Feuille de TD 4 de Surfaces de Riemann. Différentielles et courbes elliptiques.

Exercice 1: Formes différentielles holomorphes
Soit X une surface de Riemann.

1. Montrer que pour tout $x \in X$ on peut définir l'application $J_x \in \mathrm{End}(T_x X)$ dans une carte comme la multiplication par i. En déduire qu'une surface de Riemann est naturellement orientée.

2. Montrer qu'une fonction C^1 $f : X \to Y$ est holomorphe si et seulement si $d_x f \circ J_x = J_{f(x)} d_x f$ pour tout $x \in X$.

3. Prouver qu'une forme différentielle holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ est la même chose qu'une forme différentielle à valeur complexe $\alpha \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$ vérifiant $d\alpha = 0$ et $\alpha \circ J = i\alpha$.

4. Montrer que si $f : X \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors df est une différentielle holomorphe et que si $f : X \to Y$ est holomorphe et $\omega \in \Omega(Y)$ alors $f^*\omega \in \Omega(X)$.

5. Pour $\omega \in \Omega(X)$, définir $\overline{\omega}$ et vérifier les identités $d\overline{\omega} = 0$, $\overline{\omega} \circ J = -i\overline{\omega}$ et expliquer le sens de l'inégalité $i\omega \wedge \overline{\omega} > 0$.

6. Supposons que X soit difféomorphe au tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et soit $\omega \in \Omega(X)$. On note $P = [0,1]^2$, et $\pi : \mathbb{R}^2 \to X$ l'application quotient. Montrer qu'il existe $f : P \to \mathbb{C}$ avec $df = \pi^*\omega$: en appliquant le théorème de Stokes à $\int_X \omega \wedge \overline{\omega}$, montrer qu'on a

$$\mathrm{Im}(\omega_1 \overline{\omega_2}) > 0$$

où ω_1, ω_2 désignent les intégrales de ω le long des cycles $\alpha = [0,1] \times \{0\}$ et $\beta = \{0\} \times [0,1]$ respectivement.

Exercice 2: Résidus et fonctions méromorphes à pôles prescrits
Soit X une surface de Riemann et $p_1, \ldots, p_n$ des points distincts. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes ayant au plus un pôle simple en $p_1, \ldots, p_n$.

1. En choisissant pour tout i une coordonnée locale z_i autour de p_i, montrer que l'application $R : \mathcal{L} \to \mathbb{C}^n$ définie par $R(f) = (\mathrm{Res}_{p_i} f dz_i)$ a un noyau de dimension 1.

2. Définir une application bilinéaire $\langle , \rangle : \Omega(X) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ telle qu'on ait $\langle \omega, R(f) \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ et $\omega \in \Omega(X)$.

3. Sachant que ces conditions définissent l'image de R, encadrer la dimension de $\mathcal{L}$.

Exercice 3: Forme de Weierstrass

1. Déterminer à quelle condition sur $a, b \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(x) = x^3 + ax + b$ est à racines simples.

2. Montrer que la courbe $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = P(x)\}$ est lisse ainsi que sa compactification dans $\mathbb{P}^2$ notée X. Quels sont les points à l'infini, quel est le genre de X?

3. Prouver que la forme différentielle $\frac{dx}{y}$ est holomorphe sur X.

4. Notons $P = [0, 1, 0] \in X$. Justifier que $\pi_1(X, P) \simeq \mathbb{Z}^2$ et que l'application $I : \pi_1(X, P) \to \mathbb{C}$ définie par $I(\gamma) = \int_\gamma \frac{dx}{y}$ est un morphisme de groupe. En utilisant la question 1.6. prouver que l'image de I est un réseau noté Λ.

5. On définit $F : X \to \mathbb{C}\Lambda$ par $F(x) = \int_\gamma \omega$ où $\gamma : [0, 1] \to X$ vérifie $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = x$. Montrer que F est bien définie et que c'est un biholomorphisme local.

6. Montrer que l'application $F_* : \pi_1(X, P) \to \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda)$ est surjective. En déduire que F est un biholomorphisme.

Exercice 4: La même chose avec 4 points réels

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Soit $0 < k < 1$ un nombre réel.

1. Pour tout $u \in \mathbb{H}$, on note

$$F(u) = \int_0^u \frac{d\,z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

où l'intégrale est prise sur un chemin de 0 à u dans $\mathbb{H}$. Montrer que F est bien définie et holomorphe.

2. Montrer que F se prolonge par continuité à tout le demi-plan supérieur augmenté $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$.

3. Quelle est l'image par F de l'axe réel $\mathrm{Im}\, z = 0$? On pourra noter A et B les intégrales (d'une fonction réelle) $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et $B = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$

4. Soit γ une courbe de Jordan dans $\mathbb{H}$ et $w \in \mathbb{C} \setminus F(\gamma)$. Montrer que le nombre de préimages de w par F à l'intérieur de γ est donné par $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F'(z)dz}{F(z)-w} = \mathrm{Ind}(F(\gamma), w)$.

5. En déduire que F un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur l'intérieur d'un rectangle dont on précisera les sommets.

6. Montrer que F^{-1} se prolonge en une fonction méromorphe sur la courbe elliptique $\mathbb{C}_{/4A\mathbb{Z} \oplus 2iB\mathbb{Z}}$. Quels sont ses zéros et pôles ?

7. Relier cet exercice au précédent en considérant la surface de Riemann définie par $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$.