Représentations des groupes de Lie compact

Rappel : il existe une unique mesure de Radon invariante à gauche et à droite sur un groupe de Lie compact : notée μ et tq $\mu(G) = 1$. Elle s'appelle mesure de Haar.

[le résultat est plus général : c'est vrai sur n'importe quel groupe topologique compact. Exemple : $\mathbb{Q}_p$ nombres p-adiques. c'est la complétion de $\mathbb{Q}$ pour une norme dite p-adique $\left|\frac{a}{b}\right| = p^{-v_p(a)+v_p(b)}$

où $v_p(n) = m$ si $p^m | n$ et $p^{m+1} \nmid n$.

ex $v_2(6) = 1$ $\quad |6| = \frac{1}{2}$

$$|p^n| = p^{-n} \longrightarrow 0.$$

$\mathbb{Q}_p$ est un groupe topologique non compact $\quad |p^{-n}| = p^n \to +\infty$

par contre on peut considérer l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$

$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x| \leq 1\} = B(0,1) \subset \mathbb{Q}_p$.

$\mathbb{Z}_p$ = entiers p-adiques groupe topologique compact.

Exercice : $\mathbb{Z}_p = \left\{ (x_n) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{ telle que } \begin{array}{ccc} x_{n+1} & \longrightarrow & x_n \\ \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{array} \right\}$

On peut voir qu'il y a sur ce groupe une mesure de Haar

Fin de l'aparté.

On va utiliser la mesure d'une seule façon : l'intégration d'une fonction continue sur G. $\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \int_G f\,d\mu. \end{array}$ continue positive

invariance à gauche et à droite : $\displaystyle\int_G f\circ L(g)\,d\mu = \int_G f\,d\mu = \int_G f\circ R(g)\,d\mu$

on l'écrit $h \in G$ $\quad \displaystyle\int_G f(hg)\,d\mu(g) = \int_G f(g)\,d\mu(g) = \int_G f(gh)\,d\mu(g).$

Application : Soit G un groupe de Lie compact et $\rho : G \to \mathrm{End}(V)$ de dim finie.

1er cas : V est réel. Il existe un produit scalaire sur V $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariant par G, i.e tq $\forall v, w \in V$ $\forall g \in G$ $\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle = \langle v, w\rangle$

ie $\rho : G \to O(V) = \{$ isométries de V pour le produit scalaire $<,>\}$

<u>2ème cas</u> : V est complexe, il existe une forme hermitienne invariante par G.

<u>Preuve</u> : on se donne μ la mesure de Haar sur G et $<\cdot,\cdot>_0$ un produit scalaire quelconque sur V.

On pose $$< v, w > = \int_G < \rho(g) v, \rho(g) w >_0 \, d\mu(g)$$

il suffit de vérifier que $< , >$ définit un produit scalaire G-invariant.

La bilinéarité de cette expression provient de la linéarité de l'intégrale + bilinéarité des $<\cdot,\cdot>_0$

$$< v, v > = \int_G \underbrace{< \rho(g) v, \rho(g) v >_0}_{\| \rho(g) v \|_0^2 \geq 0} \, d\mu(g) \geq 0$$

La positivité de l'intégrale dit que $< v, v > \geq 0$ et si ça vaut 0

alors $< \rho(g) v, \rho(g) v >_0 = 0 \quad \forall g \Rightarrow \rho(g) v = 0 \quad \forall g$

$\Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow < , >$ est bien un produit scalaire.

Montrons qu'il est invariant

$$< \rho(h) v, \rho(h) w > = \int_G < \rho(g) \rho(h) v, \rho(g) \rho(h) w >_0 \, d\mu(g)$$

$\rho : G \to GL(V)$ morphisme

$$= \int_G < \underbrace{\rho(gh) v, \rho(gh) w >_0}_{} \, d\mu(g)$$

$$\int_G f(gh) \, d\mu(g) \underset{\substack{\text{inv.} \\ \text{à droite}}}{=} \int_G f(g) \, d\mu(g).$$

$$= \int_G < \rho(g) v \cdot \rho(g) w >_0 \, d\mu(g) = < v, w >. \quad \blacksquare$$

La même preuve fonctionne avec les formes hermitiennes.

<u>Rappel</u> : $\rho : G \to GL(V)$ est <u>irréductible</u> si tout sous-espace W stable par ρ est égal à $\{0\}$ ou V.

<u>Corollaire</u> : Si G est compact, toute représentation de dim finie $\rho : G \to GL(V)$ est une somme directe de représentations irréductibles.

<u>démo</u> : on montre ceci par récurrence sur la dimension de V.

<u>Observation</u> : toute représentation de dim 1 est irréductible.

Supposons que toute rep de dim $< n$ est irréductible et donnons nous $\rho : G \to GL(V)$ avec $\dim V = n$.

Soit ρ est irréductible et alors c'est terminé.

Soit elle ne l'est pas et $\exists W \subset V$ $W \neq \{0\}$ et $W \neq V$ qui est stable par ρ.

le problème est de trouver un sous-espace stable supplémentaire de W

⚠ cela n'existe pas toujours.

Exemple : $\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ est une représentation. $\rho(t+s) = \rho(t)\rho(s)$.

$W = \mathbb{R} \oplus 0$ est invariant par ρ. il n'y a pas de supplémentaire invariant !

On utilise l'application de la mesure de Haar qui dit qu'il existe un produit scalaire $\langle , \rangle$ est invariant par G.

on observe que $W^\perp = \{ w \in W \quad \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in W\}$ est un supplémentaire de W. et il est G-invariant. / stable par ρ.

vérifions-le : si $w \in W^\perp$ (notation simplifiée $\rho(g)v = g \cdot v$)

on veut mq $gw \in W^\perp$ ie $\forall v \in W$ $\langle gw, v \rangle = 0$

or $\langle , \rangle$ est inv. par G. $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle = \langle g^{-1}x, g^{-1}y \rangle$

donc $\langle gw, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle g^{-1}gw, g^{-1}v \rangle = 0$

$\langle w, g^{-1}v \rangle = 0$

or $v \in W$ qui est stable par G donc $g^{-1}v \in W$

Comme $w \in W^\perp$ $\langle w, g^{-1}v \rangle = 0$ cqfd.

$\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$ isomorphisme de représentations de G.

$\dim W < n$ $\dim W^\perp < n$ par récurrence V est bien une somme de représentations irréductibles.

Question. est-ce que la décomposition en irréductibles est unique ?

Lemme de Schur : Soit $\rho_V : G \to GL(V)$ et $\rho_W : G \to GL(W)$ deux représentations irréductibles complexes de dim finie.

on définit $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{ f : V \to W$ linéaire
$(*)$ $f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g) f(v)$
$\forall g \in G, \forall v \in V \}$

alors $\begin{cases} \text{soit} & \mathrm{Hom}_G(V,W) \simeq \mathbb{C} \text{ et alors } V \text{ et } W \text{ sont isomorphes} \\ \text{soit} & \mathrm{Hom}_G(V,W) \simeq 0 \end{cases}$

démo : Supposons que $\mathrm{Hom}_G(V,W) \neq 0$ et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V,W) \neq 0$

1ère étape. prouvons que φ est un isomorphe.

$\varphi : V \longrightarrow W$

Regardons $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ $\quad \operatorname{Im}\varphi \neq \{0\}$.
de plus $\operatorname{Im}\varphi$ est G-invariant $\quad \varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$

$$g\varphi(v) = \varphi(gv)$$
$$\Rightarrow g\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$$

Par l'hypothèse d'irréductibilité de W $\quad \operatorname{Im}\varphi = W$.

De même $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$ $\quad \operatorname{Ker}\varphi \neq V$ car $\varphi \neq 0$
et $\operatorname{Ker}\varphi$ est G-invariant $\quad$ si $\varphi(v) = 0$ alors $\varphi(gv) = g\varphi(v) = 0$.
donc $gv \in \operatorname{Ker}\varphi$

Par l'hypothèse d'irréductibilité de V $\quad \operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme
($\Rightarrow$ V et W sont isomorphes en tant que représentations).

<u>2ème étape</u> : $\quad \operatorname{Hom}_G(V,W) \simeq \mathbb{C}$.

on se donne $\varphi \in \operatorname{Hom}_G(V,W)$ $\quad \varphi \neq 0$ $\quad$ (φ est inversible).

en composant

$$\operatorname{Hom}_G(V,W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_G(V)$$
$$\psi \longrightarrow \varphi^{-1}\circ\psi$$
$$\varphi\circ\psi \longleftarrow \psi$$

Il suffit de montrer que $\operatorname{End}_G(V) \simeq \mathbb{C}$ ie que
tout endomorphisme $\varphi : V \to V$ G-invariant $\quad \varphi(gv) = g\varphi(v)$
est de la forme $\varphi(v) = \lambda v$. pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $\varphi \in \operatorname{End}_G(V)$ $\quad \varphi \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre.

On regarde $E_\lambda = \{v \in V \;/\; \varphi(v) = \lambda v\}$.

Montrons que E_λ est G-invariant. $\quad$ si $v \in E_\lambda$ $\quad \varphi(v) = \lambda v$.

$$\varphi(gv) = g\varphi(v) = \lambda gv \Rightarrow gv \in E_\lambda$$

Or V est irréductible donc $V = E_\lambda \Rightarrow \varphi = \lambda \mathrm{Id}$.

<u>Corollaire</u> : Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de représentants des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de dim finie / $\mathbb{C}$ de G compact. Alors on a montré que toute rep. $\rho : G \to GL(V)$ de dim finie s'écrit

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i^{n_i}$$

les n_i sont uniquement définis par V.

<u>démo</u>. On se donne $j \in I$ et on regarde

$$\operatorname{Hom}_G(V_j, V) = \{ f : V_j \longrightarrow V \quad tq \quad f(gv) = g f(v) \}$$

Si on a $V = V_1 \oplus V_2$ alors $\operatorname{Hom}_G(V_j, V_1\oplus V_2) = \operatorname{Hom}_G(V_j, V_1) \oplus$

$$\mathrm{Hom}_G\Big(V_j, \bigoplus_{i\in I} V_i^{n_i}\Big) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(V_j, V_i)^{n_i} \qquad \mathrm{Hom}_G(V_j, V_2).$$

or d'après le lemme de Schur $\mathrm{Hom}(V_j, V_i) = 0$ si $i \neq j$

$= \mathbb{C}$ si $i = j$

$$\mathrm{Hom}_G(V_j, V) = \mathrm{Hom}_G(V_j, V_j)^{n_j} = \mathbb{C}^{n_j}$$

$\Rightarrow n_j = \dim \mathrm{Hom}_G(V_j, V)$ cela prouve l'unicité car cette formule est indépendante de la décomposition choisie.

Souvent la partie $V_j^{n_j} \subset V$ s'appelle la composante isotypique de V_j dans V.

<u>Exemple</u> : regardons le cas de $G = S^1$.

D'après les considérations précédentes, toute rep. de S^1 est la somme directe de représentations irréductibles $\rho : S^1 \to GL(V)$.

De plus il existe une forme hermitienne invariante ($\rho : S^1 \to U(V)$)

$U(V)$: applications linéaires unitaires.

on veut prouver que V est de dim 1.

<u>Rappel</u> : deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

$\forall g \in S^1$ $\rho(g)$ est une matrice unitaire donc diagonalisable

$\forall h \in S^1$ $\rho(g)$ et $\rho(h)$ commutent.

si λ est une valeur propre de $\rho(g)$ $\quad E\lambda = \{v \in V \ \ \rho(g)v = \lambda v\}$.

alors $\rho(h)$ préserve $E\lambda$ $\Rightarrow$ si $v \in E\lambda$ $\quad \rho(g)v = \lambda v$

$$\rho(g)\rho(h)v = \rho(gh)v = \rho(h)\rho(g)v$$
$$= \rho(h)\lambda v = \lambda\rho(h)v$$

$\Rightarrow \rho(h) \in E\lambda$. donc $E\lambda$ est un sous-espace stable par S^1.

Comme V est supposé irréductible $\Rightarrow E\lambda = V$

donc $\rho(g) = \lambda(g)\,\mathrm{Id}$ $\quad \forall g$.

Cette représentation est irréductible seulement si V est de dim 1.

On est donc ramené à considérer l'ensemble des rep. de dim 1 unitaires de S^1.

$$\rho : S^1 \longrightarrow U(\mathbb{C}) = S^1$$

[1er exercice du DM !].

$$\begin{tikzcd} \rho : S^1 \arrow[r] & S^1 \\ D_1\rho : \mathbb{R} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\times\lambda"'] & \mathbb{R} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

morph. de gp

appl. linéaire

$\rho(e^{i\theta}) = e^{i\lambda\theta}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

Un tel ρ n'est pas forcément bien défini : il faut que $\rho(e^{2i\pi}) = 1$

ie $e^{2i\pi\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Z}$

Conclusion : tout morphisme de gp de Lie $S^1 \to S^1$ est de la forme $z \mapsto z^n$.

La prochaine fois : on va classer les représentations irréductibles de SU_2

$S^1 \hookrightarrow \mathbb{Z}$
n $(z \mapsto z^n)$ dim 1 $\forall n$

$SU_2 \longrightarrow \mathbb{N}$
n dim $V_n = n+1$
paramètre le "spin" d'une particule.