THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

Exercice 1:

Soit n un entier strictement positif et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées complexes de taille n. Il s'agit d'une variété affine dont l'algèbre des fonctions est notée $A = \mathbb{C}[X_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}]$. On notera $M \in M_n(A)$ la matrice générique définie par $M = (X_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$.

1. Considérons l'action de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur $M_n(\mathbb{C})$ et notons $\Phi = (a_0, \ldots, a_{n-1}) : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$ l'application polynôme caractéristique définie par

$$\det(T\,\mathrm{Id} - M) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(M) T^k + T^n.$$

Justifier brièvement pourquoi Φ induit un isomorphisme $M_n(\mathbb{C})//\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$.

2. Notons $M^n = (u_{ij})$ et posons $I = (u_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}) \subset A$. Identifier le fermé $N \subset M_n(\mathbb{C})$ défini par l'idéal I.

3. Montrer qu'il existe un entier k tel que $\mathrm{tr}(M)^k \in I$ et qu'on a nécessairement $k \geq n$. En déduire que I n'est pas radical.

4. Justifier que l'application $\Psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$ où

$$\prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i + T^n$$

induit un isomorphisme $\mathbb{C}^n // S_n \to \mathbb{C}^n$ où S_n est le groupe symétrique qui agit par permutation sur $\mathbb{C}^n$. En déduire les égalités

$$\mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^{S_n} = \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_{n-1}] = \mathbb{C}[X_{i,j}]^G.$$

5. Posons $J = (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n) \subset \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ et notons $f : \mathbb{C}^n \to M_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sur la matrice diagonale avec ces mêmes coefficients. Montrer qu'on a $f^*(I) = J$ et en déduire l'égalité $J^{S_n} = I^G$.

6. Montrer l'inclusion $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^{n^2} \in J$ et en déduire l'inclusion $\mathrm{tr}(M)^{n^2} \in I$.

Exercice 2:

Soit V un espace vectoriel de dimension 3. On appelle drapeau de V un couple (D, P) où $D \subset P$ sont respectivement une droite et un plan de V. On note $\mathcal{F}$ l'espace des drapeaux.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une variété projective sur laquelle $G = \mathrm{SL}(V)$ agit transitivement.

2. Déterminer les orbites de G sur $\mathcal{F}^2$. On dira qu'un couple de drapeaux est générique s'il appartient à l'unique orbite dense.

3. Soit k un entier strictement positif. On associe à un drapeau (D, P) une matrice $M(D, P)$ dont D est l'image et P le noyau. Montrer que cela fournit un plongement G-équivariant Φ_k où $\mathrm{End}_0(V)$ désigne les endomorphismes de V de trace nulle.

$$\Phi_k : \mathcal{F}^k \to \mathbb{P}(\mathrm{End}_0(V)^{\otimes k}).$$

4. Montrer que tout drapeau (D, P) vérifie que $M(D, P)$ est instable.

5. Déterminer la stabilité d'une paire de drapeaux $(D_1, P_1), (D_2, P_2)$.

6. Soit $\hat{X}_3$ la préimage dans $\mathrm{End}_0(V)^{\otimes 3}$ de l'image de Φ_3. Montrer que l'application $f : \hat{X}_3 \to \mathbb{C}^2$ définie par $f(A \otimes B \otimes C) = (\mathrm{tr}\, ABC, \mathrm{tr}\, ACB)$ induit un isomorphisme $\hat{X}_3 /\!/ G \simeq \mathbb{C}^2$.

7. En déduire qu'on à $\mathcal{F}^3 /\!/ G \simeq \mathbb{P}^1$ et déterminer la stabilité d'un triplet de drapeaux.