Rappels de la séance précédente

$\rho : G \to GL(V)$ est irréductible si $\forall W \subset V$ sous-espace vect invariant par ρ ($\forall g \in G\ \forall w \in W\ \ \rho(g)(w) \in W$) est $\{0\}$ ou V.

- Si G est un groupe compact, toute représentation de dim finie est somme directe de représentations irréductibles.
- Si V est un espace vectoriel complexe alors cette décomposition est unique.

<u>Lemme de Schur</u> : Si V et W sont deux représentations irréductibles alors $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{ f : V \to W \text{ tq } f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g) f(v) \}$

$= \{0\}$ ou $\simeq \mathbb{C}$.

<u>Exemple</u> : le cas de S^1

L'ensemble des classes d'isomorphism de représentations complexes irréductibles de S^1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{Z} \longleftrightarrow \rho_n : S^1 \to GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \quad z \mapsto z^n$$

<u>Exercice</u>. $\rho_n \otimes \rho_m : S^1 \to GL(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$

$$\rho_n \otimes \rho_m(z)(v \otimes w) = \rho_n(z) v \otimes \rho_m(z) w$$

or $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ et $\rho_n \otimes \rho_m(z)(1 \otimes 1) = \rho_n(z) 1 \otimes \rho_m(z) 1$

$= z^n \otimes z^m$

$= z^n z^m \, 1 \otimes 1$

$= z^{n+m} \, 1 \otimes 1$

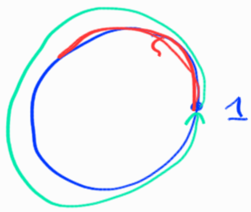
$$\rho_n \otimes \rho_m \simeq \rho_{n+m}$$

III Représentations des groupes de Lie compacts et simplement connexes

Quels sont ces groupes?

G est simplement connexe si $\pi_1(G) = 1 = \left\{ \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to G \\ \gamma(0) = \gamma(1) = 1 \end{array} \right\} / \sim$

S^1



$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

L'exemple le plus simple de groupe compact connexe et simplement connexe est $\underline{SU_2}$. Pour l'étude des quarks (chromodynamique quantique) on fait intervenir SU_3.

En général SU_n $(n \geq 2)$ est compact et simplement connexe.

Les autres sont $Spin(n)$ (le revêtement universel de $SO(n)$).

Puis $Sp(n)$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

On s'intéresse à la classification des rep. irréductibles de ces groupes

à une telle rep $\rho : G \to GL(V)$ on peut associer le morphisme

$\varphi : \mathfrak{g} \to End(V)$ associé $(\varphi = D_1 \rho)$.

<u>Def</u>: un morphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to End(V)$ est appelé représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. [Souvent on note $\varphi(X)(v) = X \cdot v$]

on dit que $\mathfrak{g}$ agit sur V

$$[X,Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$$

Une telle représentation est dite irréductible si tout $W \subset V$ stable par $\mathfrak{g}$ $(\forall w \in W \ \forall X \in \mathfrak{g} \quad X \cdot w \in W)$ on a $W = \{0\}$ ou $W = V$.

<u>Prop</u>: Si $\rho : G \to GL(V)$ est irréductible alors $\varphi = D_1 \rho$ aussi et réciproquement.

<u>Démo</u>: On va prouver ρ est <u>réductible</u> ssi $D_1 \rho$ est aussi <u>réductible</u>

supposons ρ est réductible. $\exists\, W \subset V \quad W \neq \{0\} \quad W \neq V$

tq $\rho(g) w \in W$.

or $\quad \varphi(X) w = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(e^{tX}) \, w$

or par hypothèse $\rho(\underset{\in G}{e^{tX}}) \, w \in W$ donc $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(e^{tX}) w \in W$

donc W est stable par $\mathfrak{g}$, et donc φ est réductible.

Réciproquement, on suppose que $\mathfrak{g}$ agit sur V de façon réductible
alors $\exists\, W \subset V$ tq $X \cdot w \in W \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.
On a supposé que G est simplement connexe il y a une bijection entre les morphismes $\begin{cases} G \to H & \text{de gp.} \\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} & \text{d'algèbres} \end{cases}$

donc l'action de $\mathfrak{g}$ sur W s'intègre en une unique représentation $\rho' : G \to GL(W)$.
Par unicité de cette opération, ρ et ρ' doivent coïncider en restriction à W ; ie ρ doit préserver W. Donc ρ est réductible. ☐

En conclusion : il suffit d'étudier les reps. irréductibles de $\mathfrak{g}$ pour comprendre les reps irréductibles de G. C'est un problème d'algèbre linéaire.

Pour plusieurs raisons, on va étudier plutôt les reps complexes.
i.e $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ avec V espace vectoriel complexe.
mais $\mathfrak{g}$ est en général un espace vectoriel réel.

Un tel φ induit un morphisme $\tilde{\varphi} : \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ d'algèbres de Lie complexes. Par définition $\tilde{\varphi}(X \otimes z) = z\, \varphi(x)$.

Il y a une bijection entre les morphismes $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ et les morph $\tilde{\varphi} : \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$

L'exemple de SU_2

On rappelle que $SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.

$$su_2 = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une base de su_2 est formée de $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
matrices de Pauli.

Remarque : ces trois matrices appartiennent à $sl_2(\mathbb{C}) = \{ M \in M_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}\, M = 0 \}$.

elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$: elles forment donc une base de $sl_2(\mathbb{C})$

donc : $su_2 \otimes \mathbb{C} = sl_2(\mathbb{C})$.

La classification des reps complexes de su_2 est la même que celle de $sl_2(\mathbb{C})$.

On va se servir de la base "canonique" de $sl_2(\mathbb{C})$.

donnée $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

les crochets de Lie sont $\boxed{{}^{*}\ [E,F] = H \qquad [H,E] = 2E \quad [H,F] = -2F}$

Essayons de classifier les reps irréductibles de $sl_2(\mathbb{C})$.

On se donne donc V espace vect. complexe de dim finie avec une action de $sl_2(\mathbb{C})$, ie 3 endomorphisme E, F, H qui vérifient les relations $*$

Commençons par prendre un vecteur propre de H. ie

Soit $v \neq 0 \in V$ tq $Hv = \lambda v$.

on observe que Ev est aussi un vecteur propre pour H

$$H(Ev) = HE\cdot v = (HE - EH + EH)v$$
$$= (2E + EH)v = 2E(v) + E(\lambda v)$$
$$= (\lambda+2)Ev.$$

donc soit $Ev = 0$, soit Ev est un vep de H pour la vp $\lambda+2$.

Considérons la suite $v, Ev, \dots, E^k v$ où k est l'entier maximal pour lequel $E^k v \neq 0$. Ce sont des vep pour H de vap $\lambda, \lambda+2, \dots, \lambda+2k$. En particulier ils sont linéairement indépendants ce qui prouve que $k \leq \dim V$ donc k est bien défini.

On pose $v_0 = E^k v$: on l'appelle "le vecteur de plus haut poids"

Le vecteur vérifie $\begin{cases} Hv_0 = \mu v_0 & (\mu = \lambda+2k) \\ \text{et aussi} \quad Ev_0 = 0 \end{cases}$

On pose maintenant $v_i = F^i v_0$

on vérifie de la même façon que $H v_i = (\mu - 2i) v_i$

on pose $W = \mathrm{Vect}\{v_i\} \subset V$

par construction W est stable par H et par F.

Lemme: $E v_i = i(\mu - i + 1) v_{i-1}$

$$\begin{tikzcd}
0 & v_m \arrow[l, "F"'] & \cdots & v_4 & v_3 \arrow[l, "F"'] \arrow[r, bend right, "E"'] & v_2 \arrow[l, "F"'] \arrow[r, bend right, "E"'] \arrow[loop above, "H"] & v_1 \arrow[l, "F"'] \arrow[r, bend right, "E"'] \arrow[loop above, "H"] & v_0 \arrow[l, "F"'] \arrow[r, bend right, "E"'] \arrow[loop above, "H"] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>démo</u>: par récurrence. $E v_0 = 0$ v.

puis en supposant que c'est vrai pour i on calcule

$$E v_{i+1} = E F v_i = ([E,F] + FE) v_i = (H + FE) v_i = H v_i + F E v_i$$

$$= (\mu - 2i) v_i + F\, i(\mu - i + 1) v_{i-1} = [\mu - 2i + i(\mu - i + 1)] v_i$$

$$= [\mu - 2i + i\mu - i^2 + i] v_i = (\mu - i + i\mu - i^2 + 1) v_i$$

$$= (i+1)(\mu - i) v_i$$

cqfd.

<u>Conclusion</u>: W est stable par E donc W est stable par $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Comme V est supposé irréductible, $W = V$.

Soit m l'entier maximal pour lequel $F^m v_0 \neq 0$.

Comme $v_0, \ldots, v_m$ sont les vecps pour H de vap. distinctes, ils sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de V qui est de dimension $m+1$.

Trouvons une relation entre m et μ:

H agit sur V, $H = [E,F]$ donc $\mathrm{Tr}\, H = 0$.

or $\mathrm{Tr}\, H = \sum_{i=0}^{m} (\mu - 2i) = (m+1)\mu - 2\sum_{i=0}^{m} i = (m+1)\mu - m(m+1)$

$= (m+1)(\mu - m) = 0$ donc $\mu = m$.

<u>Théorème</u>: les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont paramétrées

par leur dimension : il existe un unique rep de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ V_m de dim $m+1$ donnée par les formules précédentes.

<u>base</u> : $v_0, \dots, v_m$

$$\boxed{\begin{aligned} &F v_i = v_{i+1} \qquad E v_i = i(m-i+1) v_{i-1} \\ &H v_i = (m-2i) v_i \end{aligned}}$$

On voudrait passer de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ à $SL_2(\mathbb{C})$ (et SU_2)

On se rappelle que $SL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ (morphisme d'inclusion $SL_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C})$)

c'est la représentation <u>tautologique</u>.

$SL_2(\mathbb{C})$ agit sur l'espace des polynômes homogènes de degré m à deux variables par la formule $g \cdot P = P \circ g^{-1}$

où si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $P = P(x,y)$

alors $(g \cdot P)(x,y) = P(g^{-1}(x,y)) = P(dx - by, -cx + ay)$

$$\left[\begin{aligned} g \cdot (h \cdot P)(x,y) &= h \cdot P(g^{-1}(x,y)) = P(h^{-1} g^{-1}(x,y)) \\ &= P((gh)^{-1}(x,y)) = (gh) \cdot P(x,y) \end{aligned} \right]$$

Si on note P_m l'espace vect. des polynômes homogènes de degré m, on obtient bien une représentation de $SL_2(\mathbb{C})$ sur P_m.

On note $\rho_m : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(P_m)$ cette rep.

on voudrait montrer que $D_1 \rho_m$ est la même rep que V_m dans le théorème précédent.

Pour cela, on calcule $D_1 \rho_m$ dans la base canonique de P_m.

à savoir $X^m, X^{m-1}Y, X^{m-2}Y^2, \dots, XY^{m-1}, Y^m$

ie $\{X^p Y^q\}_{p+q=m}$. C'est un espace vect. de dim $m+1$.

Calculons l'action de E, F, H dans cette base.

$$H \cdot X^p Y^q = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{tH} \cdot X^p Y^q\right) \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{-t} X)^p (e^t Y)^q \qquad e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-pt+qt}\, x^p y^q = (q-p)\, x^p y^q$$

La base canonique est propre pour H. Les valeurs propres sont $m, m-2, m-4, \dots, -m$. Ce sont les mêmes veps que tout à l'heure.

$$E \cdot X^p Y^q = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^{tE} \cdot X^p Y^q \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (X - tY)^p\, Y^q$$

$$= -p\, X^{p-1} Y\, Y^q = -p\, X^{p-1} Y^{q+1}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{tE} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e^{-tE}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - ty \\ y \end{pmatrix}$$

$$F \cdot X^p Y^q = -q\, X^{p+1} Y^{q-1}$$

On dessine :

$$\begin{tikzcd} X^m \arrow[r, bend left, "E"] \arrow[loop below, "H"'] & X^{m-1}Y \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[r, bend left, "E"] & \cdots & XY^{m-1} \arrow[r, bend left, "E"] & Y^m \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[loop below, "H"] \end{tikzcd}$$

$$-m \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m$$

La base $X^p Y^q$ et la base des v_i se correspondent modulo un facteur à définir.

Le vecteur de plus haut poids est le vecteur vérifiant $\left.\begin{array}{l} E v_0 = 0 \\ H v_0 = m v_0 \end{array}\right\}$

ici, il s'agit du vecteur Y^m. En identifiant Y^m et v_0 on montre que $P_m \simeq V_m$ comme rep de $sl_2(\mathbb{C})$.

En conclusion, P_m est une rep. irréductible de $SL_2(\mathbb{C})$ et toute rep irréductible de $SL_2(\mathbb{C}) / SU_2$ est isomorphe à P_m pour un certain m.

Physiquement : m est appelé spin

Prochaine séance : reps SO_3 sur $\mathbb{R}^3$ en rapport avec les fonctions polynomiales Harmoniques sphériques.