Chapitre 2 L'application exponentielle

But : définir une application $\exp : \mathfrak{g} \to G$ qui généralise l'exponentielle de matrices.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ est C^∞

peut être définie de plusieurs façons

① c'est l'unique fonction vérifiant $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

② c'est l'unique morphisme C^∞ $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*,\times)$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

Ceci se généralise aux matrices

$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$

c'est la solution d'une équation différentielle

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\qquad X : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$

$X(0) = id$

$X'(t) = AX(t)$

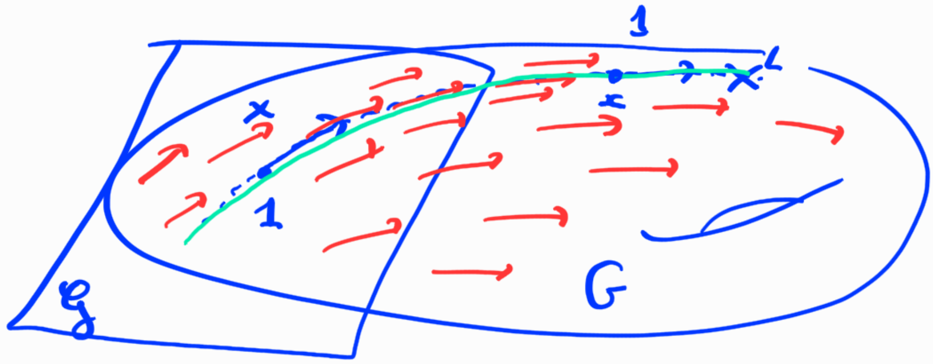
L'unique solution est $X(t) = \exp(tA)$.

Pour construire cette solution on peut invoquer

→ le théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité des sols d'une equa diff)

→ Série entière $\qquad \exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

On voudrait définir l'exponentielle dans n'importe quel groupe de Lie. La seule méthode valide est celle des équations différentielles



à $X \in \mathfrak{g} = T_1 G$ on va associer un champ de vecteurs X^L

$$L(x) : \begin{array}{l} G \to G \\ y \to xy \end{array} \qquad D_1 L(x) : \begin{array}{l} T_1 G = \mathfrak{g} \longrightarrow T_x G \\ X \longrightarrow X^L(x) \end{array}$$

X^L est appelé le champ de vect. inv. à gauche associé à X

L'exponentielle se construit en intégrant ce champ de vecteurs

i.e en trouvant un chemin $c : \mathbb{R} \to G$ tq $c(0) = 1$ $c'(0) = X$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $c'(t) = X^L(c(t))$

$$\exp(X) = c(1)$$

<u>I</u> Champs de vecteurs invariants à gauche et à droite.

$\forall x \in G$ $\quad L(x) : \begin{array}{l} G \to G \\ y \to xy \end{array} \qquad R(x) : \begin{array}{l} G \to G \\ y \to yx \end{array}$

L = left $\qquad$ R = right

On vérifie
$$L(x)L(y) = L(xy)$$
$$R(x)R(y) = R(yx) \quad ⚠$$
$$L(x)R(y) = R(y)L(x)$$

La multiplication à gauche commute à la multiplication à droite.

<u>Rappel</u> : Un champ de vecteurs sur une variété M est la donnée en tout point $x \in M$ d'un élément $X(x) \in T_x M$ qui dépend de façon C^∞ de $x \in M$.

le point de vue fonctionnel est très bien adapté

Un champ de vecteur X est la donnée d'une application linéaire

$$\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$
$$f \to X\cdot f$$

qui vérifie la formule de Leibnitz $X\cdot(fg) = fX\cdot g + gX\cdot f$

[un vecteur tangent $X \in T_xM$ est la même chose qu'une application linéaire

$$f \mapsto X\cdot f(x)$$
$$\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

vérifiant $X\cdot(fg)(x) = f(x)(X\cdot g)(x) + g(x)(X\cdot f)(x)$

Si on se donne $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ $\mathcal{C}^\infty$ avec $c(0) = x$

Elle définit un vecteur tangent "$X = c'(0)$"

on lui associe l'opérateur $X\cdot f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t))$

$f\circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$]

Observation : Si on se donne X, Y deux champs de vecteurs

ie $X, Y : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ sont des "dérivations"

ie. satisfont Leibnitz

alors $X\circ Y$ n'est pas une dérivation

par contre $X\circ Y - Y\circ X$ oui.

c'est à dire $X\circ Y - Y\circ X$ est un champ de vecteur noté $[X,Y]$

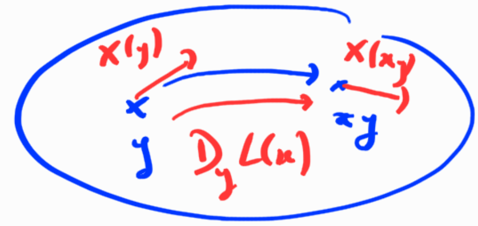
"le crochet mesure la commutation des flots"

Rque : L'ensemble des champs de vecteurs sur une variété est muni d'une structure d'algèbre de Lie ie satisfait antisymétrie + Jacobi. ⚠ c'est de dimension infinie.

En fait c'est l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{Diff}(M) = \{f : M \to M$ $\mathcal{C}^\infty$ inversibles$\}$

Déf : Un champ de vecteur X sur G est dit invariant à gauche si $\forall x, y \in G$ $\quad D_y L(x)\, X(y) = X(xy)$

$L(x)$



De même à droite $\quad D_y R(x)\, X(y) = X(yx) = X(R(x)y)$

On observe que un champ de vecteur invariant à gauche est déterminé par sa valeur en 1

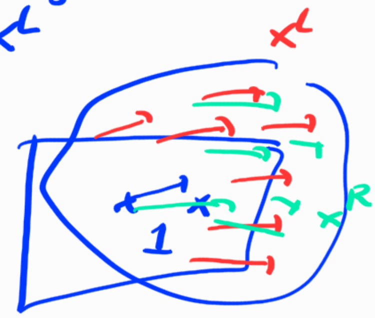
En effet $\quad X(x) = D_1 L(x)\; X(1)$

Réciproquement, si on prend $X \in T_1 G = \mathfrak{g}$ on pose $X(x) = D_1 L(x)\, X$; cela définit un champ de vecteurs invariant à gauche (exercice : le démontrer avec la règle de la chaîne)

L'application $\{\text{champ de vects inv. à gauche}\} \longrightarrow \mathfrak{g}$

$$X \longmapsto X(1)$$

est un isomorphisme. Le champ de vect inv à gauche qui prend la valeur X en 1 est noté X^L

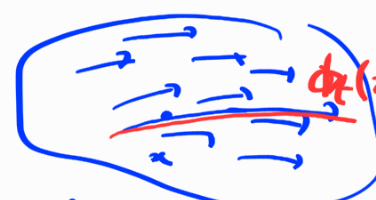


De même $\quad X^R(x) = D_1 R(x)(X)$

définit l'unique champ de vect. inv. à droite tq $X^R(1) = X$.

<u>Rappels de géométrie diff :</u> un champ de vect X sur Ω engendre un flot $\phi_t = \phi_t^X : \Omega \to \Omega$ définie par

$$\begin{cases} \phi_0(x) = x & \forall\, x \in \Omega \\ \text{et } \dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)) \end{cases}$$



Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit qu'un tel flot existe pour t assez petit et il est unique.

Lemme : Soit X un champ de vect. sur G invariant à gauche et ϕ_t son flot alors

$$\phi_t(x) = R(\phi_t(1)) = x\,\phi_t(1).$$

[Si X est inv. à droite $\phi_t(x) = \phi_t(1)x$]

Démo : il suffit de vérifier que les deux objets satisfont la même équation différentielle

$$\phi_0(1) = 1 \quad \text{donc} \quad x\phi_0(1) = x$$

$$\frac{d}{dt}\left(x\,\phi_t(1)\right) = \frac{d}{dt} L(x)(\phi_t(1)) = D_{\phi_t(1)}L(x)\,\frac{d}{dt}\phi_t(1)$$

$$= D_{\phi_t(1)}L(x)\; X(\phi_t(1))$$

$$= X(x\,\phi_t(1)) \qquad \text{car } X \text{ est inv. à gauche}$$

donc $t \mapsto x\phi_t(1)$ satisfait l'équation diff du flot

donc par unicité $\phi_t(x) = x\,\phi_t(1)$.

Théorème : Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

$\forall X \in \mathfrak{g}$ $\exists!$ $h : \mathbb{R} \to G$ morphisme de groupes de Lie tq $h'(0) = X$ [sous-groupe à 1 paramètre]

On a $h(t) = \phi_t^{X^L}(1) = \phi_t^{X^R}(1)$

et ces deux flots sont définis sur $\mathbb{R}$.

Démo : on se donne $X \in \mathfrak{g}$ et X^L le champ de vect. inv. à gauche associé et ϕ_t son flot.

On rappelle que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ partout où c'est défini

Par existence locale, $\phi_t(1)$ est défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

On rappelle que

$$\phi_t(x) = x\,\phi_t(1)$$

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$$

$$= \phi_s(x)\,\phi_t(1) \quad (*)$$

ceci montre que si le flot est défini jusqu'au temps s alors on peut le définir par $(*)$ jusqu'au temps $s+\varepsilon$

Ceci montre que le flot est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Et en plus en posant $h(t) = \phi_t(1)$ on obtient bien un sous-groupe à 1 paramètre $h(t+s) = \phi_{t+s}(1) = \phi_t(\phi_s(1))$

$$= \phi_s(1)\,\phi_t(1) = h(s)h(t)$$

Réciproquement, si on a un morphisme C^∞ $h : \mathbb{R} \to G$, $h'(0) = X$

ie $h(t+s) = h(t)h(s)$

On calcule
$$h'(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} h(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} h(t)h(s)$$
$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(h(t))\big(h(s)\big) = D_{h(0)}L(h(t))\; h'(0)$$
$$= D_1\, L(h(t))\,(X) = X^L(h(t))$$

car X^L est inv. à gauche.

donc $h(t)$ est le flot de X^L vérifiant $h(0)=1$ $h'(0)=X$

donc $h(t) = \phi_t(1)$.

Rque : l'existence du flot d'un champ de vect sur une variété M est locale en temps et en espace

$\forall K \subset M \quad \exists\, \varepsilon > 0$ tq $\phi_t : K \to M$ soit bien défini sur K.

Dans le cas précédent on prend K un voisinage compact de 1.

Définition : Pour $X \in \mathfrak{g}$ on pose $\exp(X) = h(1)$ où $h : \mathbb{R} \to G$ est l'unique sous-gp à 1 paramètre tq $h'(0) = X$.

⚠ en général si G n'est pas commutatif $X^L \neq X^R$ pourtant $\phi_t^{X^L}(1) = \phi_t^{X^R}(1) = \exp(X)$.

A cause des théorèmes de dépendance des solutions des équations différentielles par rapport aux paramètres, on a $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est C^∞.

[cf Appendice de Lie Groups Duistermaat-Kolk]

Calculons la dérivée de exp en 0 :

Fixons $X \in \mathfrak{g}$ et $s > 0$ l'app. $t \to \exp(tsX)$ est encore un morphisme de groupe dont la dérivée en 0 est sX donc $\exp(sX) = h(s)$ où $h(t) = \exp(tX)$.

En particulier
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = D_0 \exp(X)$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(t) = h'(0) = X$$

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$
$$0 \longmapsto 1$$

$D_0 \exp : \mathfrak{g} \longrightarrow T_1 G = \mathfrak{g}$ est l'identité.

D'après le théorème d'inversion locale $\exists\, U$ voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ et V un voisinage de 1 dans G tq $\exp|_U : U \to V$ soit un difféomorphisme

son inverse est noté $\log : \underset{\hat{G}}{V} \longrightarrow \underset{\hat{\mathfrak{g}}}{U}$

le couple $(V, \log)$ est appelé carte logarithmique

Une conséquence importante sera que G est presque déterminé comme groupe par son algèbre de Lie.

II Exponentielle des matrices

Soit V un espace vect de dim finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $|\cdot|$. On définit sur $\operatorname{End} V$ la norme associée
$$\|A\| = \sup_{|v| \leq 1} |Av|$$

Elle vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Pour $A \in \mathrm{End}\,V$ on pose $\exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Cette série est normalement convergente sur tout compact pour la norme considérée. Les théorèmes de dérivation s'appliquent.

Elle vérifie $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si A et B commutent

en particulier tA et sA commutent $t, s \in \mathbb{R}$

donc $h(t) = \exp(tA)$ c'est un sous groupe à 1 paramètre

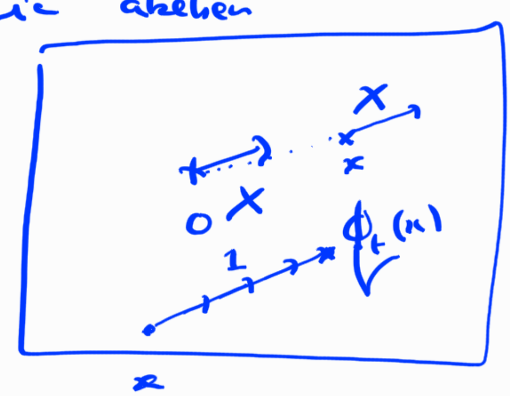
on peut mq h est une fonction C^∞. $h'(0) = A$

<u>Conclusion</u>: $GL(V)$ gp de Lie d'algèbre de Lie $\mathrm{End}(V)$

et $\exp : \mathrm{End}(V) \longrightarrow GL(V)$ coïncide avec l'exponentielle de matrices.

<u>Exemples</u>: ① Soit $(V, +)$ un groupe de Lie abélien

$X^L \doteq X^R$ est le champ de vecteur constant égal à X.



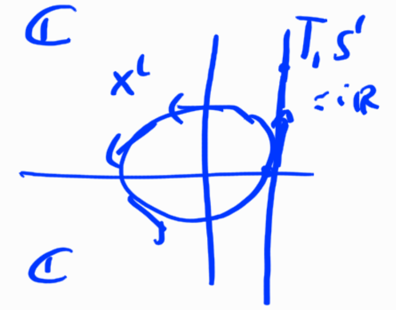
On calcule $\phi_t^{X^L}(x) = x + tX$

$\left(\phi_0(x) = x\right)$

donc $\exp(X) = X$ $\qquad \exp : V \longrightarrow V$ id.

② dans le cas du cercle $\qquad S^1 \subset \mathbb{C}$

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$\theta \longmapsto \exp(i\theta)$$



(3) Si on a $G \subset GL(V)$ on verra que $\exp|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to G$ est la restriction à $\mathfrak{g}$ de

$\exp : \operatorname{End}(V) \to GL(V)$

<u>ex</u> : $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ \operatorname{Tr} A = 0 \} \longrightarrow SL(2,\mathbb{R})$

$A \longmapsto \exp(A)$

où $SL_2(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A = 1 \}$.

En général $f(t) = \det(\exp(tA)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupe donc de la forme $\exp(\lambda t)$ pour un certain λ. Avec $\lambda = f'(0)$.

On calcule $f'(0) = D_1 \det (\underbrace{D_0 \exp(tA)}_{A})$

$= D_1 \det(A) = \operatorname{Tr} A$.

$\Rightarrow \boxed{\det(\exp A) = \exp(\operatorname{Tr} A)}$

<u>Question</u> : est-ce que $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme global ?

C'est un des exemples les + simples où exp n'est pas surjective.

<u>Exercice</u> : Mq $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas de la forme $\exp(A)$ avec $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.