'une réunion croissante de domaines simplement connexes est simplement connexe.

Exercice 13.

(a) Dans la suite on note $C(0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C},\, r_1 < |z| < r_2\}$ avec $0 < r_1 < r_2 \leq +\infty$. Montrer que tout lacet de $C(0, r_1, r_2)$ est homotope à un lacet de $C(0, r')$ avec $r_1 < r' < r_2$.

(b) En déduire qu'une fonction holomorphe f sur la couronne, non nulle sur la couronne , admet un logarithme ssi $\displaystyle\int_{C(0,r')} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta = 0$.

(c) En déduire que toute fonction holomorphe f sur $C(0, r_1, r_2)$ et non nulle sur $C(0, r_1, r_2)$ s'écrit $f(z) = z^m e^{\varphi(z)}$ avec φ holomorphe sur $C(0, r_1, r_2)$, avec $m = \displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r')} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta$.

Exercice 14. Soient γ et δ deux lacets de $\mathbb{C}$. L'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)\delta(t)$ (resp. $t \mapsto \gamma(t) + \delta(t)$) est notée $\gamma \times \delta$ (resp. $\gamma + \delta$).

(a) Montrer que si γ et δ ne passent pas par l'origine alors $Ind(\gamma \times \delta, 0) = Ind(\gamma, 0) + Ind(\delta, 0)$.

(b) Prouver que si $|\delta| < |\gamma|$ et δ ne passe pas par l'origine, alors $\gamma + \delta$ ne passe pas par l'origine et $Ind(\gamma + \delta, 0) = Ind(\gamma, 0)$.

Exercice 15. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et γ un lacet évitant ces points.

(a) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ en fonction de $Ind(\gamma, a)$ et $Ind(\gamma, b)$.

(b) Que peut-on dire de l'intégrale si dessus s'il existe un chemin δ de support disjoint du support de γ, contenant a et b.

(c) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^2}$.