Feuille de TD 1 de Surfaces de Riemann. Exemples élémentaires, morphismes et fonctions méromorphes.

Exercice 1: Espaces Projectifs complexes On note $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace des droites complexes de $\mathbb{P}^{n+1}$ muni de la topologie quotient.

1. Montrer que $\mathbb{P}^n$ est une variété complexe de dimension n compacte et connexe.

2. Montrer que $\mathbb{P}^1$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec les ouverts de cartes $(U = \mathbb{C}, \phi_U)$ et $(V = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}, \phi_V)$ où ϕ_U est l'identité et $\phi_V(z) = 1/z$ pour tout $z \neq 0$ et $\phi_V(0) = \infty$.

Exercice 2: Fonctions holomorphes et méromorphes

1. Montrer que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann connexe et compacte est constante.

2. Montrer que toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann X peut être vue comme une application holomorphe $f : X \to \mathbb{P}^1$.

3. Montrer que les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$ sont les fonctions rationnelles.

Exercice 3: Morphismes entre surfaces de Riemann

Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann connexes. On rappelle que pour tout $x \in X$, il existe des coordonnées locales centrées en x et $f(x)$ telles que f s'écrive $f(z) = z^n$. On appelle n l'indice de ramification de f en x.

1. Montrer que f est ouverte.

2. Montrer que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est discret.

3. Si f est injective, montrer que f est un isomorphisme (de surfaces de Riemann) de X sur $f(X)$.

4. Montrer que f est ramifiée en un point $x \in X$ s'il n'existe aucun voisinage V_x de x tel que $f_{|V_x}$ soit injective. Montrer que f est non ramifié si et seulement si f est un homéomorphisme local.

5. On suppose que X est compacte. Montrer que f est surjective. En prenant $X = \mathbb{P}^1 = Y$, en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.

Exercice 4: Automorphismes de $\mathbb{D}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{P}^1$

On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ le disque unité et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

1. Montrer que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ sont des surfaces de Riemann. Montrer qu'elles sont isomorphes via une homographie qu'on explicitera.

2. Montrer que $\mathbb{D}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$ mais n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ (en tant que surface de Riemann).

3. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{C}$ se prolonge continûment à $\widehat{\mathbb{C}}$. En déduire par le théorème de prolongement de Riemann que c'est une homographie. Décrire le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Agit-il transitivement sur $\mathbb{C}$, ainsi que sur les paires (resp. triplets) de points distincts de $\mathbb{C}$?

4. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ des isomorphismes de $\mathbb{P}^1$ est le groupe des homographies et qu'il agit transitivement sur $\mathbb{P}^1$ ainsi que sur les paires et triplets de points distincts de $\mathbb{P}^1$. Qu'en est-il des quadruplets?

5. Montrer qu'une homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifiant $ad - bc = 1$ définit un automorphisme de $\mathbb{H}$.

6. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$) agit transitivement sur $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{D}$).

7. En utilisant le lemme de Schwartz (rappelé ci-dessous), montrer que tout automorphisme de $\mathbb{D}$ qui fixe 0 est une rotation.

8. Identifier les groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ en terme de groupes de matrices.

Lemme de Schwartz: Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si de plus on a $|f'(0)| = 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel qu'on ait $f(z) = \alpha z$.