Feuille de TD 5 de Surfaces de Riemann.
Diviseurs et théorème de Riemann-Roch.

Exercice 1: Diviseurs sur $\mathbb{P}^1$

1. Montrer que quels que soient $x \neq y \in \mathbb{P}^1$, il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}^1$ de diviseur $\div(f) = x - y$.
2. Montrer deux diviseurs D, D' sur $\mathbb{P}^1$ sont linéairement équivalents si et seulement si $\deg(D) = \deg(D')$.
3. Soit $D = 0+1$. Calculer l'espace $\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1), \operatorname{div}(f)+D \geq 0\}$.
4. Montrer que $\dim \mathcal{L}(D) = \max(0, 1+\deg(D))$ pour tout diviseur D sur $\mathbb{P}^1$.

Exercice 2: Diviseurs sur une courbe elliptique

Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ un réseau avec $\operatorname{Im} \tau > 0$ et $E_\tau = \mathbb{C}/\Gamma$ la courbe ellliptique associée. On note $\mathcal{P} \in \mathcal{E}_\tau$ la fonction de Weierstrass associée.

1. Calculer les diviseurs $\operatorname{div}(\mathcal{P}')$ et $\operatorname{div}(\mathcal{P})$ de la fonction de Weierstrass et de sa dérivée.
2. Pour tout $x \in E_\tau$ et $n \in \mathbb{Z}$, calculer $h^0(n \cdot x)$.
3. Calculer un diviseur canonique de E_τ.

Exercice 3: Fonction méromorphe à un pôle

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g.

1. En utilisant Riemann-Roch, montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X avec un unique pôle d'ordre au plus $g + 1$.
2. Soit $n \geq 2g$. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X ayant un unique pôle et d'ordre exactement n.
3. Montrer que X est un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$ à au plus $g+1$-feuillets. En déduire que si X est de genre 0, X est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Montrer que si $g = 1$, l'ordre du pôle ne peut pas être 1.
4. Soit $f : X \to X$ holomorphe non constante. Montrer que f a au plus $2g + 2$ points fixes (on pourra utiliser la question précédente).

Exercice 4: Formes différentielles holomorphes

Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g.

1. Montrer que l'espace vectoriel $\Omega(X)$ des formes différentielles holomorphes sur X est de dimension g.

2. Pour tout diviseur D, on note $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega_{\text{mero}}(X), \text{div}(\omega) \geq D\}$. Soit K un diviseur canonique sur X. Montrer qu'il y a un isomorphisme $\mathcal{L}(K - D) \simeq \Omega(D)$.

3. On suppose $g \geq 1$. On veut montrer que pour tout $x \in X$, il existe une forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ qui ne s'annule pas en x.

   (i) On suppose $g > 1$. Montrer que $h^0(x) = 1$.

   (ii) Démontrer le résultat si $h^0(K - x) < h^0(K)$.

   (iii) Conclure.

Exercice 5: Courbes hyperelliptiques

Une surface de Riemann X est dite hyperelliptique s'il existe une application de degré 2 $p : X \to \mathbb{P}^1$.

1. Quel que soit $g \in \mathbb{N}$, exhiber une surface hyperelliptique de genre g.

2. Montrer qu'une surface est hyperelliptique si et seulement si il existe un divisieur $D \geq 0$ de degré 2 tel que $h^0(D) \geq 2$. En déduire que toute surface de genre 2 est hyperelliptique.

3. Montrer qu'il existe une involution holomorphe $\tau : X \to X$ commutant avec $p : X \to \mathbb{P}^1$.

4. Montrer que X, de genre g, est hyperelliptique si et seulement si il existe une involution holomorphe avec exactement $2g + 2$ points fixes.