Feuille de TD 2 de Surfaces de Riemann.
Quotients et revêtements ramifiés.

Exercice 1: Quotient et revêtements

Soit X une surface de Riemann.

1. Soit Γ est un groupe (discret) qui agit holomorphiquement sur X, librement et proprement. Montrer que le quotient X/Γ a une structure naturelle de surface de Riemann telle que la projection $X \to X/\Gamma$ soit un morphisme.

2. Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement où X est une surface de Riemann. Montrer qu'il existe une unique structure de surface de Riemann sur $\tilde{X}$ telle que p soit holomorphe.

3. Déterminer le revêtement universel de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et de $D_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C}, \alpha < |z| < \beta\}$ pour $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

4. Décrire les revêtements finis de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

5. On admet que le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est isomorphe à $\mathbb{D}$. Prouver que toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ contienne au moins deux points est constante (grand théorème de Picard).

Exercice 2: Classification des courbes elliptiques

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $e_1/e_2 \notin \mathbb{R}$). On considère le tore $T_{e_1,e_2} := \mathbb{C}/\Gamma$.

1. Montrer que T_{e_1,e_2} a une structure de surface de Riemann telle que $p : \mathbb{C} \to T_{e_1,e_2}$ est un morphisme ; exhiber un atlas de T_{e_1,e_2}.

2. Montrer que les fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de période e_1 et e_2.

3. Montrer que T_{e_1,e_2} n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou D et qu'il existe $\tau \in \mathbb{H}$ tel que T_{e_1,e_2} est isomorphe à $T_\tau = T_{1,\tau}$.

4. Montrer que T_τ est homéomorphe à T_ν et qu'ils sont isomorphes si et seulement si $\nu = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ avec $ad - bc = 1$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3: Quotients du disque

On note $\mathrm{PU}(1,1)$ le groupe des transformations de $\mathbb{D}$ de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$. On note A le sous-groupe de $\mathrm{PU}(1,1)$ formé par les matrices pour lesquelles $a, b \in \mathbb{R}$ et K le sous-groupe formé par les matrices pour lesquelles $b = 0$.

1. Identifier les sous-groupes A et K.

2. Soit D_r le disque de rayon $0 < r < 1$. Montrer que $\{g \in A, gD_r \cap D_r \neq \emptyset\}$ est compact.

3. Prouver que toute matrice de $\mathrm{PU}(1,1)$ s'écrit $g = k_1 a k_1$ avec $k_1, k_2 \in K$ et $a \in A$.

4. En déduire que tout sous-groupe discret de $\mathrm{PU}(1,1)$ agit proprement sur $\mathbb{D}$.

5. Montrer que tout sous-groupe discret et sans torsion agit librement sur $\mathbb{D}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I_n le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices congrues à l'identité modulo n. Montrer que $X_n = \mathbb{H}/I_n$ est une surface de Riemann si $n \geq 4$.

7. Montrer que la classe de it dans X_n n'a pas de valeur d'adhérence quand t tend vers $+\infty$ et conclure que X_n n'est pas compact.

Exercice 4: Formule de Riemann-Hurwitz

On note Σ_g une surface de Riemann compacte et connexe de genre g.

1. Soit $f : \Sigma_g \to \Sigma_h$ un morphisme. On note $k_x(f)$ l'indice de ramification de f en x. Montrer que $k_x(f) \leq \deg f$ et que le degré de ramification total de f à savoir $\sum_{x \in X}(k_x(f) - 1)$ est pair.

2. Montrer que si $h = 0$ et f est non ramifié, alors f est un biholomorphisme.

3. Montrer que si $g = 0$ et que f a au plus un point de ramification, alors f est un biholomorphisme.

4. Montrer que si $h = g \geqslant 1$ alors f est non ramifiée et que si $h = g > 1$ alors f est un biholomorphisme.

Exercice 5: Quotient avec ramification

Soit X une surface de Riemann connexe et G un groupe discret agissant proprement, holomorphiquement et fidèlement sur X.

1. Soit $x \in X$ et notons G_x le stabilisateur de x. Montrer que G_x est fini et que l'ensemble $\{x \in X / G_x \neq \{e\}\}$ est discret dans X.

2. Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un ouvert U simplement connexe contenant x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus G_x$ et $gU = U$ pour tout $g \in G_x$. [1]

3. Montrer qu'on peut choisir U pour qu'il existe un biholomorphisme $\phi : U \to \mathbb{D}$, un entier n et un morphisme $\lambda : G_x \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\forall g \in G_x, \forall y \in U$, $\phi(gy) = \exp(\frac{2i\pi\lambda(g)}{n})\phi(y)$. [2]

4. Montrer que le quotient X/G est muni d'un système de cartes holomorphes tel que la projection canonique $\pi : X \to X/G$ soit holomorphe.

5. Prouver que la transformation $\phi(z) = \frac{1}{1-z}$ définit une action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{P}^1$ et que le quotient est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ par une application explicite.

6. Montrer que si X est compact, G est fini et on a la formule suivante:

$$\chi(X/G) = \frac{\chi(X)}{|G|} + \sum_{x \in X} \frac{|G_x| - 1}{|G|}.$$

Exercice 6: Compactification

Soit X et Y deux surfaces de Riemann compactes et connexes, $P \subset X$ et $Q \subset Y$ deux parties finies et $\phi : X \setminus P \to Y \setminus Q$ un biholomorphisme. Montrer que ϕ s'étend en un biholomorphisme de X vers Y.

Indication: on considèrera des suites exhaustives de compacts de $X \setminus P$ et $Y \setminus Q$ puis on appliquera le théorème de prolongement de Riemann.

[1] On admettra le fait suivant: un ouvert connexe U du plan est simplement connexe si et seulement si pour toute courbe de Jordan $\gamma \subset U$, l'intérieur de γ est contenu dans U.

[2] On utilisera le théorème de représentation de Riemann.