La dernière fois on a calculé la dérivée de

$\exp : \mathfrak{g} \to G$
$$\begin{cases} D_X \exp = D_1 R(\exp X) \circ \int_0^1 e^{s\,\mathrm{ad} X} ds \\ D_X \exp = D_1 L(\exp(X)) \circ \int_0^1 e^{-s\,\mathrm{ad} X} ds \end{cases}$$

$\mathrm{ad} X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ $\qquad \int_0^1 e^{s\,\mathrm{ad} X} ds = f(\mathrm{ad} X)$

avec $f(A) = \int_0^1 e^{sA} ds = \dfrac{e^A - 1}{A}$ " série entière "

IV La formule de Dynkin (ou Baker-Campbell-Hausdorff)

Rappel : $\exp : \mathfrak{g} \to G$ $\qquad D_0 \exp : \mathfrak{g} \to T_1 G = \mathfrak{g}$
$$X \mapsto X$$

Le théorème d'inversion locale dit que $\exists\, U \subset \mathfrak{g}$ ouvert contenant 0 et $V \subset G$ un ouvert contenant 1 tq $\exp : U \to V$ soit un difféomorphisme

On obtient "une carte" privilégiée au voisinage 1.

On note $m : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ est une fonction C^∞ (donc continue)

$m(1,1) = 1$ donc $\exists$ ouvert de $G \times G$ contenant 1×1 tq son image par m soit envoyée dans V. De plus la topologie qu'on met sur $G \times G$ est la topologie produit

Ceci implique qu'il existe un ouvert $V' \subset V$ tq $\forall x, y \in V'$ $m(x,y) = x \cdot y \in V$

On peut donc écrire de façon unique
$$\exp(X) \exp(Y) = \exp(\mu(X,Y))$$
pour tout $X, Y \in U' = \exp^{-1}(V')$ avec $\mu : U' \times U' \to U$
$\mu(X,Y) \in U$ qui est C^∞ est définie par cette équation

On écrira plus simplement

$$\boxed{\mu(X,Y) = \log(\exp(X)\exp(Y)).}$$

La formule de Dynkin consiste à donner une formule explicite pour μ.

On résout le système différentiel suivant : $X, Y \in \mathfrak{g}$ fixés

(E) $\quad Z(0) = Y \quad$ et $\quad \dfrac{d}{dt} Z(t) = \underbrace{\dfrac{\operatorname{ad} Z(t)}{e^{\operatorname{ad} Z(t)} - 1}}_{\text{inverse de ce qui apparaît dans } D_x \exp} (X)$

De plus $\dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \qquad B_k$: $k$ième nombre de Bernoulli

On note $W = \{(X,Y) \in \mathfrak{g}$ tq le système (E) admette une solution pour $t \in [0,1]\}$

<u>Thm</u> : W est un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tq
l'application $\mu : (X,Y) \longmapsto Z(1)$ est analytique (développable en série entière)
et vérifie $\quad \exp(\mu(X,Y)) = \exp(X)\exp(Y)$

<u>démo</u> : W est un voisinage de $(0,0)$ + problèmes d'analyticité
sont des conséquences de théorèmes généraux sur les équations différentielles
" les solutions d'équations diff analytiques sont analytiques "

Supposons que Z vérifie l'équation diff (E)

$$\frac{d}{dt} \exp(Z(t)) \underset{\substack{\text{formule pour la} \\ \text{dérivée de l'exp}}}{=} D_{Z(t)} \exp \cdot Z'(t) = D_1 R[\exp Z(t)] \, \frac{e^{\operatorname{ad} Z(t)} - 1}{\operatorname{ad} Z(t)} \, Z'(t)$$

or $\quad Z'(t) = \dfrac{\operatorname{ad} Z(t)}{e^{\operatorname{ad} Z(t)} - 1} (X)$

donc $\quad \dfrac{d}{dt} \exp Z(t) = D_1 R(\exp Z(t))(X) = X^R(\exp(Z(t)))$

$\exp Z(t)$ suit le flot du champ de vecteurs X^R.

Or le flot de X^R pendant un temps t est $L(\exp(tX))$

donc $\quad \exp Z(t) = \exp(tX)\exp(Z(0)) = \exp(tX)\exp(Y)$.

donc en posant $t = 1$: $\quad \boxed{\exp(Z(1)) = \exp(X)\exp(Y)}$

Le but est maintenant d'intégrer cette équation diff sous forme de série entière :

$$\exp(Z(t)) = \exp(tX)\exp(Y)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. On a prouvé cette équation $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Le morphisme $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

$$X \longmapsto \mathrm{ad}X$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\mathrm{ad}Z(t)} = e^{t\,\mathrm{ad}X} e^{\mathrm{ad}Y}} \quad (*)$$

On écrit pour $A \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ assez petite

$$A = \log(1 + \underbrace{e^A - 1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(e^A - 1)^{k+1}$$

$$\boxed{\frac{A}{e^A - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(e^A-1)^k}$$

$$(E) : Z'(t) = \frac{\mathrm{ad}Z(t)}{e^{\mathrm{ad}Z(t)} - 1}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\Big(\underset{(*)}{e^{\mathrm{ad}Z(t)}} - 1\Big)^k(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(e^{t\,\mathrm{ad}X} e^{\mathrm{ad}Y} - 1\right)^k(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\Big(\sum_{l+m>0} t^l \frac{\mathrm{ad}X^l}{l!}\frac{\mathrm{ad}Y^m}{m!}\Big)^k(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\substack{l_1+m_1>0 \\ l_2+m_2>0 \\ \vdots \\ l_k+m_k>0}} t^{l_1+\dots+l_k} \frac{\mathrm{ad}X^{l_1}\mathrm{ad}Y^{m_1}\cdots\mathrm{ad}X^{l_k}\mathrm{ad}Y^{m_k}}{l_1!\,m_1!\cdots l_k!\,m_k!}(X)$$

On résout directement cette équation diff. en intégrant terme à terme

$$Z(1) = X + Y + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\substack{l_1+m_1>0 \\ l_k+m_k>0}} \frac{1}{l_1+\dots+l_k+1} \frac{\mathrm{ad}X^{l_1}\mathrm{ad}Y^{m_1}\cdots\mathrm{ad}X^{l_k}\mathrm{ad}Y^{m_k}}{l_1!\,m_1!\cdots l_k!\,m_k!}(X)$$

$\mu(X,Y) =$

$$= \overbrace{X+Y}^{\text{ordre } 1} + \overbrace{\frac{1}{2}[X,Y]}^{2} + \overbrace{\frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]]}^{3} + \overbrace{\frac{1}{24}[Y,[X,[Y,X]]]}^{4}$$

à apprendre $\qquad$ culture $\qquad + O(\|(X,Y)\|^5)$

Application : $\mu(X,Y)$ est une fonction analytique de X et Y.

$\Rightarrow$ tout groupe de Lie a un atlas analytique de sorte que G est un "groupe de Lie analytique"

Thm solution du $5^{\text{ème}}$ problème de Hilbert

on pourrait définir un groupe de Lie G variété topologique tq m et i soient continus.

En fait un tel groupe est un groupe de Lie analytique

Thm : Soit G un groupe de Lie alors il existe un atlas compatible qui soit analytique et tel que m et i soient analytiques dans cet atlas.

démo : On choisit $0 \in U \subset \mathfrak{g}$ et $1 \in V \subset G$ deux ouverts tq $\exp : U \to V$ soit un difféomorphisme

on écrit $\exp(\mu(X,Y)) = \exp X \exp Y$ là où c'est défini

On va choisir $U_0 \subset U$ tq
$$\mu(X,-Y) \in U \quad \forall X,Y \in U_0$$
$$\mu(\mu(X,-Y),Z) \in U \quad \forall X,Y,Z \in U_0$$

$\forall x \in G$ on pose $V_0^x = L(x)\exp(U_0) = \{x\exp(X),\ X \in U_0\}$.

Il s'agit bien d'un recouvrement ouvert de G

et on note
$$K^x : V_0^x \longrightarrow U_0 \qquad \text{sont des difféomorphismes}$$
$$y \longmapsto \log(x^{-1}y)$$
$$x\exp(X) \longmapsto X$$

Clair : (V_0^x, K^x) forme un atlas de G compatible avec la structure de variété de G.

On veut voir que ces cartes sont analytiques et que m et i sont analytiques

On prend $x,y \in G$ tq $V_0^x \cap V_0^y \neq \emptyset$

donc $\exists X_0, Y_0 \in U_0$ tq $x\exp(X_0) = y\exp(Y_0)$

$$y^{-1}x = \exp(Y_0)\exp(-X_0)$$

$$Y = K^y \circ K^{x^{-1}}(X) \iff x\exp(X) = y\exp(Y)$$
$$\iff \exp(Y) = y^{-1}x\exp(X) = \exp(Y_0)\exp(-X_0)\exp(X)$$
$$= \exp(\mu(Y_0,-X_0))\exp(X)$$
$$= \exp(\mu(\mu(Y_0,-X_0),X))$$

$\Rightarrow \quad Y = \mu(\mu(Y_0, -X_0), X)$

D'après la formule de Dynkin, μ est analytique donc Y est une fonction analytique de X donc $K^{y} \circ K^{x^{-1}}$ est analytique.

Regardons $(x,y) \mapsto x y^{-1}$ et montrons qu'elle est analytique.

dans les cartes $V_0^x \times V_0^y$

$$x\exp(X)\left[y\exp(Y)\right]^{-1} = x\exp(X)\exp(-Y)y^{-1}$$
$$= xy^{-1}\, y\exp(X)\exp(-Y)\, y^{-1}$$
$$= xy^{-1}\, y\exp(\mu(X,-Y))\, y^{-1}$$
$$= \underline{xy^{-1}\exp(\mathrm{Ad}(y)(\mu(X,-Y)))} = K^{xy^{-1}}(\mathrm{Ad}_y \ldots)$$

dans la carte $V_0^{xy^{-1}}$ la fonction $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ se lit par

$(X,Y) \mapsto \mathrm{Ad}(y)\,\mu(X,-Y)$ $\quad$ y fixé $\quad \mathrm{Ad}\, y \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$

on voit bien là une fonction analytique. $\quad$ cqfd.

$V_0^x \times V_0^y \longrightarrow V_0^{xy^{-1}}$

Rque : G groupe de Lie $\quad$ variété diff + gp tq m et c sont C^∞
$\Leftrightarrow$ $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ est C^∞

2ème application : notion de groupe local.

La formule de Dynkin montre que la structure de groupe sur un voisinage de 1 dans G est déterminé par la structure d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$

Si G et H sont deux groupes de Lie abstraits

tq $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est isomorphe à $(\mathfrak{h}, [\,,\,])$

alors G et H ne sont pas isomorphes comme groupes de Lie $\quad (\mathbb{R}, S^1)$

mais il va exister un difféo entre les voisinages de 1 dans G et H qui préservent le produit et l'inverse.

$]-\varepsilon, \varepsilon[$ n'est pas un sous-groupe.

La formalisation de cette idée nécessite l'introduction de la notion de groupe de Lie "local" [ou germe de groupe de Lie]

Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel de dim finie

Un groupe de Lie local est la donnée d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ noté U et de deux applications $\mu : U \times U \to \mathfrak{g}$ et $i : U \to \mathfrak{g}$ qui vérifient

$$\mu(X,0) = \mu(0,X) = X$$
$$\mu(X, i(X)) = \mu(i(X), X) = 0$$
$$\mu(\mu(X,Y), Z) = \mu(X, \mu(Y,Z)) \quad \forall X,Y,Z \text{ dans un voisinage de } 0.$$

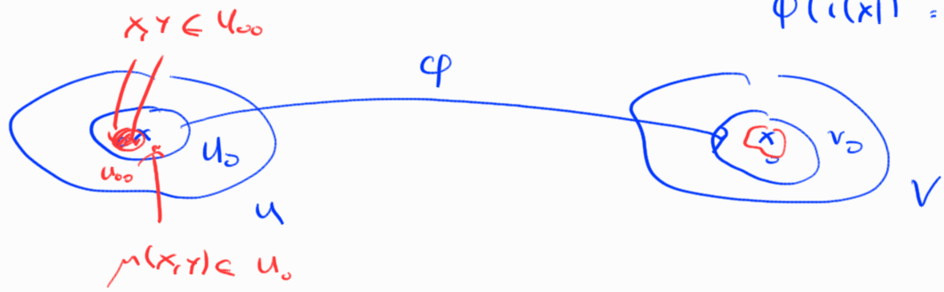
Etant donnés (U, μ, i) et (U', μ', i') deux groupes locaux

On dit qu'ils sont équivalents s'il existe

$U_{00} \subset U_0 \subset U$ et $\varphi : U_0 \longrightarrow U_0'$ un difféomorphisme $\quad U_{00}' \subset U_0' \subset U_0$

tq $\mu(X,Y) \in U_0 \quad \forall X,Y \in U_{00}$

$$\phi(\mu(X,Y)) = \mu'(\phi(X), \phi(Y))$$
$$\phi(i(X)) = i'(\phi(X)) \quad \forall X,Y \in U_{00}$$



Une classe d'équivalence de groupes de Lie locaux est appelé "germe de groupe de Lie"

<u>Corollaire de la formule de Dynkin</u> : Si G et H ont la même algèbre de Lie, ils ont le même germe de groupe de Lie.

<u>Théorème</u> : Toute algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ définit
(admis) un germe de groupe de Lie par la fonction μ donnée par
$\quad$ 2 $\quad$ la formule de Dynkin

<u>V La composante connexe de l'identité</u>

Soit G un groupe de Lie et G^0 la composante connexe de G qui contient 1.

<u>Thm</u> : . Alors G^0 est connexe par arcs, ouvert et fermé, c'est un sous-groupe de G, il est distingué.

. les composantes connexes de G sont exactement de la forme $xG^0 = G^0x$

. tout voisinage V de 1 dans G^0 engendre G^0 comme groupe.

Définition : G^0 est appelé composante neutre de G.

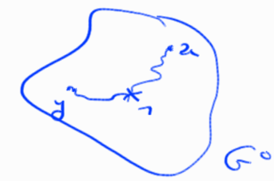
Démo ; toute variété différentielle est localement connexe par arcs.

donc G^0 est connexe par arcs. Elle est ouverte et fermée par définition.

Prenons $x, y \in G^0$ on veut montrer que $xy \in G^0$.

Par exemple on choisit $\alpha : [0,1] \to G^0$ continu

tq $\alpha(0) = 1$ $\alpha(1) = x$



on choisit $\beta : [0,1] \to G^0$ tq $\beta(0) = 1$ $\beta(1) = y$

le produit $\alpha\beta . t \mapsto \alpha(t)\beta(t)$ $\alpha\beta : [0,1] \to G^0$

$(\alpha\beta)(1) = xy$ donc $xy \in G^0$.

Autre preuve : $m : G^0 \times G^0 \to G$
$(x, y) \mapsto xy$

$G^0 \times G^0$ est connexe

$m(G^0 \times G^0)$ est connexe contient 1

donc $m(G^0 \times G^0) \subset G^0$.

On prend $x \in G$

$$Ad(x) . \; G^0 \to G \qquad y \mapsto xyx^{-1}$$

est continue

$Ad(1) = 1$

donc $Ad(x)(G^0) \subset G^0$ donc $xyx^{-1} \in G^0$ $\forall x \in G$

$\Rightarrow G^0$ est distingué.

Les composantes connexes de G

Si C est une composante connexe contenant x.

alors $L(x^{-1})$ envoie C sur une comp connexe contenant 1

donc $L(x^{-1})C = G^0$ donc $C = L(x)G^0 = xG^0$

$= G^0 x$ car G^0 est distingué

Dernière chose à prouver : soit V un voisinage de 1 dans G^0

alors $\langle V \rangle$ = s-groupe engendré par V est égal à G^0.

Notons $H = \langle V \rangle \subset G^0$ on veut montrer que

H est ouvert et fermé.

Soit $W \subset V$ un ouvert contenant 1 alors

$\forall x \in H$ et $\forall w \in W$ $wx \in H$ donc $H = \bigcup_{x \in H} Wx$

donc H est une réunion d'ouverts donc c'est un ouvert.

Si $x \notin H$ alors $wx \notin H$ $\forall w \in W$

donc $G^0 \setminus H = \bigcup_{x \notin H} Wx$ c'est encore ouvert.

donc H est fermé. Par connexité $H = G^0$.

<u>Exemple principal</u> : $V = \exp(U)$ U un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$.

$\Rightarrow$ G^0 est engendré par $\exp(X)$ pour $X \in U$

En général

$$\begin{tikzcd} \exp : \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[dr] & G \\ & G^0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

tout élément de G^0 s'écrit $\prod_{i=1}^{k} \exp(X_i)$ $X_i \in \mathfrak{g}$.

<u>exemple</u> : $sl_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\exp} SL_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de l'exp.

peut-on l'écrire comme un produit d'exponentielles ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle π