Examen -Topologie algébrique des variétés II

21 Février 2022

Exercice 1:

Soit X un espace topologique connexe par arcs et délaçable. On définit $\Delta^n X = \{\sigma : \Delta_n \to X\}/\sigma \sim \tau$ si σ et τ sont homotopes relativement aux sommets de Δ_n. On pose :

$$\Delta X = \coprod_{n\geq 0} \coprod_{\sigma \in \Delta^n X} \Delta_n^\sigma / \sim$$

le CW-complexe obtenu en considérant l'union disjointe de copies de Δ_n paramétrés par $\sigma \in \Delta_n X$ avec la relation qui identifie pour tout $n \geq 0$ et pour $i = 0, \ldots, n$ la i-ème face de Δ_n^σ avec $\Delta_{n-1}^{\sigma_i}$ où σ_i est la i-ème face de σ.

1. Montrer que ΔX est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à celui de X.

2. Montrer que le revêtement universel de ΔX est contractile.

3. Dans le cas où X est un CW-complexe, prouver qu'il existe une application $f : X \to \Delta X$ qui induit un isomorphisme au niveau du groupe fondamental et une surjection $f_* : H_2(X, \mathbb{Z}) \to H_2(\Delta X, \mathbb{Z})$.

4. Quelle est la première obstruction à trouver une application $g : \Delta X \to X$ qui induise un isomorphisme au niveau du groupe fondamental?

5. Calculer cette première obstruction dans le cas $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. L'application g de la question précédente existe-t-elle dans ce cas?

Exercice 2:

Soit $m \geq n \geq 1$ deux entiers et $f : S^m \to S^n$ une application continue. On définit $Cf = D^{m+1} \amalg S^n / \sim$ où $x \sim f(x)$ pour tout $x \in \partial D^{m+1}$.

1. Calculer l'homologie de Cf en tout degré selon les valeurs de m.

Si $m = 2n-1$ on se donne $a \in H^n(Cf, \mathbb{Z}), b \in H^{2n}(Cf, \mathbb{Z})$ deux générateurs et on définit $H(f) \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$a \smile a = H(f)b.$$

2. Montrer que $H(f) = 0$ si f est homotope à une constante et $H(f) = 1$ si $f : S^3 \to S^2$ est la fibration de Hopf (on montrera que $Cf \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$).

3. Supposons qu'on ait un fibré orientable $\pi : X \to B$ de fibre S^{n-1} avec $n > 1$. Montrer qu'il existe une suite exacte longue (Gysin)

$$\cdots H^{k-n}(B) \to H^k(B) \to H^k(X) \to H^{k-n+1}(B) \to H^{k+1}(B) \to \cdots$$

4. Montrer que s'il existe un fibré $\pi : S^{m+n-1} \to S^m$ de fibre S^{n-1} ($n > 1, m > 0$) alors $m = n \geq 2$.

5. Montrer que s'il existe un fibré $\pi : S^{2n-1} \to S^n$ de fibre S^{n-1} ($n > 2$) alors $H(\pi) = \pm 1$.[1]

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel réel orienté de dimension 4. On définit

$$R(E) = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in (E \otimes \mathbb{C})^4, \det(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) > 0\}$$

où le déterminant est calculé dans une base positivement orientée de E.

1. Montrer que $R(E)$ est homotope à SU_4.

2. Calculer les groupes d'homotopie de $R(E)$ jusqu'en degré 3 inclus.

3. Soit M une variété différentiable compacte orientée de dimension 4. On forme un fibré $\pi : R(M) \to M$ dont la fibre en x est $R(T_x M)$. Montrer que ce fibré admet une section si et seulement si une certaine classe $p_1(M) \in H^4(M, \mathbb{Z})$ s'annule.

4. Calculer cette obstruction dans le cas où $M = S^4$. On pourra écrire $S^4 = D^4 \cup D^4$ et trivialiser le fibré tangent sur chaque boule.

5*. Montrer que $p_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \neq 0$.

Exercice 4:

Calculer $H_k(\Omega \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ pour le plus de valeurs de k possible.

[1] Cela n'existe que pour $n = 2, 4, 8$