La fois précédente on a défini la fonction exponentielle

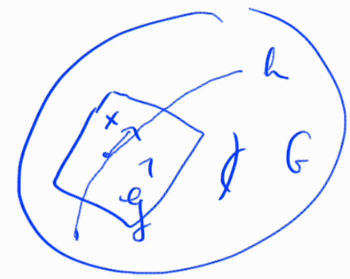
$\exp : \mathfrak{g} \to G$ $\quad \mathcal{C}^\infty$

<u>Théorème</u> : $\forall\, X \in \mathfrak{g} = T_1 G$ $\quad \exists!\ h : \mathbb{R} \to G$ morphisme de groupes de Lie [h est $\mathcal{C}^\infty$ et $h(t+s) = h(t)h(s)\ \forall t,s \in \mathbb{R}$]

$(\Rightarrow h(0) = 1)$

tq $\quad h'(0) = X$

On pose alors $\exp(X) = h(1)$.



<u>exemples</u> : $G = GL(V) \qquad \mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$

$$\exp : \mathrm{End}(V) \to GL(V)$$
$$A \mapsto \exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n.$$

Regardons précisément le cas de $SO(3) = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \ \begin{matrix} {}^tA A = I_3 \\ \det A = 1 \end{matrix} \right\}$

C'est le groupe des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$: tout élément de $SO(3)$ différent de 1 représente une rotation autour d'un axe $D \subset \mathbb{R}^3$ avec un angle θ. L'axe D est l'espace propre de A pour la valeur propre 1. L'angle se retrouve au signe près par la formule $\mathrm{Tr}\, A = 1 + 2\cos\theta$

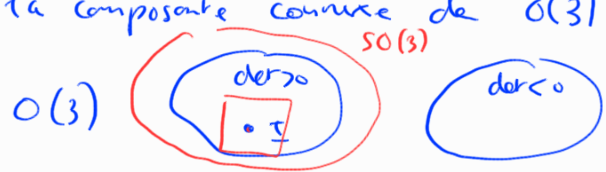
En effet,

la matrice de A dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Rappelons que $\quad so(3) = \{ X \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tX + X = 0 \text{ et } \mathrm{Tr}\, X = 0 \}$

$\rightarrow$ la première équation implique la deuxième donc $so(3) = o(3)$

En effet, $SO(3)$ est la composante connexe de $O(3)$ qui contient 1

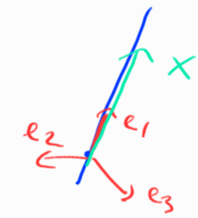


$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} so(3) \simeq \mathbb{R}^3 \\ A_x \longrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un calcul direct montre que $A_x Y = X \times Y$ "produit vectoriel".

Si on prend une base e_1, e_2, e_3 orthonormée telle que $X = |X| e_1$ alors dans cette base A a pour matrice

$$\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|X| \\ 0 & |X| & 0 \end{pmatrix}$$



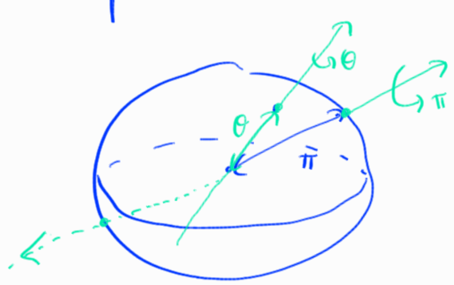
En particulier les valeurs propres de A sont $i|X|$ et $-i|X|$

Donc $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(|X|) & -\sin(|X|) \\ 0 & \sin(|X|) & \cos(|X|) \end{pmatrix}$ = la rotation d'axe X et d'angle $|X|$.

Question : est-ce que $\exp : so(3) \longrightarrow SO(3)$ est-elle un difféomorphisme

si ce n'est pas le cas quel est le domaine maximal dans $so(3)$ pour lequel ça l'est ?

$$\exp : B(0,\pi) \longrightarrow SO(3) \quad \text{est surjective.}$$



Topologiquement
$SO(3) \simeq B(0,\pi) /_{\sim}$
tout élément $x \in S(0,\pi)$ vérifie $x \sim -x$

Ceci est l'espace projectif de dim 3 $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

III La dérivée de l'exponentielle

Motivation : déterminer en quel point $X \in \mathfrak{g}$ la différentielle $D_X \exp$ est inversible ? On a besoin d'une formule explicite pour cette différentielle

Lemme : Soit G et H deux groupes de Lie d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ et $\Phi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie alors on pose $\varphi = D_1 \Phi$, $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$

1. $\Phi(\exp(X)) = \exp(\varphi(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
2. $Ad(\exp(X)) = \exp(ad(X))$
3. $x \exp(X) x^{-1} = \exp(Ad(x)(X)) \quad \forall x \in G \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

démo : rappel $h(t) = \exp(tX)$ est l'unique sous-groupe à un paramètre dans G vérifiant $h'(0) = X$.

① On $\Phi(h(t)) : \mathbb{R} \to H$ c'est aussi un sous-groupe à un paramètre dans H et $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(h(t)) = D_1\Phi(h'(0)) = \varphi(X)$

Par unicité de l'exp (dans H) on a bien $\phi(h(t)) = \exp(t\varphi(X))$

$\phi(\exp(tX)) = \exp(t\varphi(X))$

or pour $t=1$ et ① est prouvé.

② $$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto D_1(Ad(x)) \end{aligned}$$ est un morphisme de groupes de Lie

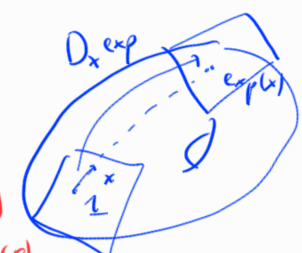
et $$\begin{aligned} D_1 Ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}) \\ X &\longrightarrow ad(X) \end{aligned}$$ [c'est la définition)

D'après ① $Ad(\exp(X)) = \exp(ad(X))$.

③ $Ad(x) : G \to G$ conjugaison par x : c'est un morph. de groupes de Lie et $D_1 Ad(x) = Ad(x)$

donc d'après ① $x\exp(X)x = \exp(Ad(x)(X))$ $\forall x \in G$ $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Théorème $\forall X \in \mathfrak{g}$ $D_X\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\exp(X)}G$



$$D_X\exp = D_1 R(\exp X) \circ \int_0^1 e^{s\,ad(X)}\,ds$$
$$= D_1 L(\exp X) \circ \int_0^1 e^{-s\,ad(X)}\,ds$$

$ad\,X \in End(\mathfrak{g})$

$e^{s\,ad(X)} \in End(\mathfrak{g})$

$\int_0^1 e^{s\,ad(X)} \in End(\mathfrak{g})$

Première démo dans le cas où $G = GL(V)$

On veut déterminer $D_X\exp(H) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \exp(X+uH)$

$$D_1L(\exp X)^{-1}\, D_X\exp(X) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \exp(-X)\exp(X+uH)$$

Posons $g(t) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} e^{-tX}e^{t(X+uH)}$ $\qquad g(0) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} e^0e^0 = 0$

Calculons $g'(t) = \frac{d}{dt}\frac{d}{du}\Big|_{u=0} e^{-tX}e^{t(X+uH)} = \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left[-Xe^{-tX}e^{t(X+uH)} + e^{-tX}(X+uH)e^{t(X+uH)}\right]$

$$= \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(e^{-tX}uHe^{t(X+uH)}\right)$$

$[\; Xe^{-tX} = e^{-tX}X$

$$= e^{-tX} H e^{tX} = Ad(e^{-tX})(H) \underset{②}{=} e^{-t\,ad(X)} H.$$

On réécrit $g'(t) = e^{-t\,ad(X)} H \qquad g(0)=0$

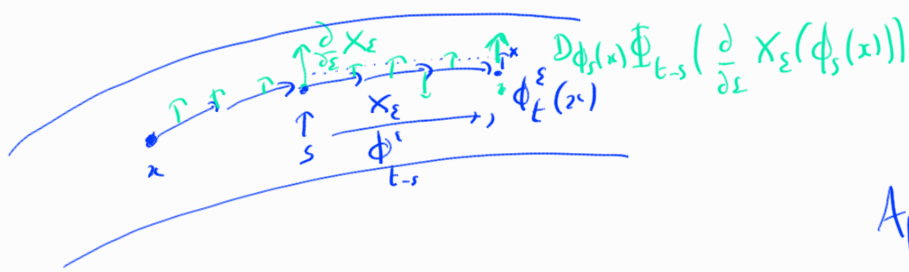
donc $$g(1) = \int_0^1 e^{-s\,ad(X)} H = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} e^{-X} e^{X+uH}$$
$$= D_1 L(\exp X)^{-1} D_X \exp(H).$$ cqfd. (par la 2ème équation)

deuxième démo : on va admettre une formule de géométrie différentielle

Supposons qu'on a un champ de vecteurs X_ε qui dépend d'un paramètre ε

Comment calcule-t-on $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi_t^\varepsilon(x)$ où ϕ_t^ε est le flot de X_ε au temps t.

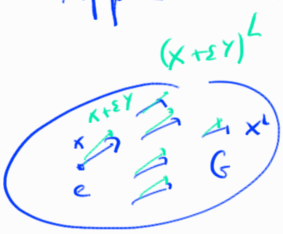
Formule : $$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi_t^\varepsilon(x) = \int_0^t D_{\phi_s(x)}\Phi_{t-s}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} X_\varepsilon(\Phi_s(x))\right) ds \in T_{\phi_t^\varepsilon(x)} M$$



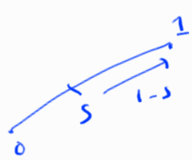
Appendice Duistermaat-Kolk.

Application au théorème $\quad \phi_s^\varepsilon = R(\exp(s(X+\varepsilon Y)))$

c'est le flot du champ de vecteurs $(X+\varepsilon Y)^L$ (invariant à gauche)



$$D_Y \exp(X) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \exp(X+\varepsilon Y) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \underbrace{R(\exp(X+\varepsilon Y))}_{\phi_\varepsilon}(1).$$



$$= \int_0^1 D_{\exp(sX)} R\big(\underbrace{\exp((1-s)X)}_{\exp X\ \exp -sX}\big)\ Y^L(\exp(sX))\, ds$$ en appliquant la formule générale

$\downarrow Y^L$ est inv. à gauche

$$= \int_0^1 D_1 R(\exp X)\ D_{\exp(sX)} R(\exp(-sX))\ D_1 L(\exp(sX))(Y)\, ds$$

$$= D_1 R(\exp(X)) \int_0^1 D_1\left[L(\exp(sX))\ R(\exp(-sX))\right](Y)\, ds$$

$$= D_1 R(\exp(X)) \int_0^1 D_1\ Ad(\exp(sX))(Y)\, ds$$

Formule ②

$$= D_1 R(\exp(X)) \int_0^1 Ad(e^{sX})(Y)\, ds$$

$$= D_1 R(\exp(X)) \int_0^1 e^{s\,ad(X)}(Y)\, ds.$$ cqfd.

idem pour l'autre formule.

<u>Notation</u> : Si $A \in \mathrm{End}(V)$ $f(A) = \int_0^1 e^{sA}\, ds = \int_0^1 \left(\sum_{k\geq 0} s^k \frac{A^k}{k!} \right) ds$

$$f(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{(k+1)!}$$

si A est inversible

$$f(A) = A^{-1}(e^A - 1)$$

On utilise cette expression même si A n'est pas inversible en se ramenant à la série

On écrit

$$\boxed{D_X \exp(Y) = D_1 R(\exp X) \frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X}}$$

⚠ dans cette écriture $\mathrm{ad}\, X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Y \mapsto [X, Y]$ n'est jamais inversible car $\mathrm{ad}\, X(X) = [X, X] = 0$

<u>Corollaire</u> : les points singuliers de $\exp : \mathfrak{g} \to G$ (i.e $X \in \mathfrak{g}$ tq $D_X \exp$ n'est pas inversible)

sont exactement $\left\{ X \text{ tq } \frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X} \text{ n'est pas inversible} \right\}$

or $Sp\left(\frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X} \right) = \left\{ \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \text{ où } \lambda \in Sp(\mathrm{ad} X) \right\}$.

$\frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$ s'annule précisément si $\lambda \in 2i\pi \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

<u>Reformulation</u> : X est un point singulier de exp ssi $\mathrm{ad} X$ admet une valeur propre dans $2i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

<u>Exemples</u> 1) si G est un groupe abélien alors $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ $[X, Y] = 0$

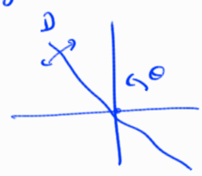
$\Rightarrow \mathrm{ad}(X) = 0$ donc $\frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X} = 1$ est toujours inversible

$\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféo local.

<u>Question</u> : est-ce un difféomorphisme global ?

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto e^x$ n'est pas surjectif
- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ n'est pas injectif.
- $\exp : \underset{so(2)}{\mathbb{R}} \longrightarrow O(2)$

$\mathrm{im}(\exp) = SO(2) = S^1$



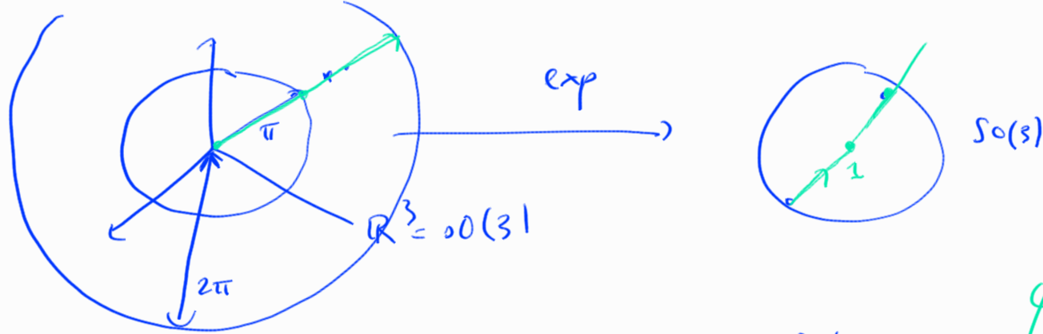
2) Reprenons $\exp : so(3) \longrightarrow SO(3)$

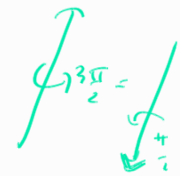
X est un point critique pour exp ssi $\mathrm{ad}\, X$ a pour valeur propre $\underset{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}{2i\pi k}$

$so(3) \simeq \mathbb{R}^3$, $A_X \leftrightarrow X$ $\quad \mathrm{ad}\, X : so(3) \longrightarrow so(3)$, $Y \longmapsto [X, Y]$

les valeurs propres de $\mathrm{ad}\, X$ sont $0, \; i|X|, \; -i|X|$

X n'est pas régulier ssi $|X| = 2k\pi$ avec $k \neq 0$.





exp est un difféo local sur $B(0, 2\pi)$!
global sur $B(0, \pi)$

<u>explication</u> : il y a un groupe noté $SU(2)$ avec une morphisme

$$\begin{array}{ccc} p : SU(2) & \longrightarrow & SO(3) \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ su(2) & \longrightarrow & so(3) \end{array}$$

et $\exp|_{B(0,2\pi)} : su(2) \to SU(2)$ est un difféo global

$\ker p = \{\pm 1\}$.

(3) Notons $N = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A_{ii} = 1 \text{ et } A_{ij} = 0 \text{ si } i > j \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ "les matrices unipotentes"

C'est bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$: c'est aussi une sous-variété car N est un sous-espace affine $N = \{ I + A \text{ avec } A \in h \}$

$h = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_n(\mathbb{R})$
sous-espace vectoriel

En conséquence N est un groupe de Lie et son algèbre de Lie est h.

Regardons
$$\exp : h \longrightarrow N$$
$$H \longmapsto \exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{H^k}{k!}$$

car H est nilpotente et donc $H^n = 0$!

On peut aussi écrire
$$\log : N \longrightarrow h$$
$$1 + H \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} H^k$$

on définit comme ceci l'inverse de l'application exp.

donc $\exp : h \longrightarrow N$ est un difféomorphisme global.

$h \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $N \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Vérifions le avec la formule de $D\exp$:

H est un point critique de exp ssi $ad(H)$ a une valeur propre de la forme $2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathrm{ad}\, H : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$

$K \mapsto [H, K] = HK - KH.$

Explication.

$$(\mathrm{ad}\, H)^2(K) = H(HK - KH) - (HK - KH)H$$

$$= H^2K - 2HKH + KH^2$$

etc...

$$(\mathrm{ad}\, H)^{2n}(K) = \sum_{p+q=2n} \cdot\; H^p K H^q$$

alors $p \geq n$ ou $q \geq n$ or $H^n = 0$

$= 0$

$\Rightarrow$ ad H est nilpotent. ses valeurs propres sont nulles.

La semaine prochaine $\log(\exp(X)\exp(Y))$ = formule explicite $X, Y, [\cdot,\cdot]$

Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin.