Evaluation de l'UE

① Contrôle continu à distance le 2 mars pendant le créneau du TD (3h)

② Examen à Jussieu à la fin du semestre

Note finale $= \max(CC/30 + Ex/70 \,,\, Ex/100)$

Cours présenté à peu près deux parties

I <u>Théorie générale des groupes de Lie</u>

II <u>Théorie des représentations</u>

G groupe de Lie (compact) rep : $\rho : G \to GL(V)$ morphisme de groupes.

La dernière fois : on avait considéré un groupe de Lie G et G^0 la composante connexe de l'identité alors G^0 est un sous-groupe distingué, muni d'une structure de groupe de Lie $T_1 G^0 = T_1 G = \mathfrak{g}$

il a donc la même algèbre de Lie que G

de plus G^0 est engendré par $\exp(U)$ pour U un voisinage quelconque de 0.

Dernier point $G/G^0 = \{$composantes connexes de $G\}$ muni de la topologie quotient est discret et c'est un groupe

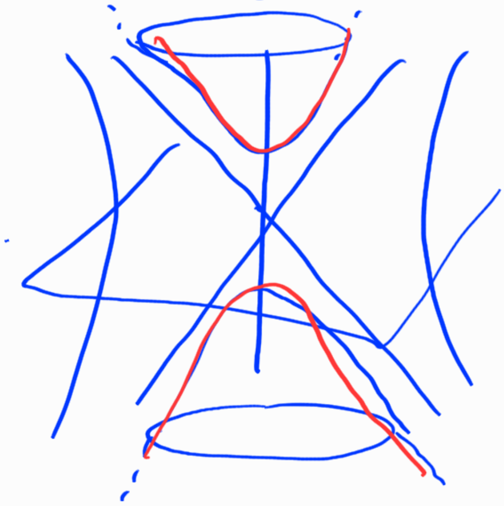
Exemple : – $SL_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

– $O(n)^0 = SO(n)$ $\quad O(n)/SO(n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$

$A \longmapsto \det A$

– $O(1,2) = \{A \in GL(3,\mathbb{R}) \quad q(AX) = q(X)$

pour $q(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$.



Si $A \in O(1,2)$ alors A préserve les lignes de niveau $q = C^{te}$.

Une de ces lignes de niveau a deux composantes connexes il est possible que A échange ces deux composantes. Cela donne un morphisme $O(1,2) \to \{\pm 1\}$

$\det \downarrow$

$\{\pm 1\}$

$$\Rightarrow \quad O(1,2)/O(1,2)^0 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

$\uparrow$ orientation $\quad \uparrow$ échange de nappes.

Même chose pour $O(1,3)$ groupe de Lorentz

$q(t,x,y,z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

<u>Dernier point</u>

<u>Proposition</u> : Soit G un groupe de Lie

$$[X,Y] = 0 \ \forall X,Y \in \mathfrak{g} \iff G^0 \text{ est abélien}$$

<u>Démo</u> : Si G^0 est abélien alors $Ad(x) : G^0 \to G^0$

$y \mapsto xyx^{-1}$

est l'application identité : sa dérivée est l'application $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est l'identité

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$$
$$g \mapsto \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$$

Cette application est constante donc sa dérivée $\mathrm{ad} = 0$.

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}(X) = 0 \quad \forall X \quad \Leftrightarrow \quad [X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Voyons la réciproque : Supposons qu'on a $[X, Y] = 0$ $\forall X, Y$. On veut prouver que G^0 est commutatif.

Commençons par calculer

$$e^X e^Y e^{-X} = \exp(\mathrm{Ad}(e^X)(Y)) = \exp(e^{\mathrm{ad}X}(Y))$$

Or $[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \Rightarrow \mathrm{ad}\, X = 0 \Rightarrow e^{\mathrm{ad}X} = \mathrm{Id}$.

donc $e^{\mathrm{ad}X}(Y) = Y$ et $\boxed{e^X e^Y e^{-X} = e^Y}$ $(*)$

Maintenant on rappelle que tout élément de G^0 s'écrit $x = e^{X_1} \cdots e^{X_n}$ $\quad y = e^{Y_1} \cdots e^{Y_m}$

Mq $xy = yx$ i.e. $e^{X_1} \cdots e^{X_n} e^{Y_1} \cdots e^{Y_m}$
$= e^{Y_1} \cdots e^{Y_m} e^{X_1} \cdots e^{X_n}$

Or d'après la formule $(*)$ $\quad e^X e^Y = e^Y e^X$

donc on a bien $xy = yx$ et G^0 est abélien. ■

Intermède : groupes de Lie complexes et hermitiens.

Jusqu'à présent on n'a considéré que les groupes de Lie réels. Que faire avec les groupes de Lie définis sur $\mathbb{C}$ comme par exemple $GL_n(\mathbb{C}) = \{ A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \text{ inversibles} \}$

$\mathbb{C}$-linéaire

1ère solution : on peut refaire la théorie réelle en remplaçant les variétés différentielles réelles par les variétés diff. complexes.
i.e G est une variété avec un atlas (U_i, φ_i)
$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}^n$ et les changements de carte sont des applications holomorphes à plusieurs variables ...
ça marche.

2ème solution : identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$
$z = x+iy \mapsto (x,y)$

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$
$(z_1, \dots, z_n) \to (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ où $z_k = x_k + i y_k$.

$A \in GL_n(\mathbb{C})$ $\quad A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est $\mathbb{C}$-linéaire
$\quad A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ $\mathbb{R}$-linéaire.

Ceci permet d'identifier $GL_n(\mathbb{C})$ à un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$
$A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $A(\lambda z) = \lambda A(z)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
or par hypothèse A est déjà $\mathbb{R}$-linéaire.
il suffit d'assurer que $A(iz) = i A(z)$.
Notons $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ la matrice de la multiplication par i :

$$J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Dans ces termes $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \{ A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \text{ tq } AJ = JA \}$.

Or l'équation $\{AJ = JA\}$ est linéaire, cela définit un sous-espace vectoriel de $M_{2n}(\mathbb{R})$ qui s'identifie à $M_n(\mathbb{C})$.

En particulier $GL_n(\mathbb{C})$ est bien une sous-variété de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ donc elle hérite d'une structure de <u>groupe de Lie</u>.

Son algèbre de Lie est $\{A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ tq $AJ = JA\}$
$\simeq M_n(\mathbb{C})$.

<u>Structures hermitiennes</u>: on se donne E un espace vectoriel complexe de dim finie. Une structure hermitienne est une application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifie

① $h(\lambda x, \mu y) = \bar{\lambda} \mu\, h(x,y)$

② $h(y,x) = \overline{h(x,y)}$

③ $h(x,x) > 0 \quad \forall x > 0$

On peut démontrer qu'il existe une base $e_1, \dots, e_n$ tq dans cette base

$$h(u,v) = \sum \bar{x}_i y_i \quad \text{où} \quad u = \sum x_i e_i \text{ et } v = \sum y_i e_i$$

Un endomorphisme $A \in GL_{\mathbb{C}}(E)$ est dit hermitien si

$$h(Au, Av) = h(u,v) \quad \forall u, v \in E.$$

Si on écrit la matrice de A dans une base hermitienne

A est hermitien ssi $\forall X, Y \quad \overline{AX}^T AY = \bar{X}^T Y$

$$\bar{X}^T \bar{A}^T A Y = \bar{X}^T Y$$

$$\boxed{A \text{ est hermitien} \iff \bar{A}^T A = I}$$

on écrit $A^* = \bar{A}^T$

On note $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $A^* A = I\}$.

On vérifie que c'est un groupe de Lie [même preuve que pour le groupe orthogonal]

Son algèbre de Lie est $\mathfrak{u}(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0 \}$.

$= \{$ matrices antihermitiennes $\}$

Regardons maintenant $\det : U(n) \longrightarrow \mathbb{C}^*$

or $A^* A = id \Rightarrow \det A^* \det A = 1$

$$\det A^* = \det \bar{A}^T = \det \bar{A} = \overline{\det A}$$

$$\Rightarrow |\det A|^2 = 1$$

ainsi $\det : U(n) \longrightarrow S^1$ est un morphisme de groupes de Lie

On pose $SU(n) = \{ A \text{ tq } A^* A = I \text{ et } \det A = 1 \}$.

$\mathfrak{su}(n) = \{ A \text{ tq } A^* + A = 0 \text{ et } \operatorname{Tr} A = 0 \}$.

On aime particulièrement les groupes $SU(n)$ $n \geq 2$.

parce qu'ils sont compacts et ils sont connexes et simplement connexes

Ex : $SU_2 = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \text{ tq } A^* = A^{-1} \text{ et } \det A = 1 \}$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \delta = \bar{\alpha} \qquad \beta = -\bar{\gamma} \qquad$ donc $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

avec $\det A = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ tq } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Observons : $S^3 \xrightarrow[\text{difféo}]{\sim} SU_2$

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tq $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

$\begin{pmatrix} \alpha = x + iy \\ \beta = z + it \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

Cela prouve bien que SU_2 est compact et simplement connexe.

$$su_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^3$$

espace vect. de dim 3.

Regardons $\quad Ad : SU_2 \longrightarrow GL(su_2) = GL_3(\mathbb{R})$.

$$g \longmapsto [X \mapsto gXg^{-1}]$$

<u>observation</u> : regardons $\det X = \begin{vmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{vmatrix} = x^2+y^2+z^2$

on voit apparaître la forme quadratique standard.

$$\det(gXg^{-1}) = \det g \det X \det g^{-1} = \det X$$

ie $\forall g \in SU_2 \quad Ad_g$ préserve la forme quadratique "det"

Cela dit que $\quad Ad : SU_2 \longrightarrow O(3)$

comme SU_2 est connexe $\quad \boxed{Ad : SU_2 \longrightarrow SO(3)}$

on peut voir facilement que Ad est surjectif et $\ker Ad = \{\pm 1\}$

Chapitre III Sous-groupes de Lie

I Definitions

On rappelle qu'un morphisme de groupes de Lie $\Phi : G \to H$ est une application C^∞ + un morphisme de groupes.

Un morphisme d'algèbres de Lie $\quad \varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \quad$ est une application linéaire tq $\quad [\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Vu que si $\quad \Phi : G \to H$ est un morph de gp de Lie alors $\varphi = D_1\Phi$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

- Un morphisme $\Phi : G \to H$ est un <u>isomorphisme</u> s'il existe $\Psi : H \to G$ morphisme de gp de Lie tq $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_G$ $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_H$
en particulier Φ est un difféo. En fait Φ difféo : $G \to H$ + morph de groupe alors Φ est un iso de groupes de Lie

- $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui préserve $[\cdot,\cdot]$.

⚠ Si $\Phi : G \to H$ est un iso de groupes de Lie
alors $\varphi = D_1\Phi$ ——— d'algèbres de Lie
Par contre la réciproque est fausse

ex ① $\Phi : \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ morphisme de gp. de Lie + difféo local.
$D_1\Phi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T_1 S^1$ mais Φ n'est pas un iso.

② $\Phi : SU_2 \to SO(3)$ pas un isomorphisme de gp.
$\varphi : \mathfrak{su}_2 \xrightarrow[\sim]{} \mathfrak{so}(3)$ iso d'algèbres de Lie

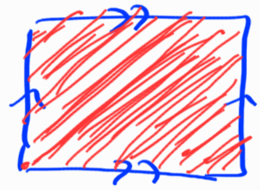
<u>Déf</u> ⑪ Un sous-groupe de Lie H de G est un sous-groupe de G muni d'une structure de groupe de Lie tq
$i : H \to G$ est un morphisme de groupes de Lie et une <u>immersion</u>
$\forall x \in H$ $D_x i : T_x H \to T_x G$ est injective.

<u>Rque</u> : on peut se ramener à l'élément neutre

$$\begin{array}{ccc} T_x H & \xrightarrow{D_x i} & T_x G \\ \sim \uparrow D_1 L(x) & & \sim \uparrow D_1 L(x) \\ T_1 H & \xrightarrow{D_1 i} & T_1 G \end{array}$$

donc $D_x i$ est injective $\forall x \in H \iff D_1 i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ est injective.

⚠ On ne demande pas que H soit une sous-variété de G (seulement une variété immergée).



ex : $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$t \longmapsto (t, \sqrt{2}\, t)$

γ est un morphisme de groupes

$\mathrm{im}\, \gamma \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ qui est dense dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

On va pourtant le considérer comme un sous groupe de Lie de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

La topologie de $\gamma(\mathbb{R})$ <u>n'est pas</u> la topologie induite par celle de G.

② Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une sous-algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tq $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$ $[X,Y] \in \mathfrak{h}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ muni de la restriction de $[\,,\,]$ est une algèbre de Lie.

<u>Exemple</u> : Si H est un sous-groupe de Lie de G alors

$i : H \to G$ est un morphisme de groupes de Lie

$D_1 i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ est injective + morphism d'algèbres de Lie.

on peut identifier $\mathfrak{h}$ à $D_1 i(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ sous-algèbre de Lie

<u>Théorème</u> : Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un unique sous groupe de Lie $H \subset G$ <u>connexe</u> dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$.
Précisément. H est le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$.

<u>Preuve</u> : On commence par travailler dans "la carte exponentielle"

On choisit un domaine $\mathfrak{g}_e \subset \mathfrak{g}$ contenant 0 tq $\exp : \mathfrak{g}_e \to G$ soit un difféomorphisme sur son image.

On pose $X^R(Z) = \dfrac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z} - 1}(X)$ ceci correspond via la carte exp au champ de vecteurs X^R invariant à droite tq $X^R(0) = X$

Rq si $X \in \mathfrak{h}$ alors $X^R(Z) \in \mathfrak{h}$ $\forall Z \in \mathfrak{h}$.

en effet : si $Z \in \mathfrak{h}$ et $X \in \mathfrak{h}$ alors $[Z, X] \in \mathfrak{h}$ par hypothèse
$ad(Z)(X) \in \mathfrak{h}$.

$ad(Z)$ préserve $\mathfrak{h}$ $\forall Z \in \mathfrak{h}$.

de plus pour toute série entière $f(x)$ convergente $f(ad Z)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

donc $X^R(Z) = \frac{ad Z}{e^{ad Z} - 1}(Z) \in \mathfrak{h}$.

On rappelle que $\begin{cases} Z'(t) = X^R(Z(t)) \\ Z(0) = Y \end{cases}$ est un système différentiel

dont la solution est $\exp(Z(t)) = \exp(tX)\exp(Y)$.

par hypothèse $Y \in \mathfrak{h}$ et $X^R(Z) \in \mathfrak{h}$ si $Z \in \mathfrak{h}$.

$\Rightarrow$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$ alors $Z(t) \in \mathfrak{h}$ $\forall t$

$\boxed{\text{Conclusion}}$ $(*)$: " $\log(\exp(X)\exp(Y))$ " $\in \mathfrak{h}$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Notons H le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{h})$.

On munit H du système de cartes (V^x, K^x) défini au chapitre précédent : $V^x = \{ x\exp(X)$ où $x \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_e \cap \mathfrak{h} \}$

et $K^x : V^x \longrightarrow \mathfrak{h}$
$x\exp(X) \longmapsto X$.

La démonstration que ce système de cartes munit H d'une structure de groupe de Lie est <u>la même</u> que celle faite précédemment
elle utilise uniquement la formule $(*)$

De plus H est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$ par construction $\to$ H est connexe : Si on écrit $h = \exp(X_1) \cdots \exp(X_n)$ avec $X_i \in \mathfrak{h}$.

alors $\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n)$ avec $t \in [0,1]$

forme un chemin continu d'éléments de H qui relie h à 1.
cela prouve aussi l'unicité de H et termine la démonstration.

Exemples de sous-groupes et sous-algèbres de Lie :

gp : $GL_2(\mathbb{R})$ sous-groupes. $SL_2(\mathbb{R})$ | $sl_2(\mathbb{R}) = \{X \mid \operatorname{tr} X = 0\}$

alg : $M_2(\mathbb{R})$ $SO_2(\mathbb{R})$ | $so_2(\mathbb{R}) = \{X \text{ antisym}\}$

$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{C}^*$ | $\simeq \mathbb{C}$

$(Sp(2,\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}))$

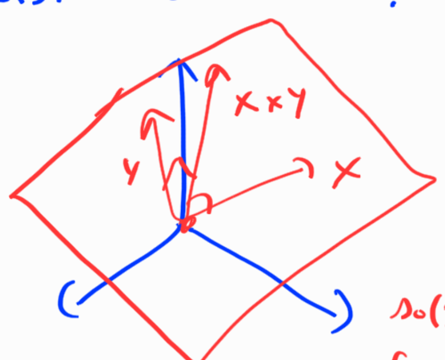
$O_2(\mathbb{R})$ | $so_2(\mathbb{R})$

$GL_2(\mathbb{R})^\circ = GL_2^+(\mathbb{R})$ | $M_2(\mathbb{R})$

$\{\exp(tX), t \in \mathbb{R}\}$ | $\mathbb{R}X$ $X \in M_2(\mathbb{R})$

<u>Ex</u> : $SO(3)$ alg. $so(3)$

$\exists ?\ \mathfrak{h} \subset so(3)$ de dim 2 ?



$so(3) \simeq \mathbb{R}^3$
$[\,,\,]$ $\times$

non car $X \times Y \notin$ Plan engendré par X et Y.