TD 5

Exercice 1

1) Appelons z la variable de $\mathbb{P}^1 = \hat{\mathbb{C}}$. Si $x, y \neq \infty$ la fonction $f = \frac{z-x}{z-y}$ a un zéro simple en x, un pôle simple en y et c'est tout. On a donc bien $\operatorname{div} f = x - y$.

Si $y = \infty$, il suffit de poser $f = z - x$ qui a un zéro en x et un pôle simple à l'infini

Si $x = \infty$ $f = \frac{1}{z-y}$ a un pôle simple en y et un zéro simple à l'∞.

2) On rappelle que pour toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}^1$ (ou sur n'importe quelle surface de Riemann compacte) on a $\deg \operatorname{div} f = 0$

Donc si D et D' sont linéairement équivalents $D' = D + \operatorname{div} f$ et $\deg D' = \deg D + \deg \operatorname{div} f = \deg D$.

Pour la réciproque, en notant $\mathcal{D}$ le groupe de tous les diviseurs, on observe que $\deg : \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ est un morphisme. Il suffit donc de prouver que si $D \in \mathcal{D}$ est de degré 0 alors il existe f méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ telle que $D = \operatorname{div} f$.

On écrit $D = x_1 + x_2 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_n$ avec répétition et on pose $f = \frac{\prod'(z - x_i)}{\prod'(z - y_i)}$ où le $'$ indique qu'on omet l'∞.

On constate que $\operatorname{div} f$ et D coïncident sauf éventuellement pour le coefficient de l'infini. Si l'infini n'apparaît pas parmi les x_i ou y_i alors le numérateur et dénominateur de f ont le même degré et $f(\infty) = 1$. Ainsi ∞ n'apparaît pas non plus dans $\operatorname{div}(f)$. Si ∞ apparaît k fois parmi les x_i, f aura un zéro d'ordre k à l'∞, si ∞ apparaît k fois parmi les y_i, f aura un pôle d'ordre k. On a toujours $D = \operatorname{div} f$

3) $\mathcal{L}(D) = \{ f$ méromorphe avec un pôle simple au plus en 0 et en $1 \}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(D)$ et posons $\alpha = \operatorname{Res}_0 f$, $\beta = \operatorname{Res}_1 f$.

$f - \frac{\alpha}{z} - \frac{\beta}{z-1}$ n'a pas de pôle (pas même à l'infini). Elle est donc holomorphe puis constante $= \gamma$. Ainsi $f = \gamma + \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1}$ et $\mathcal{L}(D)$ est de dimension 3 avec base $1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z-1}$.

4) Déjà, bien sûr, $\dim \mathcal{L}(D) \geq 0$ quelque soit D.

Si $\deg D < 0$ et $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$ alors $\operatorname{div} f + D \geq 0$ donc

$$\underbrace{\deg \operatorname{div} f}_{= 0} + \deg D \geq 0$$

contradiction.

Ainsi $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ dans ce cas et la formule est correcte.
Supposons maintenant $\deg D \geq 0$. On observe que les deux membres de l'égalité sont invariants par automorphismes de $\mathbb{P}^1$. Quitte à composer par une homographie, on peut donc supposer que ∞ n'apparaît pas dans D.
On a donc $D = \sum_{i=1}^{r} n_i x_i - \sum_{j=1}^{s} m_j y_j$ avec x_i, y_j distincts, $n_i > 0$ et $m_j > 0$, $\sum n_i \geq \sum m_j$.
$f \in \mathcal{L}(D)$ ssi $\operatorname{div} f + \sum n_i x_i - \sum m_j y_j \geq 0$ ie f a un pôle d'ordre au plus n_i en x_i et un zéro d'ordre au moins m_j en y_j.
$g = \dfrac{\prod (z - y_j)^{m_j}}{\prod (z - x_i)^{n_i}} \in \mathcal{L}(D)$. En effet g n'a pas de pôle à l'∞ car $\sum m_j \leq \sum n_i$.
Si $f \in \mathcal{L}(D)$, $f = gh$ avec h sans pôle à part à l'infini, i.e h est un polynôme. Comme f ne peut pas avoir de pôle à l'infini, le degré de h est inferieur ou égal à l'ordre du zéro de g à l'infini, c'est-à-dire $\sum n_i - \sum m_j = \deg D$. Ainsi h est de degré $\leq \deg D$ donc $\dim \mathcal{L}(D) = \deg D + 1$.

Exercice 2

1) On rappelle que $\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^3}$. Ceci montre que $\wp'$ a un unique pôle triple, en $[0]$. Donc $\wp'$ doit avoir trois zéros comptés avec multiplicité. Mais $\wp'$ est impaire donc
$$\wp'\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{\text{imparité}}{=} -\wp'\left(-\tfrac{1}{2}\right) \underset{\text{périodicité}}{=} -\wp'\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \wp'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0.$$
De même on trouve que $\wp'\left(\frac{\tau}{2}\right) = \wp'\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0$ donc $\operatorname{div} \wp' = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{\tau}{2}\right] + \left[\frac{1+\tau}{2}\right] - 3[0]$
Comme $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma'} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$ on voit que $\wp$ a un pôle double en $[0]$, donc deux zéros.
Contrairement à ce que laisse penser l'énoncé, ces zéros sont très difficiles à localiser, cf "On the zeros of the Weierstrass $\wp$-function" de Eichler & Zagier.

2) Comme les translations sont des automorphismes de E_τ, $h^0(nx) = \dim \{ f \mid \operatorname{div} f + nx \geq 0 \}$ est indépendant de x et on peut supposer $x = 0$.
- Si $n < 0$ alors $\deg nx < 0$ et $h^0(nx) = 0$
- Si $n = 0$ $h^0(0 \cdot x) = 1$ car seules les constantes satisfont l'hypothèse.
- si $n = 1$ et f a un pôle simple en 0 alors $f : E_\tau \to \mathbb{P}^1$ est de degré 1, donc un biholomorphisme ce qui est impossible.

Donc $h^0(x) = 1$.

Si $n \geq 2$ et f a un pôle d'ordre n pair on peut enlever à f un multiple de $\wp^{n/2}$ pour diminuer l'ordre du pôle.
Si l'ordre est impair, on enlève $\wp^m \wp'$ avec $2m+3 = n$.
Cela montre que $h^0(nx) = h^0((n-1)x+1)$. donc $h^0(nx) = n$.

Exercice 3

1) Prenons $x \in X$ arbitrairement. Par Riemann-Roch.

$$h^0((g+1)x) - h^0(K-(g+1)x) = \underbrace{g+1}_{\deg((g+1)x)} - g + 1 = 2$$

En particulier $h^0((g+1)x) \geq 2$. Il existe donc f non constante dans $\mathcal{L}(g+1)x)$, ie il existe f avec un unique pôle en x d'ordre au plus $g+1$.

2) Reprenons Riemann-Roch : $h^0(nx) - h^0(K-nx) = n-g+1$.
On calcule $\deg(K-nx) = \deg K - n = 2g-2-n < 0$ si $n \geq 2g-1$
On en déduit que $\dim \mathcal{L}(nx) = n-g+1$ $\forall n \geq 2g-1$.
En particulier $\mathcal{L}((n-1)x) \subsetneq \mathcal{L}(nx)$: il existe donc f avec un unique pôle en x d'ordre exactement n.

3) D'après 1) il existe $f : X \to \mathbb{P}^1$ avec un seul pôle d'ordre au plus $g+1$. Donc $\deg f \leq g+1$ et X est un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$ à au plus $g+1$ feuillets.
Si X est de genre 0, $f : X \to \mathbb{P}^1$ est de degré 1 donc un biholomorp.
Si X est de genre 1, $f : X \to \mathbb{P}^1$ ne peut pas être de degré 1 sinon ce serait un biholomorphisme. Elle est donc de degré 2 (ex: $\wp$)

4) Notons plutôt $\varphi : X \to X$ notre application. Le point clé est que pour tout f méromorphe sur X, $f \circ \varphi - f$ s'annule aux points fixes de f (si ce ne sont pas des pôles). Comme il y a des fonctions qui ne s'annulent "pas trop", il ne peut pas y avoir "trop" de points fixes.
Choisissons $x \in X$ arbitrairement pour l'instant et prenons une fonction f comme dans 1), avec un pôle seulement en x d'ordre $\leq g+1$.
Si x n'est pas un point fixe de φ, ce qu'on peut supposer, $g = f \circ \varphi - f$ aura deux poles seulement ; en x et en $\varphi^{-1}(x)$. *
Donc $\deg g \leq 2g+2$ et g ne peut pas s'annuler plus que $2g+2$ fois.

Revenons à $*$: on a supposé que φ était un automorphisme.
En fait, si $g \geq 2$ tout $\varphi : X \to X$ holomorphe est un automorphisme.
D'après Riemann-Hurwitz $\chi(X) = \deg\varphi\, \chi(X) - R$ donc
$R = (\deg\varphi - 1)\chi(X)$ or $\chi(X) < 0$ donc $\deg\varphi = 1$ et $R = 0$.

Exercice 4.

1) Il s'agit de la formule de Riemann-Roch
$h^0(D) - h^0(K-D) = \deg D - g + 1$ avec $D = 0$ cela donne
$h^0(0) - h^0(K) = 1 - g$. Comme $h^0(0) = 1$ on a $h^0(K) = g$.
Si ω est une forme différentielle méromorphe telle que $K = \operatorname{div}\omega$,
toute forme différentielle holomorphe est de la forme $\alpha = f\omega$
avec f qui s'annule là où ω a des pôles, et f qui peut
avoir des pôles là où ω s'annule. Dans le langage des diviseurs
$\operatorname{div} f + K \geq 0$. On a donc $\Omega(X) \simeq \mathcal{L}(K)$ et
$h^0(K) = \dim \mathcal{L}(K) = g$.

2) Comme précédemment, on choisit une forme différentielle méromorphe
quelconque ω de sorte que $K = \operatorname{div}(\omega)$. On écrit toute
forme différentielle méromorphe $\alpha = f\omega$ avec $\operatorname{div}\alpha = \operatorname{div} f + \operatorname{div}\omega$
$= \operatorname{div} f + K$
On constate que $\operatorname{div}\alpha \geq D \iff \operatorname{div} f + K \geq D \iff \operatorname{div} f + K - D \geq 0$
et donc l'application $\alpha \mapsto f$ est un isomorphisme $\Omega(D) \simeq \mathcal{L}(K-D)$.

3) (i) si $h^0(x) > 1$ il existe une fonction holomorphe non constante f
avec un pôle simple en x. On a alors $\deg f = 1$ donc $f : X \to \mathbb{P}^1$
est un biholomorphisme. Contradiction.
(ii) On a $\mathcal{L}(K-x) \simeq \Omega(x)$ et $\mathcal{L}(K) \simeq \Omega$
avec $\Omega(x) = \{\omega$ holomorphe qui s'annule en $x\} \subset \Omega$
si $h^0(K-x) < h^0(K)$ alors $\dim\Omega > \dim\Omega(x)$. Il existe
donc $\omega \in \Omega \setminus \Omega(x)$, c'est-à-dire une forme diff. qui ne s'annule pas
en x.
(iii) Par Riemann-Roch on a $h^0(x) - h^0(K-x) = 1 - g + 1$
donc $h^0(K-x) = g - 1$ tandis que $h^0(K) = \dim\Omega = g$.
On conclut donc d'après (ii).

Exercice 5

1) Prenons un polynôme P de degré $2n$ à racines simples. On a vu que la compactification de la courbe $y^2 = P(x)$ est une surface de Riemann lisse X et la projection $(x,y) \mapsto x$ est une application holomorphe $p : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2 avec $2n$ points de ramification.
La formule de Riemann-Hurwitz donne $2-2g = 4-2n$ d'où $g = n-1$.
Cela prouve qu'il existe bien une courbe hyperelliptique en tout genre.

2) Soit D un diviseur ≥ 0 de degré 2 : cela signifie que $D = x+y$.
Si $h^0(D) \geq 2$ c'est qu'il existe f non constante avec un pôle simple en x et en y (double si $x=y$). Ainsi $f : X \to \mathbb{P}^1$ est de degré au plus 2. Si $\deg f = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^1$ qui est hyperelliptique via l'application $z \mapsto z^2$. Si $\deg f = 2$, X est hyperelliptique.
Réciproquement, si $f : X \to \mathbb{P}^1$ est de degré 2, on peut supposer qu'elle est non ramifiée à l'infini quitte à composer par une homographie. On a alors $f^{-1}(\infty) = \{x, y\}$ et f a deux pôles simples seulement ie $f \in \mathcal{L}(x+y)$. Le diviseur $D = x+y$ convient.

3) Soit $p : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2 et $\tau : X \to X$ l'unique involution définie par $p^{-1}(p(x)) = \{x, \tau(x)\}$.
Comme p est un biholomorphisme local en dehors des points de ramification, τ est holomorphe en dehors de ces points.
Autour d'un point de ramification il existe une coordonnée locale z telle que $p(z) = z^2$. On a alors $\tau(z) = -z$ qui est holomorphe.
Ainsi τ est holomorphe.

4). Les points fixes de τ sont les points de ramification de p. Donc si X est hyperelliptique, τ a $2g+2$ points fixes.
Réciproquement, supposons que $\tau : X \to X$ est une involution avec $2g+2$ points fixes et considérons le quotient $Y = X/_{x \sim \tau x}$
On sait d'après TD2 Ex 5 que Y est muni d'une structure de surface de Riemann telle que la projection $p : X \to Y$ soit holomorphe.
D'après Riemann-Hurwitz $\chi(X) = 2\chi(Y) - (2g+2)$
donc $2-2g = 2\chi(Y) - 2g - 2 \Rightarrow \chi(Y) = 2$ et $Y \simeq \mathbb{P}^1$.
Ainsi X est hyperelliptique.