# Groupes et Algèbres de Lie   cours n°2

**Rappel** : définition d'un groupe de Lie $G$

groupe + variété différentielle

$\mu : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$    $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$   sont différentiables

Etant donné un groupe de Lie $G$ on définit $\mathfrak{g} = T_1 G$

c'est un espace vectoriel réel de dim $n = \dim G$.

$\mathfrak{g}$ est muni d'un crochet de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X,Y) \mapsto [X,Y]$

défini en dérivant 2 fois l'application

$(x,y) \to x y x^{-1}$   une fois // $y$
une fois // $x$.

- $[X,Y] = -[Y,X]$   antisymétrie
- $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$   Jacobi

**1er exemple** (motivation)

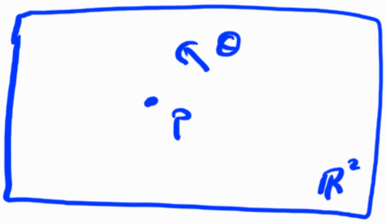
$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) = \{$ isométries du plan euclidien $\}$

$= \{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, $d(f(x), f(y)) = d(x,y) \}$

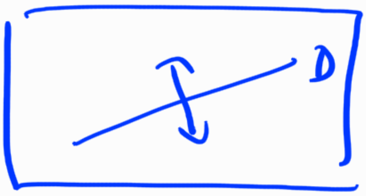
ou $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

ex : ① rotations autour d'un point

② translations de vecteur $v \in \mathbb{R}^2$



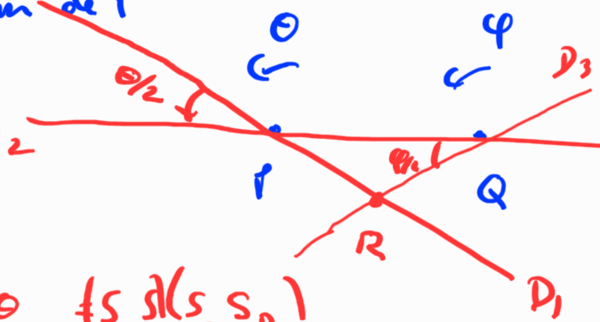
③ symétries (ou réflexion) par rapport à un axe



- symétrie centrale par rapport à P = rotation d'angle π autour de P

C'est la liste complète

$G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est un espace topologique (en fait une variété)



$R_\varphi \cdot R_\theta \; (S_{D_3} S_{D_2})(S_{D_2} S_{D_1})$

$= S_{D_3} \cdot S_{D_1}$

$= R_?$ autour de R.

<u>Question</u> : est-ce connexe par arcs ?

- deux rotations autour d'un même point $R_\theta$ et $R_\varphi$ sont reliées en changeant continûment $\theta$ en $\varphi$.
- deux rotations sont toujours reliées entre elles (déplacer le centre)

→ au moins deux composantes différentes suivant que $f$ préserve ou renverse l'orientation.

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{$ translations, rotations $\}$

$= \{ f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ préservant l'orientation ?

**Rappel**

$$f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightsquigarrow \vec{f} \in GL(\mathbb{R}^2)$$

$f$ est une translation $\Leftrightarrow$ $\vec{f} = 0$

$$\det : GL(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^*$$

$f$ préserve l'orientation $\Leftrightarrow$ $\det \vec{f} > 0$

montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ a au moins deux composantes connexes.

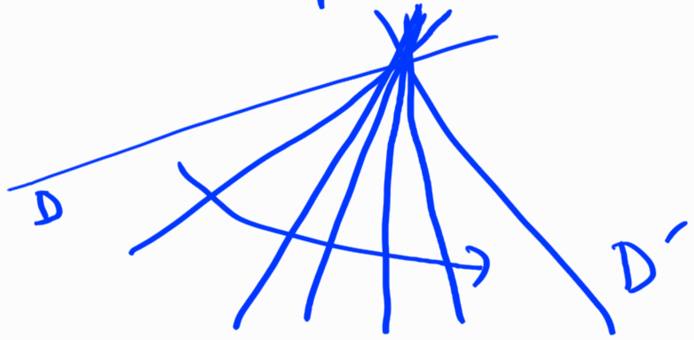
tous les élément de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ sont connectés à l'identité $\to$ $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ est connexe par arcs.

$$\mathrm{Isom}^-(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \setminus \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$$

$= \{$ réflexions par rapport à un axe $\}$.

Est-ce connexe par arcs ?

Oui :



Autre réponse :

on choisit $s_D \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathrm{Isom}^-(\mathbb{R}^2) \\ g &\longmapsto g \circ s_D \end{aligned}$$

$n o S_D \longleftarrow n$

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ est homeomorphe à $\mathrm{Isom}^-(\mathbb{R}^2)$.
(difféomorphe)

Pourquoi $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ est une variété différentielle

Méthode: voir $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ comme sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n$ bien choisi

$n = 3$ $$g = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A \in O(2)$$

$A = \vec{f}$ $(x, y)$ la "partie translation"

$g$ agit sur $\mathbb{R}^2$ $$g(u,v) = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

ceci définit $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \subset M_3(\mathbb{R})$
permet de définir la structure de variété différentielle

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2 \leftarrow$ partie translation.

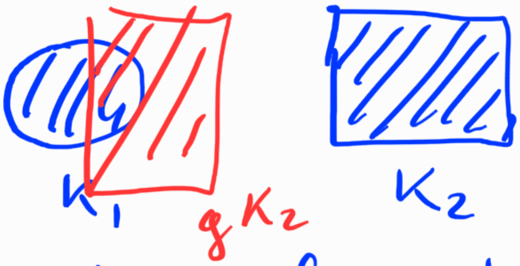
$f$ difféomorphe angle $\vec{f} = \theta$

$$f \longmapsto (A, (u,v)) \qquad A \in SO(2) = S^1$$

$$f = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ 0\,0 & 1 \end{pmatrix}$$

A quoi tout cela peut bien servir?

Formule de Blaschke.



quelle est la probabilité de $K_1$ rencontre l'image de $K_2$ par une isométrie directe ?

$$\int_{Isom^+(\mathbb{R}^2)} f(g)\, dg \qquad f(g)=1 \text{ si } K_1 \cap gK_2 \neq \emptyset, \quad f(g)=0 \text{ sinon.}$$

= géométrie de $K_1$ et $K_2$

Le fait que $Isom^+(\mathbb{R}^2)$ soit un groupe de Lie (en fait une variété) permet de donner un sens à cette intégrale. Géométrie intégrale ...

## III Les groupes de Lie classiques

Rappel de géométrie différentielle

Soit $M, N$ deux variétés différentielles et $f : M \to N$ une application $C^\infty$.

Déf : on dit que $f$ est une submersion en $x \in M$ si $D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est surjective.

Proposition : si $f : M \to N$ est $C^\infty$ et $y \in N$ tq $f$ est une submersion en tout $x \in M$ tq $f(x) = y$.
Alors $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de $M$
et $T_x f^{-1}(\{y\}) = \operatorname{Ker} D_x f \subset T_x M$.

**exemple 0** : $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2+y^2$

$f$ est une submersion en $f^{-1}(\{1\})$ car

$$D_{(x,y)}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \neq (0,0) \text{ car } x^2+y^2=1$$

**Exemple 1** : Soit $V$ un espace vectoriel de dim $n$ sur $\mathbb{R}$

[ $(V,+)$ un groupe de Lie et $(GL(V), \cdot)$ aussi ]

On rappelle que $\det : GL(V) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupe et une application $\mathcal{C}^\infty$

**def** : $SL(V) = \det^{-1}(\{1\}) = \{A \in GL(V), \det A = 1\}$

Mq c'est un groupe de Lie. Calculer son algèbre de Lie.

Il suffit de démontrer que $\det$ est une submersion en tout $A \in SL(V)$.

**Lemme** : $D_A \det(H) = \mathrm{Tr}[{}^t\mathrm{Com}\, A \; H]$ (déduit de la formule de Cramer)

$\det$ est une submersion en $A \iff D_A \det : \mathrm{End}\, V \to \mathbb{R}$ est surjective $\iff D_A \det \neq 0 \iff [H \mapsto \mathrm{Tr}\, {}^t\mathrm{Com}\, A\, H \neq 0]$

$\iff {}^t\mathrm{Com}\, A = 0$

Si $A \in SL(V)$ alors $\det A = 1$ donc $A$ inversible

alors ${}^t\mathrm{Com}\, A = \det A \; A^{-1} \neq 0$ (Cramer).

Le critère s'applique et $SL(V)$ est bien une sous-variété de $GL(V)$.

Calculons l'algèbre de Lie de $SL(V)$ notée $\mathfrak{sl}(V)$.

$\mathfrak{sl}(V) = T_1 SL(V) = \mathrm{Ker}(D_1 \det)$ (cf proposition)

$= \mathrm{Ker}( H \mapsto \mathrm{Tr}\, H) = \{ A \in \mathrm{End} V \text{ tq } \mathrm{Tr} A = 0 \}$.

**observation** : $sl(V)$ muni du commutateur

$$[A, B) = AB - BA$$

est bien une sous-algè de lie.

$$\mathrm{Tr}\, [A \quad ] = \mathrm{Tr}\, AB - \mathrm{Tr}\, BA = 0 .$$

$SL(V)$ est un groupe de lie de dimension $n^2 - 1$.

et son algèbre de lie $sl(V) = \{ A \in \mathrm{End} V , \mathrm{Tr}\, A = 0 \}$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$.

**Exemple 2** : Soit $V$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On définit $O(V) = \{ A \in GL(V) \text{ tq } \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \}$

Ceci est un groupe appelé groupe orthogonal.

Pourquoi est-ce un groupe de lie ?

On choisit une base orthonormée $e_1, \dots, e_n$ de $V$. $\langle X, Y \rangle = {}^tX . Y$

Dans cette base $A \in O(V)$ ssi

$$ {}^t(AX)\, AY = {}^tX Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$ {}^tX\, {}^tA A Y = {}^tX Y$$

$$ {}^tA A = Id .$$

$O(n) = O(V) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tA A = id \}$.

On définit

$$f : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ {}^tA = A \}$$
$$A \mapsto {}^tA A$$

Pour montrer que $O(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ il suffit de prouver que $f$ est une submersion en tout $A \in O(n)$

on dérive $D_A f (H) = {}^tH A + {}^tA H$.

$D_A f : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ on veut prouver qu'elle est surjective quand $A \in O(n)$

$$D_A f(H) = {}^tH\, {}^tA^{-1} \underbrace{{}^tA A}_{Id} + \underbrace{{}^tA A}_{Id} A^{-1} H = A^{-1} H + {}^t(A^{-1} H)$$

$= B + {}^tB$ avec $B = A^{-1}H$.

or toute matrice symétrique $B$ s'écrit $\frac{1}{2}(B + {}^tB) = \frac{1}{2}B + {}^t(\frac{1}{2}B)$

finalement $D_A f(\frac{1}{2}AH) = A^{-1}(A\frac{H}{2}) + {}^t(A^{-1}\frac{AH}{2})$

prenons $H$ symétrique

$= \frac{H}{2} + \frac{{}^tH}{2} = H.$

donc toute matrice symétrique est dans l'image de $D_A f$.

$\Rightarrow$ $D_A f$ est surjective donc $f$ est une submersion

$\Rightarrow$ $O(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ donc c'est un groupe de Lie.

Calculons son algèbre de Lie: $o(n) = T_1 O(n)$

$= \operatorname{Ker} D_1 f$

$D_1 f(H) = H + {}^tH$

$H \in \operatorname{Ker} D_1 f \iff H + {}^tH = 0 \iff {}^tH = -H$

$\iff H$ est antisymétrique.

$o(n) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) \quad {}^tH = -H \}$.

$\Rightarrow$ $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

Observation: $A, B$ antisymétrique $[A,B] = AB - BA$ est aussi antisymétrique

$${}^t(AB - BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB$$
$$= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB$$
$$= -(AB - BA).$$

Le cas $n=3$: $(\mathbb{R}^3, \text{produit vectoriel}) = (o(3), [\cdot,\cdot])$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Omega_X = \begin{pmatrix} 0 & z & x \\ -z & 0 & y \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad X \times Y \quad [\Omega_X, \Omega_Y] = \Omega_{X\times Y}$

isomorphisme d'algèbres de Lie $(\mathbb{R}^3, \times) \mapsto (O(3), [\,;\,])$

**Exemple 3** : groupe symplectique

Soit $V$ un espace vectoriel de dim $2n$ et $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique et non dégénérée
$(\omega(x,y) = -\omega(y,x))$ $\quad$ $(\forall x \in V \;\; \omega(x,y) = 0 \; \forall y \Rightarrow x = 0)$

$\omega$ est appelée forme symplectique.

**Proposition** : $\exists$ une base $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ tq
$\omega(e_i, e_j) = 0 \quad \omega(e_i, f_j) = 0 \quad \omega(e_i, f_i) = \underline{1}$

La matrice de $\omega$ dans cette base on obtient

$$\Omega = \begin{array}{c|c|c} & e_1 \cdots e_n & f_1 \cdots f_n \\ \hline e_1 \cdots e_n & 0 & -I_n \\ \hline f_1 \cdots f_n & I_n & 0 \end{array}$$

$\omega(f_i, e_j) = -\omega(e_j, f_i)$
$= -\delta_{ij}$

On définit $Sp(\omega) = \{ A \in GL(V)$ tq $\omega(Ax, Ay) = \omega(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \}$

Dans la base adaptée $\quad Sp(2n) = \{ A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ tq ${}^tA \Omega A = \Omega \}$

On veut prouver ici que $Sp(2n)$ est un groupe de Lie et calculer son algèbre de Lie. On applique la méthode précédente.

On définit $\quad f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow AS_n(\mathbb{R})$ de sorte que
$\qquad A \longmapsto {}^tA \Omega A \qquad Sp(2n) = f^{-1}(\{\Omega\})$

Comme ${}^t\Omega = -\Omega \qquad {}^tf(A) = {}^t({}^tA \Omega A) = {}^tA\, {}^t\Omega A = -{}^tA \Omega A$
$= -f(A)$

Il suffit de prouver que $f$ est une submersion en tout $A \in Sp(2n)$.
[exercice : le vérifier].

Calculons $\quad sp(2n) = \operatorname{Ker} D_1 f = \{ H$ tq $\Omega H + {}^tH \Omega = 0 \}$

$D_1 f(H) = \Omega H + {}^tH \Omega$

Quelle est la dimension de $sp(2n)$ ?

<u>deux méthodes</u> : $\quad H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ $\quad \Omega H = \begin{pmatrix}-C & -D\\ A & B\end{pmatrix} \qquad {}^tH\,\Omega = \begin{pmatrix}{}^tC & -{}^tA\\ {}^tD & -{}^tB\end{pmatrix}$

$H \in sp(2n) \iff {}^tC - C = 0 \quad -D\ {}^tA = 0, \quad A + {}^tD = 0, \quad B - {}^tB = 0$

$\iff$ $C$ sym. et $D = -{}^tA$ $\quad B$ sym.

$$\dim \quad \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n^2 + n$$
$$= 2n^2 + n$$
$$= n(2n+1)$$

Autre méthode : $D_1 f$ est surjective

$\dim \operatorname{Ker} D_1 f = \dim M_{2n}(\mathbb{R}) - \dim AS_{2n}(\mathbb{R})$ Th. du rang.

$= \dim S_{2n}(\mathbb{R}) = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$. ☒

La prochaine fois : exponentielle : relation entre algèbre de Lie

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[l, bend left, "\exp"] \end{tikzcd}$$