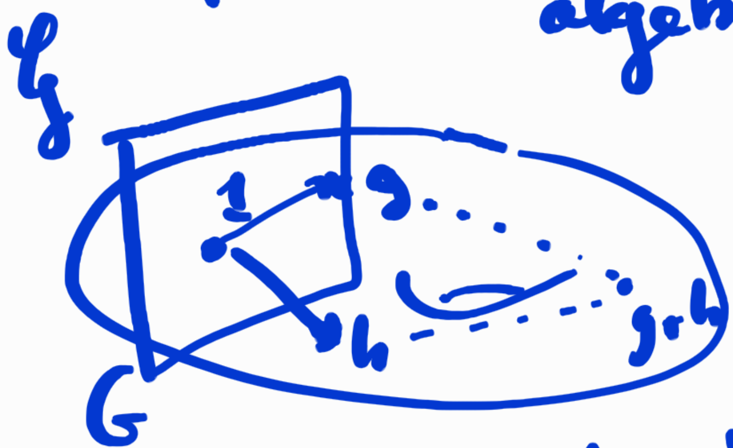
Groupes et Algèbres de Lie

Chapitre I : Groupes de Lie et leurs algèbres.



variété diff + groupe

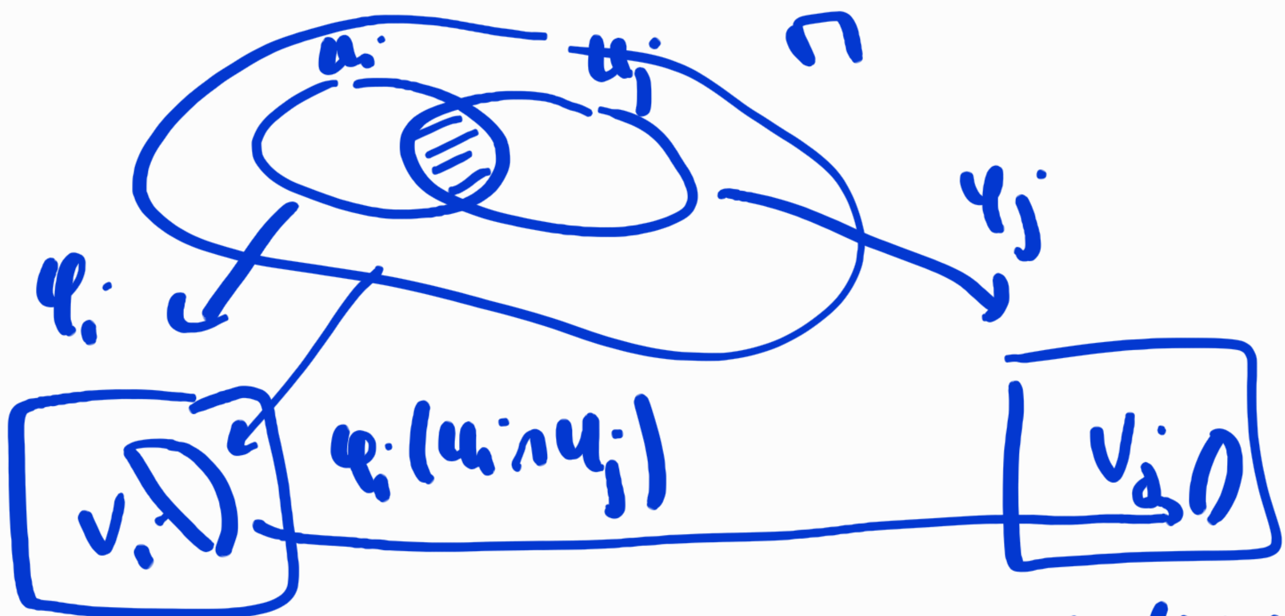
algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

<u>Théorème de Lie</u> : G groupe est essentiellement déterminé par son algèbre de Lie $\mathfrak{g} + [\cdot,\cdot]$

I Rappels de géométrie différentielle

① variété différentielle de dim n est un espace topo. M séparé et à base dénombrable muni d'un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$

où U_i sont des ouverts qui recouvrent M
$M = \bigcup_{i \in I} U_i$ et $\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$
sont des homéomorphismes



$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ soit C^∞.
$\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{\mathbb{R}}^n \qquad\qquad \hat{\mathbb{R}}^n$.

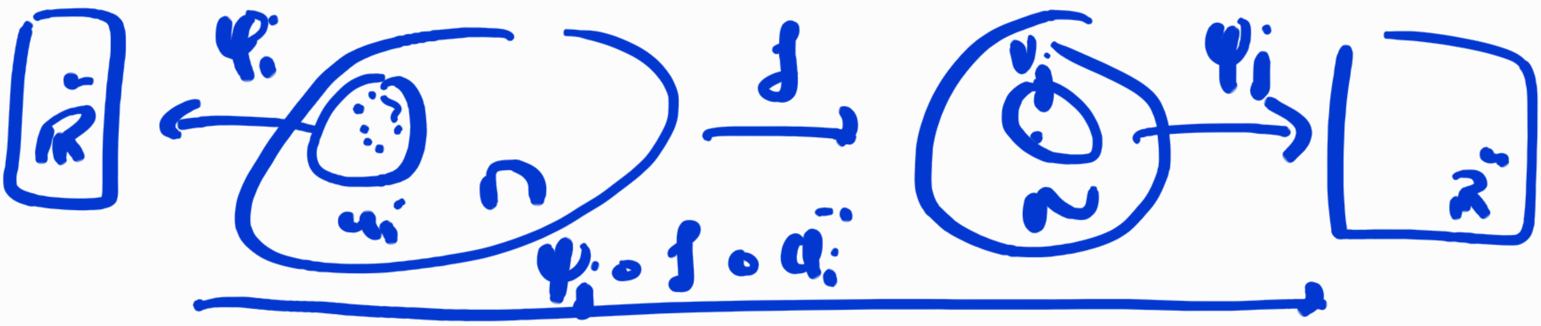
__def__ : deux atlas (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sur M sont compatibles si la réunion est un atlas.

Une structure de variété diff est une classe d'équivalence d'atlas.

__Rque__ : on peut faire la même def avec $\mathbb{R}$ remplacé par $\mathbb{C}$ et

| les fonctions C^∞ remplacé par holomorphe.

② Soit M, N deux variétés diff et $f : M \to N$ est dite C^∞ si f est continue et $\exists\, (U_i, \varphi_i)$ de M et (V_j, ψ_j) de N tq l'application



tq $\forall i, \forall j$ l'application $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est C^∞ sur $\varphi_i\left(U_i \cap f^{-1}(V_j)\right)$

<u>Rque</u> : . c'est indépendant de l'atlas choisi dans sa classe d'équivalence

. si $f : M \to N$ est C^∞ $g : N \to P$ est C^∞ alors $g \circ f : M \to P$ est C^∞.

③ Si M est une variété diff. et $x \in M$ alors on peut définir $T_x M$. car un espace vect réel de dim n.

$$T_x M = \{ X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ formes linéaires} \}$$

$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$$X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f)$$

intuitivement

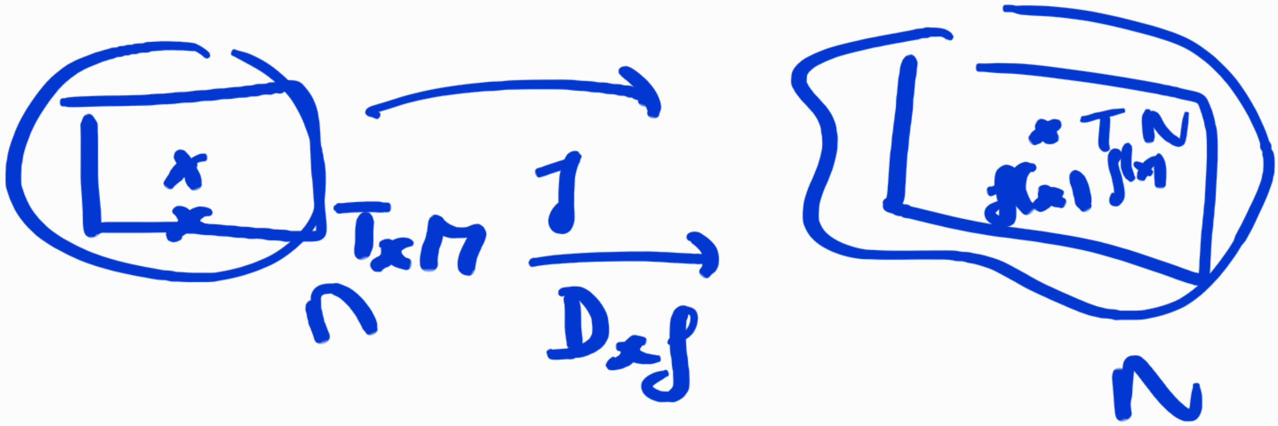
X s'interprète comme l'opérateur de dérivation de f dans la direction X.

Si $f : M \to N$ $\mathcal{C}^\infty$ entre 2 variétés et $x \in M$, on peut déf $D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ application linéaire

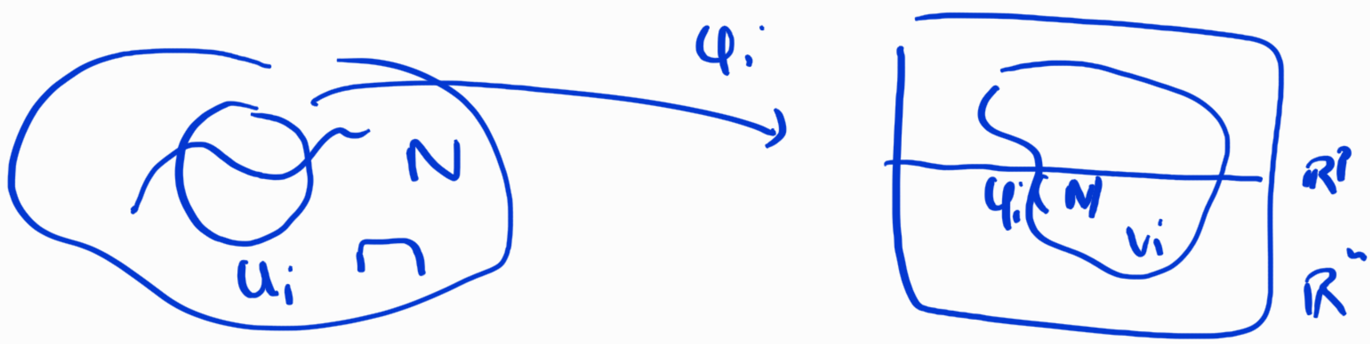
$$D_x f(X) = \{ g \in \mathcal{C}^\infty(N) \to X(g \circ f) \}$$

On vérifie que $D_x(f \circ g) = D_{g(x)} f \circ D_x g$

(4) Si M est une variété diff de dim n



et $N \subset M$ est un sous-ensemble
On dit que c'est une sous-variété (diff).
s'il existe $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ atlas de M
tq $\varphi_i(U_i \cap N) = \mathbb{R}^p \cap V_i$



$\mathbb{R}^p = (x_1 \dots x_p, 0, 0, 0) \subset \mathbb{R}^n$

alors N a une structure induite de variété
L'espace tangent T_xN est un sous espace vectoriel de T_xM

Si $N \subset M$ $\qquad i : N \to M$, $x \mapsto x$

$T_xN = \mathrm{im}(D_x i) \subset T_xM$.

Souvent on se contente d'étudier les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Ce n'est pas intrinsèque.

II Définition d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie

def: Un groupe de Lie G est à la fois une variété diff de dim n et un groupe tq

$$\mu : \begin{array}{l} G \times G \to G \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} \quad \text{et} \quad \iota : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

sont C^∞.

Donnons deux exemples :

① V un espace vectoriel de dim n. $(V, +)$ c'est un groupe de Lie "abélien" loi commutative.

Rque :
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ top. discrète groupe de Lie de dim 0. abélien
- les seuls sous-groupes de Lie (sous groupe + sous variété) de V sont les sous-espaces vectoriels
- $S^1 \subset \mathbb{C}$ c'est un sous-groupe pour $\times$ et c'est une sous-variété. C'est un groupe de Lie abélien.

- $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ groupe de Lie.

(2) $GL(V) = \{ A \in End(V) \,,\, A \text{ inversibles} \}$.

c'est un groupe pour la composition.

$GL(V) \subset End(V) = \mathbb{R}^{n^2}$ est un ouvert

$\det : End\, V \to \mathbb{R}$ est polynomial donc $\mathcal{C}^\infty$

$GL(V) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ouvert. donc une sous-variété de $End\, V$.

Mq c'est bien un groupe de Lie

$\mu(A,B) = AB$ $\quad \iota(A) = A^{-1}$ sont-elles $\mathcal{C}^\infty$?

μ est une application "quadratique" dans les coordonnées standard donc $\mathcal{C}^\infty$.

De même par la règle de Cramer $A^{-1} = \dfrac{Com\, A^T}{\det A}$

où $Com(A)$ est polynomial dans les coordonnées standard et $\dfrac{1}{\det A}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL(V)$.

donc ι est aussi $\mathcal{C}^\infty$ et $GL(V)$ est bien un groupe de Lie.

<u>Observation</u> : les groupes de Lie "les plus intéressants" sont des sous-groupes de Lie de $GL(V)$.

<u>Def</u> : On note $1 \in G$ l'élément neutre de G et l'espace tangent à G en 1 est noté $\mathfrak{g} = T_1 G$

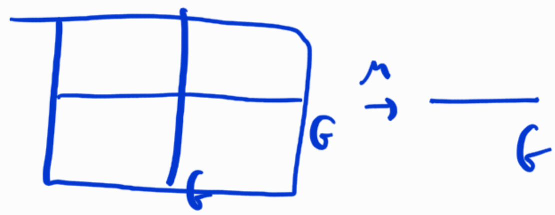
On observe que $\mu(1,1) = 1\cdot 1 = 1$

$$D_{(1,1)}\mu : T_{(1,1)}(G\times G) \longrightarrow T_1 G$$

$$\wr\wr$$

$$T_1 G \times T_1 G \qquad \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{f(\mathbb{R})}$$

$$\mu(g,1) = g\cdot 1 = g$$



$$D_{(1,1)}\mu(X,0) = X$$

$$D_{(1,1)}\mu(0,Y) = Y$$

donc $\quad D_{(1,1)}\mu(X,Y) = X+Y$

$$(X,0)+(0,Y)$$

$$D_1 i(X) = -X$$

preuve : $\quad i(g) = g^{-1} \qquad \mu(g,i(g)) = 1$

$$G \to G$$
$$g \mapsto \mu(g,i(g))$$

c'est une application constante donc sa dérivée en 1 est 0

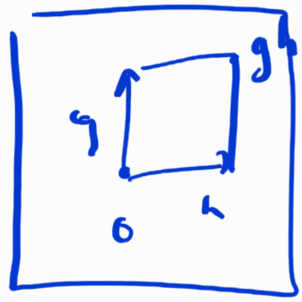
Règle de la chaîne : $\quad D\mu(\underbrace{D_1 id(X)}_{=X}, D_1 i(X)) = 0$

$$\Rightarrow \quad X + D_1 i(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 i(X) = -X.$$

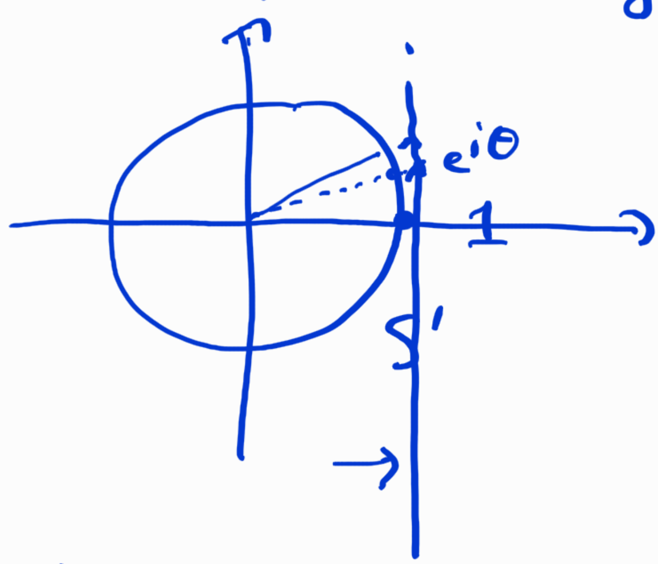
Observation : $(\mathfrak{g},+)$ est la linéarisation de $(G,\times)$

" $gh = g + h$ "
$g^{-1} \simeq -g$

Si g et h sont très proches de 1 alors gh sera très proche de $g+h$ et g^{-1} sera très proche de $-g$.



ex :



$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$
" $\theta + \varphi$ "

On voudrait comprendre ce qui différencie $(G, \cdot)$ et $(\mathfrak{g}, +)$. C'est surtout la non-commutativité car G n'est pas commutatif en général mais $\mathfrak{g}$ oui !

On étudie l'effet de la conjugaison sur G.

On fixe $x \in G$ et on pose

$$\begin{aligned} Ad_x : G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto x y x^{-1} \end{aligned}$$

conjugaison par x.

$Ad_x(1) = 1$ $\quad Ad_x$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$. On peut considérer

$$D_1 Ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$\underset{Ad_x}{\shortparallel}$ $\quad$ l'application adjointe

<u>Rque</u> : $\quad Ad_x \circ Ad_y = Ad_{xy}$

On applique la règle de la chaîne

$$\Rightarrow \quad Ad_x \circ Ad_y = Ad_{xy}$$

reformulation : $\quad Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$
$\quad x \longmapsto Ad_x$

c'est une représentation (i.e un morphisme de groupe)

Cette application est elle-même différentiable.

On peut la dériver à nouveau ! $\quad Ad : 1 \to Id$

on observe $\quad T_{Id}\, GL(\mathfrak{g}) = End(\mathfrak{g})$

[Rappel $\quad GL(\mathfrak{g})$ est un ouvert de $End\,\mathfrak{g}$]

$$D_1 Ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g}) \quad \text{notée } ad$$

Déf : Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ on pose $[X,Y] = ad(X)(Y)$

par construction $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ est une application bilinéaire. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de cette opération est appelé l'algèbre de Lie de G.

Exemple : ① Si $G = (V, +)$

$$Ad_x(y) = x + y - x = y$$

$Ad_x(Y) = Y$ donc $ad = 0$

donc $[X,Y] = 0 \quad \forall X, Y \in V$.

Algèbre de Lie abélienne $\Leftrightarrow [X,Y] = 0 \ \forall X, Y \in V$

② $G = GL(V)$ $\qquad Ad_x(y) = x y x^{-1}$

$Ad_x(Y) = \underline{x Y x^{-1}}$

donc $ad(X)(Y) = XY - YX$

$= [X, Y]$

le crochet de Lie dans l'algèbre de Lie de $GL(V)$ qui est $End(V)$ est simplement le

<u>commutateur</u>.

Proposition : Si $\phi : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupe de Lies (un morphisme de groupe $\mathcal{C}^\infty$). $\phi(1_G) = 1_{G'}$

$\varphi = D_1 \phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}' \; (= T_{1_{G'}} G')$

On a 1) $\varphi \circ Ad_x = Ad_{\phi(x)} \circ \varphi$

2) $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie

i.e. $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$

démo : $\phi(Ad_x(y)) = \phi(xyx^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}$

$= Ad_{\phi(x)} \phi(y)$

On dérive cette identité par rapport à y dans la direction Y.

$$\varphi(Ad_x(Y)) = Ad_{\phi(x)} \varphi(y) \quad (1)$$

On dérive à nouveau par rapport à x

$$\varphi(ad(X)(Y)) = ad\varphi(X)(\varphi(y))$$

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(y)]$$. fin

(2) de la démo.

<u>Théorème</u> : $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

- $[X,Y] = -[Y,X]$ antisymétrie
- $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

identité de Jacobi.

<u>démo</u> : on rappelle que $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes (adjonction).

Sa dérivée en 1 doit préserver le crochet de Lie. ie $\widehat{\ }$ ad.

$$\mathrm{ad}([X,Y]) = \underbrace{[\mathrm{ad}\,X, \mathrm{ad}\,Y]}_{\substack{\text{crochet dans } GL(\mathfrak{g}) \\ = \text{commutateur.}}}$$

si on évalue ceci sur un vecteur Z, on obtient

$$\mathrm{ad}([X,Y])(Z) = \mathrm{ad}\,X(\mathrm{ad}\,Y(Z)) - \mathrm{ad}\,Y(\mathrm{ad}\,X(Z))$$

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

c'est presque l'identité de Jacobi (modulo l'antisymétrie)

fin de la démo : pourquoi $[X,Y] = -[Y,X]$.

fait de géodiff : Si $f : M \to N$ une application $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés et $x \in M$ tq $D_x f = 0$ $(T_x M \to T_{f(x)} N)$ alors x est un point critique de f.
Alors $\exists$ $D^2 f : T_x M \times T_x M \to T_{f(x)} N$ correspondant à la dérivée seconde. bien définie et symétrique (Th. de Schwartz).

Application : $c : G \times G \to G$
$(x, y) \mapsto x y x^{-1} y^{-1}$

l'application commutateur. c'est $\mathcal{C}^\infty$ et $c(1,1) = 1$

Calculons $D_{(1,1)} c (X, Y) = X + Y - X - Y$
$= 0$

donc on peut définir $D^2_{(1,1)} c : (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \times (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$

Calculons d'abord //y dans la direction Y

$c(x, y) = x y x^{-1} . y^{-1}$

$D_Y c = Ad(x) Y - Y$

puis on dérive //x $D_X D_Y c = ad(X)(Y) = [X, Y]$

dans l'autre sens $\quad c(x,y) = x \cdot y x^{-1} y^{-1}$

$$D_x c = X + Ad(y)(-X)$$

$$D_Y D_X c = 0 + [Y, -X] = -[Y, X]$$

donc on a bien $[X,Y] = -[Y,X]$.

<u>Résumé</u> : si G est un groupe de Lie en posant $\mathfrak{g} = T_1 G$ on a un espace vect. muni de $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilinéaire, antisymétrique et qui vérifie Jacobi

<u>Def</u> : Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V (peut être de dim infinie) muni d'une application $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ bilinéaire antisymétrique, vérifiant Jacobi.

<u>Question</u> : est-ce que toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie ?

<u>Exemple</u> : $V = \mathbb{R}^3 \qquad [X,Y] = X \times Y$ produit vectoriel

vérifier que c'est une algèbre de Lie.

Est-ce l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie?

<u>Réponse</u> : oui $G = SO(3) =$ rotations de l'espace

$0 \simeq \theta$ 

$$\mathfrak{so}(3) = T_1 SO(3) \simeq \mathbb{R}^3$$

rotation infinitésimale d'axe X $\longrightarrow$ X

<u>Thm (Ado)</u> ~1930

Si V est algèbre de Lie de dim finie alors $\exists$ G groupe de Lie tq $V \simeq \mathfrak{g}$.