

---

# INTRODUCTION AUX SURFACES DE RIEMANN

---

Nicolas Bergeron et Antonin Guilloux

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

De nombreux passages de ces notes sont directement empruntés au livre [Sai2011]. Deux autres importantes sources d'inspiration, dont nous reprenons certaines figures, sont les textes de J.B. Bost [Bos1992] et É. Reyssat [Rey1989].



# Sommaire

<b>I Introduction</b>	3
I.1 Définitions et premières propriétés	3
I.2 Trois exemples simplement connexes	5
I.3 Structures conformes	10
I.4 Courbes elliptiques	13
<b>II Courbes algébriques et surface de Riemann</b>	23
II.1 Surface de Riemann d'un germe de fonction	23
II.2 Surfaces de Riemann épointées et revêtements ramifiés	26
II.3 Courbes algébriques et normalisation	29
II.4 Algébrisation des surfaces de Riemann compactes	35
<b>III Classification topologique des surfaces</b>	39
III.1 Surfaces orientables et triangulables	39
III.2 Classification topologique des surfaces compactes orientables	41
III.3 Quelques conséquences	45
III.4 Un exemple : la courbe de Klein	48
<b>IV Surfaces quotients, uniformisation</b>	53
IV.1 Quotient de surfaces de Riemann	53
IV.2 Le théorème de Belyi	60
IV.3 Classification des surfaces de Riemann	62
<b>V Surfaces riemanniennes</b>	65
V.1 Rotationnel et divergence	67
V.2 Formes holomorphes et champs de vecteurs	68
V.3 Et les formes méromorphes ?	70
V.4 Périodes	73

V.5	Théorème d'existence	73
V.6	Théorie de Hodge et démonstration du théorème V.5.1	74
V.7	Démonstration du théorème V.6.2	77
<b>VI</b>	<b>Théorème de Riemann-Roch</b>	<b>83</b>
VI.1	Existence de fonctions méromorphes	83
VI.2	Relations bilinéaires de Riemann	87
VI.3	Démonstration du théorème VI.1.6	92
VI.4	Vision faisceautique du théorème de Riemann-Roch et dualité de Serre	94
VI.5	Existence de 1-formes méromorphes sur les courbes algébriques	102
<b>VII</b>	<b>Théorème d'Abel-Jacobi</b>	<b>107</b>
VII.1	Réseau des périodes	107
VII.2	Application d'Abel-Jacobi	108
VII.3	Théorème d'Abel	109
VII.4	Théorème de Jacobi	110
<b>VIII</b>	<b>Espace des modules grossier</b>	<b>115</b>
VIII.1	Courbes elliptiques	115
VIII.2	Modules en genre supérieur	117
VIII.3	Espace des modules	119
VIII.4	Dépendance des modules	120
<b>IX</b>	<b>Épilogue : une « démonstration » du théorème d'uniformisation</b>	<b>123</b>
IX.1	Une démonstration « expérimentale »	123
IX.2	Plus rigoureusement...	124
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>

# Introduction

## I.1. Définitions et premières propriétés

Une surface de Riemann est définie comme une variété complexe de dimension 1 :

**Définition I.1.1 (Surface de Riemann).** — Une *surface de Riemann* est un espace topologique  $X$  (connexe, séparé) muni d'un *atlas*  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  où  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  forme un recouvrement ouvert de  $X$  et les  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$  sont des homéomorphismes vers des ouverts de  $\mathbb{C}$  (*les cartes*) tels que les compositions

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

sont des transformations biholomorphes (c'est-à-dire des bijections holomorphes).

Avec cette définition, on peut étendre immédiatement les propriétés et objets locaux de  $\mathbb{C}$  et définir les notions de fonctions et de formes holomorphes ou méromorphes, d'applications holomorphes et de biholomorphismes (ou isomorphismes) entre surfaces de Riemann :

- Une fonction complexe  $\psi$  définie sur un ouvert  $U \subset X$  est *holomorphe* si pour tout  $P \in U$  et pour toute carte  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  telle que  $P \in U_\lambda$ , la fonction  $\psi \circ \varphi_\lambda^{-1}$  est holomorphe au voisinage de  $z = \varphi_\lambda(P)$ . De plus : la fonction  $\psi$  a un zéro d'ordre  $n$  en  $P$  si et seulement si  $\psi \circ \varphi_\lambda$  a un zéro d'ordre  $n$  en  $z$ .

- De la même manière on définit les fonctions *méromorphes* sur les surfaces de Riemann ainsi que l'ordre d'un pôle d'une fonction méromorphe.
- Une application continue  $f : Y \rightarrow X$  entre deux surfaces de Riemann est *holomorphe* si, pour toute carte locale  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  dans  $X$ , l'application  $\varphi_\lambda \circ f$  est holomorphe. Une telle application est un *isomorphisme* de surfaces de Riemann, ou un *biholomorphisme*, si c'est un homéomorphisme et son inverse est holomorphe.

On note  $\mathcal{M}(X)$  le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann  $X$ .

**Remarque I.1.2.** — Ces définitions ne dépendent pas de la carte choisie, notamment l'ordre des pôles et zéros car les changements de cartes sont des biholomorphismes.

Parmi les propriétés des fonctions holomorphes qui s'étendent aux fonctions sur les surfaces de Riemann, on commence par citer le théorème d'extension holomorphe d'une fonction bornée sur un disque épointé :

**Proposition I.1.3.** — Soient  $U$  un ouvert d'une surface de Riemann  $X$ ,  $p$  un point de  $U$  et  $f$  holomorphe bornée sur  $U \setminus \{p\}$ . Alors  $f$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U$

*Démonstration.* — Cela découle immédiatement du théorème d'extension des fonctions holomorphes bornées sur un disque épointé de  $\mathbb{C}$  [Rud1987] en considérant une carte locale autour de  $p$ .  $\square$

Une autre propriété importante est le fait que deux fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble avec un point d'accumulation coïncident partout :

**Proposition I.1.4.** — Soient  $U \subset X$  un ouvert connexe,  $D \subset U$  un sous-ensemble possédant un point d'accumulation et deux fonctions  $f$  et  $g$  méromorphes sur  $U$ .

Si  $f$  et  $g$  coïncident sur  $D$ , elles coïncident sur  $U$ .

*Démonstration.* — On commence par choisir un ouvert de carte  $U_\lambda$  tel que  $U_\lambda \cap D$  a un point d'accumulation. Dans cette carte locale, on peut appliquer le résultat pour les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  [Rud1987] :  $f$  et  $g$  coïncident donc sur  $U \cap U_\lambda$ . Maintenant, si  $U_\mu$  est un autre ouvert

de carte qui intersecte  $U \cap U_\lambda$ ,  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $U \cap U_\mu$ , coïncident sur l'ouvert non-vide  $U \cap U_\lambda \cap U_\mu$ , donc – en appliquant encore une fois la même propriété –  $f$  et  $g$  coïncident aussi sur  $U \cap U_\mu$ .

On propage ainsi l'égalité  $f = g$  de proche en proche à tout l'ouvert  $U$ . □

Une conséquence de cette dernière proposition et du principe du maximum est que, sur une surface de Riemann compacte, les fonctions holomorphes sont constantes.

***Théorème I.1.5.*** — *Toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante.*

*Démonstration.* — Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Le module d'une fonction holomorphe  $f$  sur  $X$  est continu. Il atteint son maximum en un point. La fonction  $f$  est donc constante sur toute carte locale autour de ce point, d'après le principe du maximum pour les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  [Rud1987]. En utilisant la proposition précédente ( $X$  est supposée connexe dans la définition) on conclut que  $f$  est constante sur  $X$ . □

## I.2. Trois exemples simplement connexes

On décrit ici trois exemples simplement connexes de surfaces de Riemann. Le théorème d'uniformisation, qu'on verra plus loin, énonce que ce sont les seuls et que toute surface de Riemann est un quotient d'un de ces exemples. On décrira donc les groupes d'automorphismes de chacun de ces exemples ce qui permettra plus tard de décrire leurs quotients.

### I.2.1. Le plan $\mathbb{C}$

Le plan est évidemment une surface de Riemann simplement connexe!

### I.2.2. Le disque $\mathbb{D}$ ou le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Tout ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  est une surface de Riemann simplement connexe. Cependant, du point de vue des surfaces de Riemann, ils ne donnent qu'un seul exemple en plus de  $\mathbb{C}$  lui-même. En effet, le théorème de représentation conforme de Riemann [Rud1987]

énonce que tout ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  différent de  $\mathbb{C}$  est bi-holomorphe au disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Nous préférons souvent au disque le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Un biholomorphisme entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} \\ z &\mapsto i \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

et s'étend en un homéomorphisme des bords :  $\mathbb{S}^1 \simeq \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \partial\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ .

### I.2.3. La sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$

En plus de  $\mathbb{C}$  et de ses ouverts, un exemple fondamental de surface de Riemann est la *sphère de Riemann* : on peut en effet recouvrir la sphère unité

$$\mathbb{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

par les deux ouverts  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  et  $\mathbb{S}^2 \setminus S$  (où  $S = (0, 0, -1)$  et  $N = (0, 0, 1)$  sont les pôles sud et nord) que l'on munit des *projections stéréographiques* (voir figure 1)

$$\begin{aligned} \varphi_N : \quad \mathbb{S}^2 \setminus N &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X+iY}{1-Z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_S : \quad \mathbb{S}^2 \setminus S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X-iY}{1+Z}. \end{aligned}$$

Pour un point  $P$  de la sphère différent des pôles, on vérifie l'équation  $\varphi_N(P) = 1/\varphi_S(P)$ ; puisque  $z \mapsto 1/z$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , cela munit la sphère d'une structure de surface de Riemann, notée  $\overline{\mathbb{C}}$ , que l'on peut penser comme la compactification naturelle  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{C}$  par un point à l'infini, ou de manière équivalente comme la droite projective  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Les deux notations cohabitent d'ailleurs dans ces notes.

**Remarque I.2.1.** — Une application méromorphe sur une surface de Riemann  $X$  peut être vue comme une fonction holomorphe de  $X$  vers  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .



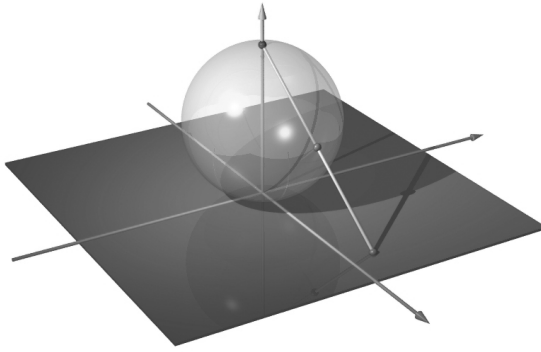


FIGURE 1. Projection stéréographique

#### I.2.4. Leurs groupes d'automorphismes

On détermine ici le groupe d'automorphisme de chacun des trois exemples, en commençant par déterminer le corps des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

**Théorème I.2.2.** — *Le corps des fonctions méromorphes  $\mathcal{M}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  est isomorphe au corps des fractions rationnelles  $\mathbb{C}(z)$  au-dessus de  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* — Toute fraction rationnelle  $r(z) \in \mathbb{C}(z)$  définit une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Réciproquement, considérons une fonction méromorphe  $f$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Quitte à post-composer par  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , on peut supposer que  $f(\infty) \in \mathbb{C}$ . Dans la coordonnée  $\varphi_N$  on écrit :

$$f_N(:= f \circ \varphi_N^{-1}) = \sum_{i=1}^m p_i(z) + q(z),$$

où

$$p_i(z) = \frac{b_{i,m_i}}{(z - a_i)^{m_i}} + \dots + \frac{b_{i,1}}{z - a_i}$$

est la partie principale du polynôme de Laurent de  $f$  autour d'un pôle  $a_i$ , et  $q(z)$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Comme  $\infty$  n'est pas un pôle de  $f$ , alors  $q(z)$  est bornée et donc constante. Ainsi :

$$f_N = \sum_{i=1}^m p_i(z) + c$$

est une fraction rationnelle. □

Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  est donc le groupe des fractions rationnelles bijectives. Ce sont les *homographies* :

**Proposition I.2.3.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  des automorphismes de la sphère de Riemann est le groupe de Moebius  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  agissant par homographie :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*Démonstration.* — On vérifie d'abord que cette action est bien définie (i.e. ne dépend pas du représentant choisi de l'élément de  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ ) et est une action par automorphisme : l'inverse de l'action d'une matrice est donnée par l'action de la matrice inverse. On vérifie enfin élémentairement que cette action est bien fidèle (deux éléments différents de  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  n'agissent pas de la même façon).

Il reste à montrer que tout automorphisme est une homographie. Un automorphisme étant une application méromorphe, le théorème précédent implique que c'est une fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$ . Elle doit être injective, or  $\frac{P}{Q} = z$  a autant de racines que le maximum des degrés de  $P$  et  $Q$ . Donc le numérateur et le dénominateur sont de degré au plus 1 et  $\frac{P}{Q}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  pour certains  $a, b, c$  et  $d$  dans  $\mathbb{C}$ . Comme la fraction rationnelle est surjective, elle ne doit pas être constante. Donc le dénominateur et le numérateur ne sont pas proportionnels, autrement dit on a  $ad - bc \neq 0$ . On voit que  $\frac{P}{Q}$  est donnée par l'action d'un élément de  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

On détermine les automorphismes du plan en les étendant en des automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  :

**Proposition I.2.4.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  des automorphismes du plan est le groupe affine  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  des transformations affines de  $\mathbb{C}$ ,*

*Démonstration.* — D'après la proposition I.1.3, un automorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}$  s'étend holomorphiquement à  $\mathbb{CP}^1$  en posant  $f(\infty) = \infty$  et cette extension est un automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$ . C'est donc une homographie qui fixe l'infini, donc une application affine de la forme  $z \mapsto az + b$ .  $\square$

Le groupe d'automorphisme du disque se détermine grâce au lemme de Schwarz (qui se montre facilement à l'aide du principe du maximum [Rud1987]) :

**Lemme I.2.5.** — *Toute fonction holomorphe  $f$  de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  fixant 0 vérifie  $|f(z)| \leq |z|$  pour  $z \in \mathbb{D}$  et  $|f'(0)| < 1$ . De plus, si  $|f'(0)| = 1$ , alors il existe  $a \in \mathbb{C}$  avec  $|a| = 1$  et  $f(z) = az$*

On obtient :

**Proposition I.2.6.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  des automorphismes du demi-plan est le groupe  $\text{PU}(1, 1)$  agissant par homographie.*

*Démonstration.* — D’abord, l’action par homographie du groupe  $\text{PU}(1, 1)$  – donnée, pour tout  $a, b$  avec  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ , par  $z \rightarrow \frac{az+b}{-bz+a}$  – envoie  $\mathbb{D}$  dans lui-même, est transitive. Donc, étant donné un biholomorphisme  $f$ , quitte à composer par une telle homographie, on peut supposer qu’il fixe 0. D’après le lemme précédent,  $|f'(z)| < 1$ . Comme ce doit être vrai pour sa réciproque, on a finalement  $|f'(0)| = 1$ , donc il existe  $t$  tel que  $f(z) = e^{it}z$ . Donc  $f$  est donnée par l’action de la matrice  $\begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$  de  $\text{U}(1, 1)$ . □

On en déduit, grâce au biholomorphisme donné entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$ , le groupe des biholomorphisme de  $\mathbb{H}$  :

**Corollaire I.2.7.** — *Les groupe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  des biholomorphismes du demi-plan est le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant par homographie.*

*Démonstration.* — On le déduit de deux remarques : l’isomorphisme donné entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$  se prolonge en un automorphisme de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . De plus, la description des automorphismes de  $\mathbb{D}$  montre que ce sont exactement les automorphismes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  qui préservent  $\mathbb{D}$ . Ainsi les automorphismes de  $\mathbb{H}$  sont les automorphismes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  préservant  $\mathbb{H}$ .

Il reste à déterminer ces derniers. S’ils préservent  $\mathbb{H}$ , ils préservent son bord  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ . On voit facilement qu’ils sont donc donnés par l’action d’un élément de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ . De plus, pour préserver  $\mathbb{H}$ , il faut que le déterminant soit positif. Donc, quitte à renormaliser, ils sont donnés par l’action d’un élément de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . □

Concluons en mentionnant les diverses transitivités de l’action de ces groupes :

1.  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  est 1-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par l’image d’un point de  $\mathbb{H}$  et d’un point de  $\partial\mathbb{H}$  (auquel l’action du groupe se prolonge par continuité).

2.  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  est 2-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de deux points distincts de  $\mathbb{C}$ .
3.  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  est 3-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de trois points distincts de  $\mathbb{CP}^1$ .

### I.3. Structures conformes

Un théorème de Gauss fournit une large source d'exemples de surfaces de Riemann. Nous expliquons ce théorème dans cette section. On peut le réinterpréter en disant que toute métrique riemannienne analytique réelle sur une surface analytique la munit d'une structure de surface de Riemann. L'interaction entre cette structure et la géométrie de la métrique est au cœur de la théorie de Hodge que nous détaillons plus loin. Gauss démontre que *toute surface (analytique) est localement conformément équivalente au plan euclidien*<sup>(1)</sup>.

On appelle *carte conforme* un système de coordonnées locales  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  dans lequel la métrique prend la forme  $m(x, y)(dx^2 + dy^2)$ . Le théorème de Gauss s'énonce alors :

***Théorème I.3.1 (Gauss).*** — *Soit  $g$  une métrique riemannienne analytique réelle, définie au voisinage d'un point  $p$  sur une surface analytique. Alors il existe une carte conforme  $V \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie sur un voisinage ouvert de  $p$  et à valeurs dans le plan euclidien.*

***Remarque I.3.2.*** — Après avoir pris des coordonnées au voisinage de  $p$ , on dispose donc d'une métrique analytique  $g$  dans un voisinage  $U$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$ .

Pour mieux comprendre la démonstration de Gauss, commençons par démontrer un théorème analogue mais dans le cas où l'ouvert  $U$  est muni d'une métrique *lorentzienne*  $g$ . On se donne donc en chaque point de  $U$  une forme quadratique de signature  $(+, -)$  et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est conforme à la métrique lorentzienne standard  $dx^2 - dy^2$  de  $\mathbb{R}^2$  (pour une généralisation évidente du concept de conformité dans le cadre lorentzien).

<sup>(1)</sup>Mentionnons que, pour Gauss, les surfaces sont plongées dans l'espace et munies de la métrique induite.

En chaque point de  $U$ , la métrique  $g$  définit deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes. Localement, on peut trouver deux champs de vecteurs non singuliers qui paramètrent ces directions. Lorsqu'on les intègre, on définit ainsi deux réseaux de courbes isotropes qui s'intersectent transversalement. Pour la métrique lorentzienne standard  $dx^2 - dy^2$ , ces courbes ne sont bien entendu que les droites parallèles de pente  $\pm 1$ .

On fixe maintenant l'origine  $O$  comme point base dans  $U$  et on choisit arbitrairement un point  $P_0$  de  $\mathbb{R}^2$ . Par le point  $O$  passent deux courbes isotropes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Par  $P_0$  passent deux droites isotropes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de la métrique lorentzienne standard de  $\mathbb{R}^2$ . On envoie  $\mathcal{C}_1$  sur  $\mathcal{D}_1$  par un difféomorphisme  $f_1$  arbitraire, et  $\mathcal{C}_2$  sur  $\mathcal{D}_2$  par un autre difféomorphisme  $f_2$ . Soit maintenant un point  $m$  de  $U$  suffisamment proche de l'origine. Par  $m$  passent deux courbes isotropes  $\widetilde{\mathcal{C}}_1$  et  $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ . Quitte à restreindre l'ouvert  $U$  en un ouvert plus petit  $V$ , on peut supposer que  $\widetilde{\mathcal{C}}_1$  intersecte  $\mathcal{C}_2$  en un seul point  $p_2$ , et l'autre,  $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ , intersecte  $\mathcal{C}_1$  en un seul point  $p_1$ .

La carte  $\psi$  que l'on cherche à construire est celle qui envoie le point  $m$  de  $V$  sur le point  $M = \psi(m)$  de  $\mathbb{R}^2$ , intersection des droites isotropes de  $\mathbb{R}^2$  passant par les points  $P_1 = f_1(p_1)$  et  $P_2 = f_2(p_2)$ . La transformation  $\psi$  ainsi définie envoie courbes isotropes de  $V$  sur droites isotropes de  $\mathbb{R}^2$  et donc directions isotropes de la métrique lorentzienne  $g$  sur  $V$  sur directions isotropes de la métrique lorentzienne standard de  $\mathbb{R}^2$  (voir figure 2). Autrement dit, on redresse les deux champs de vecteurs directeurs.

Remarquons – c'est un point crucial – que deux formes quadratiques de signature  $(+, -)$  sur un espace vectoriel réel de dimension 2 sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

On peut donc écrire  $\psi_*g = m(x, y)(dx^2 - dy^2)$  où  $m$  est une fonction qui ne s'annule pas. Autrement dit,  $\psi$  est une carte conforme et le théorème de Gauss est établi *dans le cadre lorentzien* (sans hypothèse d'analyticité).

Revenons maintenant au théorème de Gauss. Dans ce cas,  $g$  est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a pas de direction isotrope. Pour y remédier, on complexifie l'ouvert  $U$  en un ouvert  $\hat{U} \subset \mathbb{C}^2$ ; c'est un voisinage ouvert de  $U$  considéré maintenant comme contenu

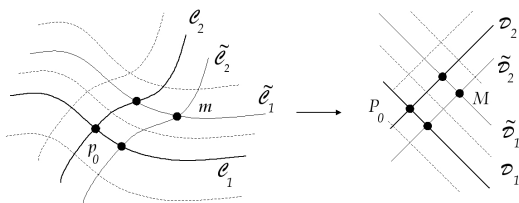


FIGURE 2. Théorème de GAUSS, version lorentzienne

dans  $\mathbb{C}^2$ . On notera  $\hat{g}_0 = dx^2 + dy^2$  la métrique « riemannienne complexe » standard de  $\mathbb{C}^2$ , où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées (complexes !) usuelles sur  $\mathbb{C}^2$  (à strictement parler ce n'est pas une métrique riemannienne puisque cette forme quadratique prend des valeurs complexes). Les coefficients de la métrique  $g$  étant des fonctions analytiques réelles, on peut – quitte à diminuer  $\hat{U}$  – prolonger  $g$  de manière unique en une métrique  $\hat{g}$  analytique complexe (*i.e.* holomorphe) sur l'ouvert  $\hat{U}$ . Puisque les coefficients de  $g$  sont réels,  $\hat{g}$  est invariant par la conjugaison complexe  $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ . Sur  $\mathbb{C}^2$  on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard  $\hat{g}_0$ , d'équations  $y = \pm ix + \text{cste}$ . Sur  $\hat{U}$  on dispose de deux champs de droites complexes holomorphes, isotropes pour la métrique  $\hat{g}$ . On les intègre pour obtenir deux champs de courbes holomorphes se coupant transversalement (ces courbes dans  $\mathbb{C}^2$  correspondent à des surfaces dans  $\mathbb{R}^4$ ).

On envoie alors l'origine  $O$  de  $U$  sur un point réel arbitraire  $P_0$  de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ . Par  $O$  passe une courbe complexe isotrope  $\mathcal{C}_1$ . Par  $O$  passe également la courbe complexe  $\mathcal{C}_2$  transformée par conjugaison complexe de la courbe  $\mathcal{C}_1$ . À l'aide de ces courbes on définit, exactement comme dans le cadre lorentzien, une transformation  $\hat{\psi}$  d'un voisinage  $\hat{V}$  de  $O$  inclus dans  $\hat{U}$ , à image dans  $\mathbb{C}^2$ . Le difféomorphisme  $\hat{\psi}$  a la propriété additionnelle d'être invariant par la conjugaison complexe. Il induit donc un difféomorphisme de  $V = \hat{V} \cap \mathbb{R}^2$  sur son image  $\hat{\psi}(V) \cap \mathbb{R}^2$ . Le fait que la complexification d'un difféomorphisme  $\psi$  préserve les directions isotropes de la complexification d'une métrique signifie précisément que la carte est conforme. Le théorème de Gauss est établi.  $\square$

Bien entendu, les cartes conformes locales  $\psi$  ne sont pas uniques. Deux d'entre elles diffèrent par une transformation conforme du plan. Il

s'agit donc de décrire la nature des transformations  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  entre ouverts de  $\mathbb{R}^2$  préservant la structure conforme standard ce qui s'exprime par  $dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2)$  pour une certaine fonction  $m$ .

Autrement dit, il faut et il suffit que la différentielle soit une similitude en tout point. Si l'on suppose que l'orientation est préservée (similitude directe), ceci s'écrit en formules

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On reconnaît bien sûr les équations de « Cauchy-Riemann » qui expriment que  $X + iY$  est une fonction holomorphe de  $x + iy$ .

Résumons ce que Gauss obtient :

*Toute surface (analytique et orientée) peut être représentée par des cartes locales conformes préservant l'orientation à valeurs dans le plan euclidien, identifié au plan complexe. Deux de ces cartes diffèrent d'un changement de cartes holomorphe.*

Toute métrique riemannienne sur une surface orientée définit donc une *surface de Riemann*.

Le théorème de Gauss que nous avons établi dans le cas des métriques analytiques réelles reste vrai pour des métriques  $C^\infty$  ou même mesurables, mais il est alors bien plus difficile. Il sera démontré par Korn en 1914 et Lichtenshtein en 1916 dans le cadre  $C^\infty$ , et finalement par Ahlfors et Bers en 1960 dans le cadre mesurable.

## I.4. Courbes elliptiques

Nous discutons ici une troisième famille d'exemples, fondamentale : les courbes elliptiques. Nous verrons germer deux idées-forces de la théorie, sur lesquelles nous reviendrons longuement : le lien entre surfaces de Riemann (compacte) et géométrie algébrique, ainsi que la détermination des fonctions à pôles et zéros fixés

### I.4.1. Définition

On a déjà mentionné le théorème d'uniformisation : toute surface de Riemann est un quotient de la sphère, du plan ou du disque. On voit qu'il n'y a pas d'automorphismes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  qui agissent sans point fixe : il n'y a

donc pas de quotients non triviaux de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . On regarde ensuite les quotients du plan  $\mathbb{C}$ . Si l'on cherche un quotient compact, il est forcément de la forme  $\mathbb{C}/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}$  :

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \text{ avec } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ deux vecteurs } \mathbb{R}\text{-indépendants de } \mathbb{C}.$$

Ces surfaces sont topologiquement des tores, et on montrera plus loin que toute surface de Riemann qui est un tore (« de genre 1 ») est de ce type. Ces tores, considérés comme surfaces de Riemann, sont appelés *courbes elliptiques*. Ils ne sont pas holomorphiquement équivalents les uns aux autres. Étant donnés deux réseaux  $\Lambda_1, \Lambda_2$  dans  $\mathbb{C}$ , il n'y a bijection holomorphe entre  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  et  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  que si  $\Lambda_2 = k\Lambda_1$  pour un certain  $k \in \mathbb{C}$  non nul. Ainsi les courbes elliptiques dépendent d'un paramètre complexe (les réseaux à homothétie près) qu'on appelle un *module*. Une particularité très importante est que ces courbes elliptiques portent une structure de groupe abélien, héritée de celle de  $\mathbb{C}$ .

#### I.4.2. Fonctions elliptiques

Considérons un réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  avec  $\omega_1, \omega_2$  deux nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  et notons  $E$  la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Le corps des fonctions méromorphes  $\mathcal{M}(E)$  définies sur la courbe  $E$  est constitué des fonctions méromorphes  $f$  dans le plan complexe qui admettent deux périodes indépendantes  $\omega_1, \omega_2$  :

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z)$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $m, n$  entiers relatifs. Ces fonctions sont appelées *fonctions elliptiques*. Il n'est pas encore clair que de telles fonctions (non-constantes) existent. Retraçons brièvement l'émergence de ces fonctions.

À partir de maintenant, on normalise notre réseau par une homotétie bien choisie, de sorte qu'il soit de la forme  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ , avec  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

*Digression historique.* — Au dix-neuvième siècle, les analystes disposaient d'un petit nombre de *fonctions élémentaires* : les polynômes et les fractions rationnelles bien sûr, les *fonctions algébriques*  $y(x)$  vérifiant une équation polynomiale  $F(x, y) = 0$  (même si elles sont multiformes) mais aussi les fonctions exponentielles et trigonométriques. La première tentative pour « trouver de nouvelles transcendentes qui enrichissent l'analyse » consiste à étudier les primitives des fonctions déjà connues.



Cette technique avait déjà fait ses preuves pour « découvrir » par exemple le logarithme

$$\log(x) = \int \frac{dx}{x}.$$

Euler, Gauss, Legendre, Abel, Jacobi, entre autres, s'attaquèrent à l'étude générale des intégrales que, suivant Jacobi, on appelle aujourd'hui *intégrales abéliennes*, c'est-à-dire de la forme

$$\int R(x, y) dx$$

où  $R$  est une fraction rationnelle en deux variables  $x, y$  et où  $y$  est une fonction algébrique de  $x$ .

La première étude est un calcul un peu « magique » fait par Euler alors qu'il commentait un article de Fagnano. Il s'agit d'étudier l'une des premières primitives qu'on ne pouvait exprimer par des fonctions élémentaires :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

qui entre dans le cadre précédent avec  $y^2 = 1 - x^4$  et  $R(x, y) = 1/y$ . Cette primitive intervient lorsque l'on veut calculer la longueur d'un arc de lemniscate dont l'équation en coordonnées polaires est  $r^2 = \sin(2\theta)$ .

Euler démontre un « théorème d'addition » en 1752 :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

avec

$$z = (x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4})/(1+x^2y^2).$$

Sa motivation provient sans aucun doute de l'intégrale analogue

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x).$$

Si bien que la formule

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

donne la formule d'addition :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

avec

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

On peut voir cette dernière formule comme la formule d'addition pour les points  $(\sqrt{1-x^2}, x)$  du cercle unité. Il faut noter qu'à ce stade, ces identités sont établies pour des  $x, y$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Mais elles posent des problèmes de choix de détermination de la racine carrée dès qu'on sort de cet intervalle. Mentionnons en outre qu'Euler ne fait pas explicitement usage de variables complexes dans ce travail.

Gauss n'a rien publié de son vivant sur le sujet mais ses lettres attestent qu'il avait compris la question, à partir de 1796. Sa première idée est d'inverser la fonction

$$a = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

et de considérer  $x$  comme une fonction de  $a$ , qu'il note  $x = \sin \operatorname{lemn}(a)$ . Là encore, on peut penser à l'analogie avec le cercle ; il est agréable de paramétrer le cercle par longueur d'arc, en sinus et cosinus. Suivant Euler, il peut établir une formule d'addition pour  $\sin \operatorname{lemn}(a+b)$  mais il ne s'arrête pas là.

Même s'il hésite encore (à cette époque) à considérer l'intégrale précédente lorsque  $x$  est un nombre complexe, il est tenté de choisir  $x$  imaginaire pur, de la forme  $iy$ , et de considérer l'intégrale

$$\int_0^y \frac{i dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

On est donc amené à poser  $\sin \operatorname{lemn}(ib) = i \sin \operatorname{lemn}(b)$ . Puisque l'on dispose d'une formule d'addition, cela permet de définir  $\sin \operatorname{lemn}(a+ib)$  en fonction de  $\sin \operatorname{lemn}(a)$  et  $\sin \operatorname{lemn}(b)$ . *La fonction elliptique sin lemn d'une variable complexe  $a+ib$  venait de naître.*

Gauss continue alors l'étude de cette fonction par analogie avec la fonction sinus. À partir de la formule d'addition, convenablement étendue sur tout  $\mathbb{R}$ , on montre que la fonction  $\sin \operatorname{lemn}$  est périodique de période

$$2\varpi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

De la même façon, on trouve une seconde période égale à  $2i\varpi^{(2)}$ . La fonction  $\text{sinlemn}$  admet donc *deux* périodes linéairement indépendantes, ce qui est la *définition* des fonctions elliptiques. La terminologie « elliptique » provient du fait que ces transcendentes interviennent non seulement pour calculer la longueur des arcs de la lemniscate, mais aussi des ellipses.

Vingt-cinq ans plus tard, Abel et Jacobi reprendront le chemin suivi par Gauss. Mais autour de 1827 ils iront beaucoup plus loin. Abel et Jacobi étudient

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

et ont la bonne idée de penser à  $x$  comme une fonction de  $u$  (sans savoir que Gauss avait eu la même idée). Le « module »  $k$  étant fixé, ils notent  $x = \text{sin am}(u)$ . Ils « établissent » que  $x$  est une fonction méromorphe uniforme et doublement périodique de  $u$ , qui vérifie une formule d'addition. Ils obtiennent par ailleurs un grand nombre de développements en séries de ces fonctions.

Jacobi développe par ailleurs des outils extrêmement puissants pour construire des fonctions elliptiques comme quotients de fonctions holomorphes. Ce sont les fonctions  $\vartheta$ . Leur écriture est relativement simple. Partant d'un paramètre  $\omega$  complexe, on pose  $p = \exp(i\pi z)$  et  $q = \exp(i\pi\omega)$ . On note alors :

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= \vartheta_1(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_2(z) &= \vartheta_2(z|\omega) = i \sum p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_3(z) &= \vartheta_3(z|\omega) = i \sum p^{2n} q^{n^2}, \\ \vartheta_4(z) &= \vartheta_4(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n} q^{n^2}.\end{aligned}$$

Lorsqu'on a  $\text{Im } \omega > 0$ , ces séries convergent et définissent des fonctions 1-périodiques de  $z$ . Elles ne sont néanmoins pas elliptiques dans le sens où elles n'ont pas d'autre période linéairement indépendante. Cependant  $\vartheta_i(z + \omega)$  s'exprime très simplement à partir de  $\vartheta_i(z)$ . Par exemple :

$$\vartheta_1(z + \omega) = -p^{-2} q^{-1} \vartheta_1(z).$$

<sup>(2)</sup> $2\varpi$  est le périmètre de la lemniscate considérée. C'est pour cette raison que la notation  $\varpi$  a été introduite.

L'intérêt est donc que des quotients de deux fonctions  $\vartheta$  peuvent être des fonctions doublement périodiques. Ainsi  $\vartheta_1/\vartheta_4$  est une fonction elliptique de périodes 1 et  $\omega$ . Les fonctions  $\vartheta$  vérifient un nombre incroyable d'identités aussi étonnantes les unes que les autres et leurs applications – notamment en théorie des nombres – n'ont cessé de prouver leur intérêt.

On peut consulter par exemple [McKMo1997, Mum1983, Mum1999], pour en savoir *beaucoup* plus.

Après 1840, la théorie des *fonctions elliptiques* se stabilise et prend la forme qu'on lui connaît aujourd'hui. Les fonctions obtenues par Abel et Jacobi comme réciproques de primitives de  $1/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$  sont des exemples de telles fonctions, mais y en a-t-il d'autres? Peut-on choisir arbitrairement les périodes?

*Théorème d'Abel-Jacobi.* — Pour construire des fonctions elliptiques, on peut aussi considérer la fonction  $\sigma$  de Weierstrass :

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}}.$$

On vérifie que  $\sigma$  est convergente et a un zéro simple en chaque point de  $\Lambda$ . Elle n'est elle non plus pas elliptique, mais on peut montrer la règle de transformation suivante : pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $n_\lambda \in \{0, 1\}$  et  $c_\lambda \in \mathbb{C}$  tels que

$$\sigma(z + \lambda) = (-1)^{n_\lambda} e^{c_\lambda(z - \frac{\lambda}{2})} \sigma(z).$$

Cette fonction permet de prouver le théorème suivant, dû à Abel et Jacobi, qui décrit les fonctions elliptiques à pôles et zéros prescrits :

**Théorème I.4.1 (Abel-Jacobi pour les courbes elliptiques)**

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  un nombre fini de points de  $E$  pondérés de poids  $n_i \in \mathbb{Z}^*$ . Alors il existe une fonction elliptique sur  $E$  ayant en chaque  $a_i$  un pôle d'ordre  $-n_i$  si  $n_i < 0$  ou un zéro de multiplicité  $n_i$  si  $n_i > 0$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \sum n_i &= 0 \\ \sum n_i a_i &= 0 \end{aligned}$$

**Remarque I.4.2.** — Une telle fonction est unique à multiplication par un scalaire près. En effet, si on dispose de deux telles fonctions, leur quotient est holomorphe sur  $E$ , donc constant.

*Démonstration.* — La condition est suffisante, et la fonction est alors donnée par les fonctions  $\sigma$ . En effet, soient  $\tilde{a}_i$  des relevés des  $a_i$  à  $\mathbb{C}$  avec  $\sum n_i \tilde{a}_i = 0$ . Alors la fonction

$$f(z) = \prod \sigma(z - \tilde{a}_i)^{n_i}$$

vérifie l'égalité :

$$f(z + \lambda) = \prod (-1)^{n_i} e^{c\lambda \sum n_i} e^{c\lambda(z - \frac{\lambda}{2}) \sum n_i - \sum n_i \tilde{a}_i} f(z).$$

L'hypothèse sur les  $n_i$  et les  $a_i$  garantit alors que cette fonction est elliptique, donc peut-être considéré comme une fonction méromorphe sur  $E$ . De plus, comme  $\sigma(z)$  a un zéro simple en tous les points du réseau,  $f$  a exactement les pôles et zéros prescrits.

Le fait que la condition soit nécessaire découle de la formule des résidus. On choisit un parallélogramme fondamental pour le réseau  $\Lambda$  tel que son bord ne contienne pas de relevé des  $a_i$ . Pour simplifier les notations, on supposera que le parallélogramme  $P$  de sommets  $0, 1, \omega$  et  $1 + \omega$  vérifie cette hypothèse. On choisit cette fois comme relevé de  $\tilde{a}_i$  celui (il est unique) qui est à l'intérieur du parallélogramme  $P$ . La formule des résidus donne alors dans un premier temps :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n_i.$$

Or la fonction  $f$  est elliptique, donc prend les mêmes valeurs sur les côtés parallèles. Comme on les parcourt une fois dans un sens, une fois dans l'autre en parcourant  $\partial P$ , cette intégrale s'annule.

Pour la deuxième condition, on calcule cette fois les résidus de  $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ . On montre (exercice) que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n_i \tilde{a}_i.$$

On décompose cette intégrale sur les 4 côtés et on les associe par côtés opposés. Par exemple, montrons que  $\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{1+\omega}^\omega z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in$

$\mathbb{Z}\omega$ . En effet, on écrit, grâce à la  $\omega$ -périodicité de  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{1+\omega}^\omega z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z + \omega) \frac{f'(z + \omega)}{f(z + \omega)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z + \omega) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= -\frac{\omega}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= -\frac{\omega}{2i\pi} [\ln(f(z))]_0^1 \end{aligned}$$

Or  $f(0) = f(1)$ , donc  $[\ln(f(z))]_0^1$  appartient à  $2i\pi\mathbb{Z}$  (seule la détermination de l'argument change, d'un multiple entier de  $2\pi$ ). Ce qui prouve le résultat annoncé.

On montre de même que la somme  $\frac{1}{2i\pi} \int_1^{1+\omega} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_\omega^0 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

Ainsi le résidu calculé appartient à  $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = \Lambda$ . En projetant dans la courbe elliptique, on a bien  $\sum n_i a_i = 0$ .  $\square$

*Diviseurs.* — On reviendra dans le chapitre VII sur ce théorème et expliquerons comment le généraliser à d'autres surfaces de Riemann. La notion cruciale sera celle de *diviseur* que nous introduisons dès maintenant.

**Définition I.4.3.** — Un diviseur sur une surface de Riemann  $S$  est la donnée d'un ensemble  $(a_i, n_i)$  fini de points pondérés par des entiers non nuls. L'ensemble des diviseurs est naturellement muni d'une structure de groupe commutatif (c'est le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par l'ensemble des points de la courbe).

Il est dit *effectif* si  $\sum n_i = 0$  et *principal* si c'est le diviseur  $\text{div}(f)$  donné par les pôles et zéros d'une fonction  $f$  méromorphe sur  $S$ .

Le théorème qu'on vient de montrer peut se réinterpréter comme l'isomorphisme de groupes :

$$\{\text{Diviseurs effectifs}\} / \{\text{Diviseurs principaux}\} \xrightarrow{\sim} E.$$

### I.4.3. Algébrisation

La fonction  $\wp$  de Weierstrass est une autre fonction elliptique fondamentale. Elle est définie par la proposition suivante :

**Proposition I.4.4.** — *Il existe une unique fonction, notée  $\wp$ , elliptique sur  $E$ , qui n'a qu'un pôle double en 0, et qui au voisinage de 0 s'écrit  $\wp(z) = z^{-2} + h(z)$ , avec  $h$  holomorphe s'annulant en 0.*

*Démonstration.* — Montrons d'abord l'unicité : si vous avez deux telles fonctions, leur différence est une fonction holomorphe sur  $E$  (on a gommé le pôle) qui s'annule en 0 (par la condition sur  $h$ ). Elle est donc constante (car  $E$  est compacte) égale à 0.

L'existence est donnée par la série

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

dont on vérifie qu'elle converge et vérifie les conditions de la proposition.  $\square$

**Remarque I.4.5.** — La fonction  $\wp$  est paire : en effet  $z \mapsto \wp(-z)$  vérifie aussi les conditions de la proposition !

On établit une *équation différentielle* pour cette fonction. Pour cela on introduit les *sommes d'Eisenstein* :

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4}$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}$$

On montre alors la

**Proposition I.4.6.** — *La fonction  $\wp$  vérifie l'équation différentielle :*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Pour montrer ce genre d'égalité, on utilise une méthode à la Liouville : la différence entre les deux membres est une fonction méromorphe elliptique et les coefficients ont été choisis pour que le pôle disparaisse. Elle est donc holomorphe sur  $E$ , donc constante. Nous prouvons seulement ici l'existence d'une équation différentielle du type  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - a\wp - b$  pour deux constantes  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* — Comme  $\wp$  est paire, son développement en série au voisinage de 0 est de la forme  $\wp(z) = z^{-2} + cz^2 + \dots$ . On obtient alors (les «...» désignent des termes de degré positifs) :

$$\begin{aligned} (\wp')^2 &= 4z^{-6} - 8cz^{-2} + \dots \\ -4\wp^3 &= -4z^{-6} - 12cz^{-2} + \dots \\ 20c\wp &= 20cz^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi  $(\wp')^2 - 4\wp^3 + 20c\wp$  n'a pas de pôle en 0, donc est holomorphe sur  $E$ , donc est constante. Un examen plus attentif des développements en série montrerait que  $20c = g_2$  et que la constante en question est  $-g_3$ .  $\square$

Concrètement, cela montre que l'application  $z \mapsto [\wp(z), \wp'(z), 1]$  pour  $z \in \mathbb{C} - \Lambda$  et  $z \mapsto (0, 1, 0)$  pour  $z \in \Lambda$ , définit un plongement holomorphe  $C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  dont l'image est la courbe algébrique projective  $C$  d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Un théorème de géométrie algébrique nous dit que  $\mathcal{M}(C) = \mathbb{C}(x, y)/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$ . On en déduit que le corps des fonctions elliptiques est

$$\mathcal{M}(E) = \mathbb{C}(\wp, \wp').$$

On verra plus tard la réciproque de cette algébrisation : toute cubique non-singulière est une courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Mais commençons par explorer plus avant le lien entre surface de Riemann et courbes algébriques.



# Courbes algébriques et surface de Riemann

Riemann introduit les surfaces de Riemann afin de rendre uniformes des « fonctions » multiformes (fonctions algébriques, logarithme, *etc.*...) en « dédoublant » la variable :

Il remplace  $\mathbb{C}$  par une surface qui est localement homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{C}$  et « étendue au-dessus du plan », c'est-à-dire munie d'une projection

$$X \rightarrow \mathbb{C}$$

aussi loin que la fonction se *prolonge analytiquement*. Nous commençons par rappeler cette construction.

## II.1. Surface de Riemann d'un germe de fonction

Soit  $f : (\mathbb{C}, x_0) \rightarrow \mathbb{C}$  un *germe d'une fonction holomorphe*, c'est-à-dire une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - x_0)^n$$

avec un rayon de convergence strictement positif (de sorte que  $f$  n'est bien définie que sur un petit voisinage de  $x_0$ ). Nous allons associer à  $f$  une surface  $X$  – et une projection holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{C}$  – sur laquelle le germe  $f$  peut être prolongé analytiquement.

**La construction**

Soit

$$\mathcal{G} = \left\{ (x, f) \mid x \in \mathbb{C} \text{ et } f \text{ germe d'une fonction holomorphe } (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C} \right\}.$$

muni de la topologie engendrée par les

$$\mathcal{U}(U, \varphi) = \left\{ \text{germes } \varphi_x = (x, \varphi) \mid x \in U \right\}$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.

En particulier, l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_x = (x, \varphi) & \mapsto x \end{cases}$$

est continue et induit des homéomorphismes locaux en restriction aux ouverts  $\mathcal{U}(U, \varphi)$ .

**Lemme II.1.1.** — *L'espace topologique  $\mathcal{G}$  est séparée.*

*Démonstration.* — Deux germes basés en deux points différents sont déjà séparés par la fonction continue  $\pi$ . Prenons maintenant  $\varphi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\psi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$  deux germes basés en  $x$ . Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $x$  tel que  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  soient les germes de  $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Si on a un germe dans l'intersection  $\mathcal{U}(U, \varphi) \cap \mathcal{U}(U, \psi)$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident sur un ouvert de définition du germe commun et sont donc égales, ce qui implique  $\varphi_x = \psi_x$ . Ainsi, si  $\varphi_x \neq \psi_x$ , les ouverts  $\mathcal{U}(U, \varphi)$  et  $\mathcal{U}(U, \psi)$  sont disjoints, et séparent donc les deux germes.  $\square$

L'espace  $\mathcal{G}$  est donc naturellement une « surface de Riemann » **non connexe** (la surface ainsi obtenue n'est pas à base dénombrable d'ouverts), et l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}) & \mapsto \varphi_x(x) \end{cases}$$

est holomorphe.

**Définition II.1.2.** — *La surface de Riemann associée au germe*

$$f : (\mathbb{C}, x_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

est la composante connexe  $\mathcal{S}(f)$  de  $\mathcal{G}$  contenant  $f$ .

La surface  $\mathcal{S}(f)$  vient avec deux applications holomorphes : la projection

$$\pi : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathbb{C}$$

et l'application

$$\hat{f} = F_{\mathcal{S}(f)} : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui « détermine »  $f$ . L'existence de fonctions méromorphes est un phénomène général que nous démontrerons plus loin (c'est un cas particulier du théorème de Riemann-Roch) :

**Théorème II.1.3.** — *Toute surface de Riemann  $X$  possède des fonctions méromorphes non constantes. De plus, quitte à lui enlever un nombre fini de points,  $X$  est isomorphe à une surface  $\mathcal{S}(f)$ .*

**Remarque II.1.4.** — Le théorème de Poincaré-Volterra<sup>(1)</sup> implique que  $\mathcal{S}(f)$  (et donc toute surface de Riemann) est à base dénombrable d'ouverts.

On peut imiter la construction de  $\mathcal{S}(f)$  en étudiant d'autres classes de régularités de germes. Par exemple, on pourrait construire de la même façon le prolongement méromorphe maximal. Plus généralement, ce processus a été étendu à un faisceau sur un espace topologique, fournissant ce que l'on appelle *l'espace étalé* associé au faisceau.

## Exemples

1. Un exemple fameux est celui de la *surface de Riemann associée au logarithme*. On l'obtient en appliquant la construction précédente à

$$(x_0, f) = \left( 1, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \right).$$

La surface de Riemann associée  $\mathcal{S}(f)$  est un revêtement (non ramifié) de  $\mathbb{C}^*$  de degré infini. Elle est biholomorphe à  $\mathbb{C}$  *via* l'application « exponentielle » :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{S}(f) \\ x &\mapsto \left( e^x, x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n} (z - e^x)^n \right). \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup>Selon lequel *un espace connexe étalé au-dessus d'un espace séparé à base dénombrable d'ouverts est lui-même à base dénombrable d'ouverts.*

2. Un autre exemple est celui de la racine carrée au voisinage de 1. On écrit

$$\sqrt{z} = \sqrt{1 + (z - 1)}$$

et on fait de même. La surface de Riemann associée  $\mathcal{S}(f)$  est un revêtement (non ramifié) de  $\mathbb{C}^*$  de degré 2. Elle est biholomorphe à  $\mathbb{C}^*$  via l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathcal{S}(f) \\ x &\mapsto \left( x^2, x + \frac{1}{2} \left( \frac{z-x^2}{x} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

## II.2. Surfaces de Riemann épointées et revêtements ramifiés

**Définition II.2.1.** — Une surface de Riemann compacte épointée est une surface de Riemann  $X$  telle qu'il existe un ouvert  $U \subset X$  tel que :

1. Il existe un biholomorphisme entre  $U$  et la réunion disjointe d'un nombre fini de disques épointés  $\{0 < |z| < 1\}$ .
2.  $X - U$  est compact.

On peut associer à toute surface de Riemann compacte épointée  $X$  une surface de Riemann  $\widehat{X}$  en recollant à  $X$  une union disjointe finie de disques  $\{|z| < 1\}$ . La surface  $\widehat{X}$  est compacte et contient  $X$ ; de plus  $\widehat{X} - X$  est un ensemble fini. Ces propriétés caractérisent  $\widehat{X}$  qui est donc bien définie.

**Remarque II.2.2.** — Si  $X$  est une surface de Riemann compacte épointée et  $\Sigma$  est un sous-ensemble fini de  $X$  alors  $X - \Sigma$  est encore une surface de Riemann compacte épointée et  $\widehat{X} = \widehat{X - \Sigma}$ .

**Proposition II.2.3.** — Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann,  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe,  $x_0$  un point de  $X$  et  $y_0 = f(x_0)$  son image par  $f$ . On suppose  $f$  non constante au voisinage de  $x_0$ . Soit  $\psi$  une carte de  $Y$  centrée en  $y_0$  avec  $\psi(y_0) = 0$ . Alors il existe une carte  $\varphi$  de  $X$  centrée en  $x_0$  telle que, dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$ , la fonction  $f$  prend la forme  $z \mapsto z^d$ , où  $d$  est un entier naturel indépendant des cartes.

*Démonstration.* — Soit  $\varphi_0$  une carte de  $X$  centrée en  $x_0$  telle que  $\varphi_0(x_0) = 0$ . Alors l'application  $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}$  est holomorphe et vérifie  $\hat{f}(0) = 0$ . On écrit :

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Soient  $d = \min\{k : a_k \neq 0\}$  et  $c = a_d^{1/d}$ . On a alors :

$$\hat{f}(z) = (cz)^d(1 + u(z))$$

avec  $u$  holomorphe et  $u(0) = 0$ . Mais  $w \mapsto w^{1/d}$  est holomorphe au voisinage de 1. On peut donc écrire  $1 + u = h^d$  avec  $h$  holomorphe au voisinage de 0 et  $h(0) = 1$ . Finalement on a

$$\hat{f}(z) = (czh(z))^d.$$

Posons alors  $\varphi(x) = c\varphi_0(x)h(\varphi(x))$ . Le théorème d'inversion local implique que  $\varphi$  définit une carte locale au voisinage de  $x_0$  et, dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$ , la fonction  $f$  prend la forme  $z \mapsto z^d$ .

Enfin, si dans des cartes  $\varphi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  et  $\psi : (V, y_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , la fonction  $f$  se lit  $z \mapsto z^d$ , alors pour tout  $y \in V - \{y_0\}$ , on a :

$$\#f^{-1}(y) \cap U = d.$$

L'entier  $d$  est donc indépendant des cartes. □

**Définition II.2.4.** — Soient  $f$  en  $x_0$  comme dans la proposition. On appelle *ordre de ramification* de  $f$  en  $x_0$  l'entier  $d$ .

La proposition II.2.3 conduit naturellement à introduire la notion de revêtement ramifié :

**Définition II.2.5.** — Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux surfaces de Riemann est un *revêtement ramifié* si il existe un ensemble discret  $S \subset Y$  tel que :

1. L'application  $f|_{f^{-1}(Y-S)}$  est un revêtement.
2. Pour tout  $x_0 \in f^{-1}(S)$ , il existe des cartes  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$$

On appelle  $d$  l'*ordre de ramification* de  $f$  en  $x_0$ ; on le note  $v(x_0)$ . Par extension, l'ordre de ramification de  $f$  en un point de  $X - f^{-1}(S)$  est 1.

*Exemples.* — 1. Tout revêtement est un revêtement ramifié; l'ordre de ramification en tout point vaut 1.

2. Il découle de la proposition II.2.3 que toute application holomorphe *non constante*  $f : X \rightarrow Y$  entre surfaces de Riemann compactes est un revêtement ramifié.

Par transport de structure, tout revêtement « topologique » d'une surface de Riemann est naturellement muni d'une structure de surface de

Riemann qui rend la projection de revêtement holomorphe. Un isomorphisme de revêtement devient alors un biholomorphisme.

**Lemme II.2.6.** — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement fini (non ramifié) d'une surface de Riemann compacte épointée  $Y$ . Alors  $X$  est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte épointée qui rend  $f$  holomorphe. De plus  $f$  s'étend de manière unique en  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  holomorphe.

*Démonstration.* — Seule la deuxième partie du lemme reste à démontrer. Quelque soit  $y \in \hat{Y} - Y$ , on fixe un voisinage  $D_y$  de  $y$  biholomorphe au disque unité tel que si  $y$  et  $y'$  sont deux points distincts de  $\hat{Y} - Y$ , alors  $D_y \cap D_{y'} = \emptyset$ . L'application  $f|_{f^{-1}(D_y - \{y\})}$  induit alors un revêtement fini de  $D_y - \{y\}$ .

Puisque  $D_y - \{y\}$  est biholomorphe au disque épointé  $\{0 < |z| < 1\}$  et que les revêtements connexes du disque unité privé de 0 sont déterminés par le degré et tous biholomorphes au disque épointé, on en déduit que l'ouvert

$$U = \bigcup_{y \in \hat{Y} - Y} f^{-1}(D_y - \{y\})$$

est biholomorphe à une réunion finie de disques épointés. La surface de Riemann  $X$  est donc une surface de Riemann compacte épointée. Il lui correspond donc la surface de Riemann compacte  $\hat{X}$ .

Enfin, pour toute composante connexe  $\Delta$  de  $U$ , l'image de la restriction  $f|_{\Delta}$  est contenue dans un  $D_y$ . Par extension des fonctions holomorphes bornées (cf. proposition I.1.3), l'application  $f$  s'étend (de manière unique) à  $\hat{X}$  en une application holomorphe  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  (qui peut être ramifiée au-dessus de  $\hat{Y} - Y$ ).  $\square$

*Exemple.* — Soit  $S \subset \mathbb{C}P^1$  un sous-ensemble fini et soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}P^1 - S$  un revêtement (non ramifié) fini. Alors  $X$  est une surface de Riemann compacte épointée.

Nous allons maintenant voir, en retour, comment ce point de vue « topologique » éclaire l'étude des courbes algébriques.

### II.3. Courbes algébriques et normalisation

Soit  $P \in \mathbb{C}[x, y]$  un polynôme irréductible (non-constant). Alors

$$C_P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \right\}$$

est une sous-variété complexe de dimension 1 dans  $\mathbb{C}^2$ ; c'est donc une surface de Riemann.

*Exemples.* — 1. Soit  $P(x, y) = x^2 - y^3$ . Alors

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} : x^2 = y^3\}$$

et l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow C_P \\ t & \mapsto (t^3, t^2) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

La courbe  $C_P$  est ce que l'on appelle une *courbe rationnelle* c'est-à-dire qu'elle peut être paramétrée par des fractions rationnelles :

$$x = p(t)/r(t) \quad ; \quad y = q(t)/r(t)$$

où  $p, q$  et  $r$  sont des polynômes en une variable (complexe)  $t$ , ce paramétrage étant une bijection en dehors d'un nombre fini de valeurs de  $t$ . Toute *conique* ou toute *cubique singulière* est rationnelle :

- Si  $C$  est une conique,  $m$  un point sur  $C$  et  $D$  une droite projective qui ne passe pas par  $m$  (voir figure 1), alors pour chaque point  $t$  de  $D$ , la droite  $mt$  coupe la conique en deux points dont l'un est  $m$ . Si l'on désigne par  $\gamma(t)$  l'autre point, l'application  $\gamma : D \rightarrow C$  est un paramétrage rationnel de  $C$ .
- Une cubique présentant un point double est également une courbe rationnelle. Il suffit de prendre une droite qui ne passe pas par le point singulier et de joindre chaque point de cette droite au point double (voir figure 1). L'intersection est constituée de trois points, deux d'entre eux étant le même point multiple situé au point singulier. Le troisième définit un paramétrage rationnelle, par la droite, de la cubique. Par exemple, l'origine est un point double de la courbe  $y^2 = x^2(1 - x)$ . Choisissons la droite  $x = 2$ . La droite passant par l'origine et le point  $(2, t)$  a comme équation  $y = tx/2$  et son intersection avec la cubique est donnée par  $t^2x^2/4 = x^2(1 - x)$ . Lorsqu'on retire la solution double  $x = 0$ , on trouve  $x = 1 - t^2/4$  et donc

$y = t(1 - t^2/4)/2$  et nous avons bien un paramétrage rationnel de la courbe.

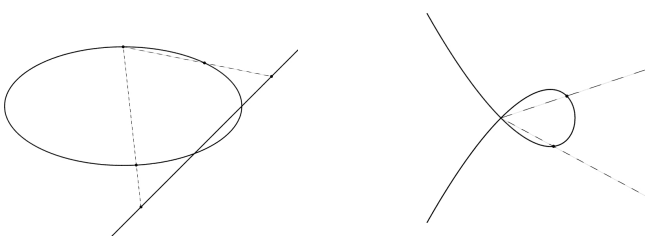


FIGURE 1. Paramétrage d'une conique et d'une cubique singulière

Les courbes rationnelles sont très intéressantes mais nous verrons qu'elles ne constituent qu'une petite partie des courbes algébriques.

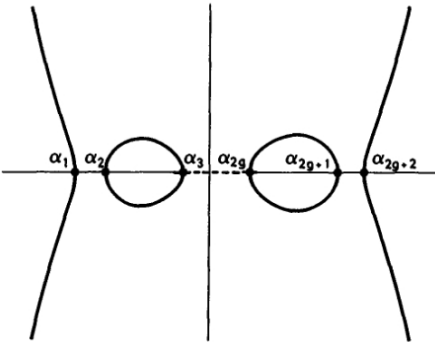


FIGURE 2. Les points réels de la courbe  $C_P$

2. Soit  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  un polynôme à racines simples. Alors  $P(x, y) := y^2 - Q(x)$  est irréductible et

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = Q(x)\}$$

est une surface de Riemann. Si

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \alpha_i),$$



(voir la figure 2, tirée des notes de J.-B. Bost [Bos1992]) alors l'application

$$\begin{cases} C_P & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

est un revêtement de degré 2 ramifié en  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g+2}$ . La courbe  $C_P$  est donc homéomorphe à une surface de genre  $g$  privé de 2 points (voir la figure 3, tirée des notes de J.-B. Bost [Bos1992]).

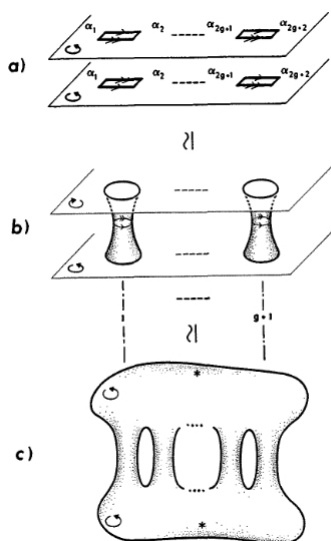


FIGURE 3. Topologie de la courbe  $C_P$

On va maintenant chercher à mieux comprendre la courbe  $C_P$  ou plutôt la *surface de Riemann compacte* associée à  $C_P$  :

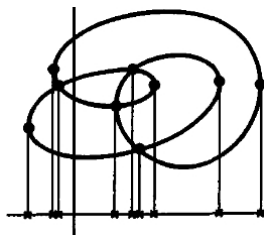
Supposons  $P \notin \mathbb{C}[x]$ , c'est-à-dire que  $C_P$  n'est pas une droite parallèle à l'axe des  $y$ . Notons  $n$  le degré de  $y$  dans  $P(x, y)$ . Alors

$$S_0 := \{x \in \mathbb{C} : P(x, \cdot) \text{ est de degré } < n \text{ ou a une racine multiple}\}$$

est un sous-ensemble *fini* de  $\mathbb{C}$ , voir figure 4.

Posons alors

$$X := \{(x, y) \in C_P : x \notin S_0\}, \quad S := S_0 \cup \{\infty\}.$$

FIGURE 4. La courbe  $C_P$  et l'ensemble  $S_0$ 

L'application

$$\pi : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{C} - S_0 = \mathbb{CP}^1 - S \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

est un revêtement (non ramifié) de degré  $n$ . Le lemme II.2.6 implique alors que  $X$  est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte époincée et donc  $C_P$  aussi.

**Définition II.3.1.** — La surface de Riemann compacte  $\widehat{X} = \widehat{C}_P$  est canoniquement associée à la courbe algébrique définie par  $P$ ; on l'appelle la *normalisation* de  $C_P$ .

*Exemples.* — 1. Si  $P(x, y) = x^2 - y^3$ . Alors  $\widehat{C}_P$  est isomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

2. Si  $P(x, y) = y^2 - Q(x)$  avec  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  un polynôme à racines simples de degré  $2g + 1$  ou  $2g + 2$  alors  $\widehat{C}_P$  est une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Les surfaces de ce type sont appelées *surfaces de Riemann hyperelliptiques*.

### Équivalence birationnelle

Nous avons pour l'instant considéré les courbes algébriques comme des sous-ensembles de  $\mathbb{C}^2$  définis comme le lieu d'annulation d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}(x, y)$ . Cependant, il est par de nombreux aspects plus intéressant de les considérer comme des sous-ensembles de  $\mathbb{CP}^2$  définis comme le lieu d'annulation d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  homogène. Le passage d'un point de vue à l'autre se fait dans un sens en homogénéisant  $P$  : on écrit  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$  et on supprime les dénominateurs. Dans l'autre sens, on se restreint à un plan affine dans le plan projectif en ôtant une droite « à l'infini ». Le point de vue projectif permet de mieux comprendre quelles sont les différentes courbes algébriques dont on voudrait dire qu'elles sont « les mêmes ». Il semble évident qu'un changement

de coordonnées projectives (soit l'action d'un élément de  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ ) ne change pas les propriétés de la courbe. Cependant, on peut aller plus loin : une transformation polynomiale des coordonnées ne change pas intrinsèquement la courbe : la surface de Riemann associée reste inchangée. Prévenons le lecteur que les points de vue affine et projectif sur les courbes algébriques cohabitent dans ces notes.

Deux courbes algébriques projectives  $\bar{F}(X, Y, Z) = 0$  et  $\bar{G}(X, Y, Z) = 0$  sont donc dites *birationnellement équivalentes* si l'on peut trouver une transformation non linéaire  $(X, Y, Z) \mapsto (p(X, Y, Z), q(X, Y, Z), r(X, Y, Z))$  dont les coordonnées sont des polynômes homogènes de même degré, qui envoie « bijectivement » la première courbe sur la seconde. Les guillemets sont relatifs au fait que cette transformation n'est pas nécessairement définie partout ni injective. On demande précisément qu'il existe un ensemble fini de points sur chaque courbe tels que la transformation envoie bijectivement le complémentaire du premier sur le complémentaire du second.

L'un des intérêts de ces transformations birationnelles est qu'il permet de se débarrasser du problème des *points singuliers*. L'analyse locale des points singuliers des courbes complexes s'avère en effet incroyablement riche : initiée par Newton puis développée par, leur description topologique est liée à la théorie des nœuds, mais nous n'en dirons pas plus.

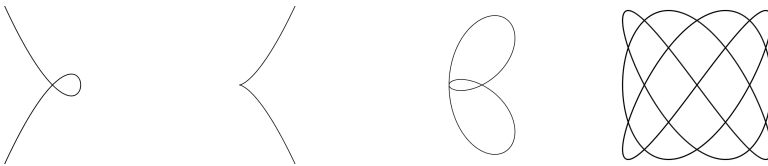


FIGURE 5. Quelques points singuliers

La normalisation – ou surface de Riemann compacte associée – est un invariant birationnel des courbes algébriques ; cela permet donc de classer les courbes à équivalence birationnelle près. Ainsi les courbes *rationnelles*, c'est-à-dire les courbes birationnellement équivalentes à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , sont de genre 1. Comme annoncée plus haut, on constate donc que les courbes rationnelles ne constituent qu'une petite partie des courbes algébriques. On peut aussi s'en convaincre par un argument de comptage : On peut constater que la courbe définie par  $x = p(t)/r(t)$  ;  $y = q(t)/r(t)$

est de degré<sup>(2)</sup>  $d$  (où  $d$  est le plus grand des degrés des polynômes  $p, q, r$ ) : il suffit en effet de compter le nombre de points d'intersection avec une droite générique qui est une équation de degré  $d$ . L'espace des triplets de polynômes de degrés  $d$  est de dimension  $3(d+1)$ . Bien sûr, on peut multiplier  $p, q, r$  par le même scalaire ou effectuer sur  $t$  une homographie (qui dépend de trois paramètres) sans changer la courbe. On obtient donc que l'espace des courbes rationnelles dépend d'au plus  $3d-1$  paramètres. Maintenant le décompte des coefficients dans un polynôme en deux variables montre que l'espace des courbes algébriques dépend de  $d(d+3)/2$  paramètres. Dès que  $d \geq 3$ , on obtient  $d(d+3)/2 > 3d-1$  si bien que *les courbes algébriques de degré au moins 3 ne sont en général pas des courbes rationnelles.*

### Lien avec la construction par prolongement analytique

L'équation  $P(x, y) = 0$  définit implicitement la fonction algébrique  $y(x)$ . Le graphe de  $y$ , dans  $\overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y$ , est en effet défini par l'équation polynomiale irréductible  $P(x, y) = 0$ . Soit  $X$  la surface de Riemann associée à la partie régulière de la fonction, c'est-à-dire

$$X = \mathcal{S}(f),$$

où  $f$  est n'importe lequel des germes réguliers (holomorphes et unimorphes) de  $y$ . Alors l'application

$$\begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, y(x)) \end{cases}$$

induit un isomorphisme entre  $X$  et l'ouvert de  $C_P$  obtenu en enlevant l'ensemble fini

$$\left\{ (x, y) \in C_P : \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

des points de  $C_P$  où la projection  $(x, y) \mapsto x$  est ramifiée. La surface  $\widehat{X}$  est donc une *désingularisation* (ou *normalisation*) de la courbe définie par l'équation  $P(x, y) = 0$ ; elle est unique.

**Remarque II.3.2.** — Riemann désingularise ainsi les courbes algébriques *via* la monodromie locale des déterminations de  $y$ . Il court-circuite ainsi l'*algorithme de Newton-Puiseux*.

<sup>(2)</sup>Ce degré est le degré de la projection sur la coordonnée  $x$ , ou de la projection sur toute droite projective

*Exemples.* — 1. Considérons l'équation  $y^2 = x^2 + 1$ . La surface de Riemann associée est  $\widehat{X}$  où  $X$  est la surface de Riemann de n'importe quel germe régulier de

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{(x - i)(x + i)}.$$

Or la fonction  $y$  détermine un germe régulier au voisinage de tout point de  $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ . Il lui correspond la surface de Riemann compacte épointée  $X$  qui est un revêtement (non ramifié) de degré 2 au-dessus de  $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ . De plus le revêtement correspond au noyau du morphisme  $\pi_1(\mathbb{C} - \{\pm i\}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui envoie chacun des générateurs de  $\pi_1(\mathbb{C} - \{\pm i\})$  (c'est-à-dire les classes des lacets autour de  $\pm i$ ) sur la classe de 1 dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le revêtement correspondant est isomorphe au plan privé de 3 points et donc  $\widehat{X}$  est de genre 0 isomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

2. On peut de même considérer le germe

$$y = \sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

On procède de même, sauf que le groupe fondamental de  $\mathbb{C} - \{\alpha, \beta, \gamma\}$  est maintenant un groupe libre sur 3 générateurs. La monodromie locale autour de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  est encore d'ordre 2. On obtient donc un revêtement de degré 2 qui se compactifie de manière unique en une surface de Riemann  $\widehat{X}$  de genre 1 (homéomorphe au tore).

## II.4. Algébrisation des surfaces de Riemann compactes

Tout germe de fonction algébrique  $f$  donne naturellement naissance à une surface de Riemann compacte  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$ , son prolongement analytique méromorphe maximal. On s'intéresse ici à la réciproque de ce théorème : si le prolongement analytique méromorphe maximal de  $f$  est compact, alors  $f$  est algébrique.

En anticipant sur la théorie de Riemann-Roch, remarquons que toute surface de Riemann (abstraite) porte suffisamment de fonctions méromorphes pour séparer les points.<sup>(3)</sup> Cela permet de montrer le théorème suivant.

<sup>(3)</sup>C'est évidemment le cas des fonctions  $\pi$  et  $\widehat{f}$  sur  $\mathcal{S}(f)$ .

**Théorème II.4.1.** — *Toute surface de Riemann  $X$  compacte  $X$  est isomorphe à la surface de Riemann  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$  associée à un germe de fonction algébrique  $f$ .*

*Démonstration.* — Soit  $f_1$  une fonction méromorphe non constante sur  $X$ . On voit  $f_1$  comme un revêtement ramifié de degré  $d$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , et on considère l'une de ses fibres génériques  $\{P_1, \dots, P_d\}$ . Soit alors  $f_2$  une fonction méromorphe qui sépare ces  $d$  points.<sup>(4)</sup>

L'image  $C$  par  $(f_1, f_2)$  est une courbe analytique de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1_z \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1_w$ . Nous voulons montrer que cette courbe est algébrique.

Soit  $S$  l'ensemble fini des points de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  au-dessus desquels  $f_1$  ramifie. Soit  $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - S$ . Posons  $f_1^{-1}(z) = \{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$ . On prendra garde au fait que les  $P_i(z)$  sont multiformes : l'ensemble  $\{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$  est bien défini mais il n'est pas possible d'ordonner ses éléments pour former  $d$  fonctions holomorphes globales sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - S$ .

Les ordonnées des  $d$  points où la droite  $\{z\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1_w$  coupe  $C$  sont données par

$$w_i(z) = f_2(P_i(z))$$

pour  $i$  variant de 1 à  $d$ . Là encore, on obtient ainsi  $d$  « fonctions »  $w_i$  multiformes sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - S$ . Pour conclure, on fait usage des fonctions symétriques des  $w_i(z)$  :

$$\begin{aligned} S_1(z) &= w_1(z) + \dots + w_d(z), \\ S_2(z) &= w_1(z)w_2(z) + \dots + w_{d-1}(z)w_d(z), \\ &\vdots \\ S_d(z) &= w_1(z) \cdots w_d(z). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont méromorphes sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1_z$  ; ce sont donc des fractions rationnelles en la variable  $z$ . Le polynôme  $P(z, w)$  obtenu à partir de  $w^d - S_1(z)w^{d-1} + \dots + (-1)^d S_d(z)$  par multiplication par un polynôme convenable de  $z$ , pour chasser les dénominateurs, a pour lieu d'annulation la courbe  $C$ . La surface de Riemann  $X$  n'est autre que la surface de Riemann de n'importe quel germe  $w(z)$  annulant le polynôme  $P$  : elles

<sup>(4)</sup>Dans cette démonstration on peut prendre  $X = \widehat{\mathcal{S}(f)}$ ,  $f_1 = \pi$  et  $f_2 = \widehat{f}$ . L'application  $(f_1, f_2)$  est alors obtenue en prolongeant holomorphiquement à  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$  l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S}(f) & \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, \varphi) & \mapsto (x, \varphi(x)). \end{cases}$$

sont toutes les deux compactes et coïncident en dehors d'un nombre fini de points.  $\square$

Remarquons que nous avons montré que le corps  $\mathbb{C}(f_1, f_2)$  est de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}(f_1)$ . La même preuve montre que pour toute autre fonction méromorphe  $g$ , le corps  $\mathbb{C}(f_1, g)$  est de degré au plus  $d$ . Ainsi, d'après le théorème de l'élément primitif, le corps engendré par  $f_1, f_2$  et  $g$  est le même que celui engendré par  $f_1$  et  $f_2$ . Finalement le corps des fonctions méromorphes sur  $X$  est  $\mathbb{C}(f_1, f_2)$ .

On déduit de ces considérations que si l'on choisit deux autres fonctions  $f'_1$  et  $f'_2$  comme dans la démonstration ci-dessus, alors la courbe  $C'$  construite est birationnellement équivalente à  $C$  : en effet  $f'_1$  et  $f'_2$  s'écrivent comme fonctions rationnelles de  $f_1$  et  $f_2$ . Cela a pour conséquence que deux surfaces de Riemann isomorphes donnent naissance à une unique courbe algébrique à transformation birationnelle près.

Notons que le théorème II.4.1 peut être rendu plus précis :

**Théorème II.4.2.** — *Toute surface de Riemann compacte  $X$  admet une immersion dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , injective en dehors d'un nombre fini de points, et dont l'image est une courbe algébrique  $C$  qui ne présente comme singularités que des points doubles à tangentes distinctes.*

Pour se convaincre de ceci, on plonge tout d'abord la surface de Riemann dans un espace projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Ce plongement est donné en coordonnées projectives par

$$z \mapsto (1 : f_1(z) : f_2(z) : \cdots : f_n(z))$$

où l'on aura rajouté aux deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  précédemment construites ce qu'il faut de fonctions  $f_i$  méromorphes sur  $X$  pour supprimer les accidents :

- lorsque chaque  $f_i$  prend la même valeur sur deux points donnés de  $X$ , on ajoute une fonction prenant des valeurs distinctes en ces deux points ;
- lorsqu'un point de  $X$  est critique pour tous les  $f_i$ , on ajoute une fonction régulière en ce point.

On peut construire ces fonctions à la main à partir de  $f_1$  et  $f_2$  (dans le corps engendré) ou encore mieux, avec l'aide du théorème de Riemann-Roch. Ceci étant fait, une projection linéaire générique  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  nous fournit l'immersion cherchée.





# Classification topologique des surfaces

L'existence de fonctions méromorphes peut être utilisée pour démontrer la caractérisation topologique suivante des surfaces de Riemann :

***Théorème III.0.3.*** — *Toute surface de Riemann est triangulable et orientable. Réciproquement, toute surface (réelle) triangulable et orientable peut être munie d'une structure de surface de Riemann.*

***Remarque III.0.4.*** — En fait toute surface topologique (dénombrable à l'infini) peut être triangulée mais de manière plus fondamentale la bonne catégorie « topologique » est celle des surfaces triangulées.

On commence par donner quelques idées de la démonstration du théorème III.0.3.

## III.1. Surfaces orientables et triangulables

***Proposition III.1.1.*** — *Toute surface de Riemann est orientable.*

*Démonstration.* — Une application holomorphe est une application conforme qui préserve l'orientation : En effet, une application  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  entre ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est conforme si et seulement si

$$dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

L'application  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  est donc conforme et préserve l'orientation si et seulement si sa différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial X/\partial x & \partial X/\partial y \\ \partial Y/\partial x & \partial Y/\partial y \end{pmatrix}$$

est une similitude directe, c'est-à-dire la composée d'une rotation positive avec une homothétie. Cette dernière condition est équivalente aux *équations de Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

qui caractérisent les fonctions holomorphes. □

**Définition III.1.2.** — Soit  $T$  le triangle de sommets de  $0, 1$  et  $e^{i\pi/3}$  dans  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Un *2-simplex* d'une surface  $X$  est une injection continue  $T \hookrightarrow X$ ; l'image est un *triangle* avec 3 arêtes et 3 sommets. Une surface  $X$  est *triangulable* si elle admet une triangulation, c'est-à-dire qu'il existe des 2-simplexes  $f_i : T \hookrightarrow X$  dont les images recouvrent  $X$  et tels que pour tout point  $P \in X$  :

1. Si  $P$  n'est pas sur un arête, il appartient à un unique triangle  $f_i(T)$  qui est alors un voisinage de  $P$ .
2. Si  $P$  est sur une arête  $a$ , mais pas sur un sommet, il appartient exactement à 2 triangles  $t_i = f_i(T)$  et  $t_j = f_j(T)$  tel que  $t_i \cap t_j = a$  et  $t_i \cup t_j$  est un voisinage de  $P$ .
3. Si  $P$  est un sommet, il appartient à un nombre fini de triangles  $t_1, \dots, t_k$ ; ceux-ci ont  $P$  comme sommet, leur réunion est un voisinage de  $P$  et  $t_i$  et  $t_{i+1}$  ( $i \bmod k$ ) ont exactement une arête en commun.

**Remarque III.1.3.** — Soit  $X$  une surface triangulable. Alors,  $X$  est compacte si et seulement si toute (une) triangulation est finie.

**Proposition III.1.4.** — *Toute surface de Riemann (compacte)  $X$  est triangulable.*

*Démonstration dans le cas où  $X$  est compacte.* — Il existe une fonction holomorphe non-constante  $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . C'est un revêtement ramifié. Soit  $S \subset \mathbb{CP}^1$  l'ensemble fini des points au-dessus desquels  $f$  ramifie. Il existe une triangulation  $\tau$  de  $\mathbb{CP}^1$  telle que tous les points de  $S$  sont des sommets de  $\tau$ . Alors  $f^{-1}(\tau)$  est une triangulation. □

**Remarque III.1.5.** — Il est plus généralement vrai que toute surface topologique compacte, ou plus généralement à base dénombrable d'ouverts, est triangulable; c'est un théorème de Rado [Rad1925]. D'après le théorème de Poincaré-Volterra toute surface de Riemann est à base dénombrable d'ouverts, la proposition III.1.4 est donc vraie pour toute surface de Riemann.

La proposition suivante est laissée en exercice.

**Proposition III.1.6.** — *Toute surface triangulable et orientable peut être munie d'une structure de surface de Riemann.*

On en déduit le théorème III.0.3 de caractérisation topologique des surfaces de Riemann.

### III.2. Classification topologique des surfaces compactes orientables

Soit  $X$  une surface topologique compacte orientable triangulée. On note  $\tau$  la triangulation. Soient  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ( $n > 1$ ) les triangles de  $\tau$  énumérés de telle manière que  $T_{i-1}$  et  $T_i$  aient une arête en commun. En recollant par récurrence les  $T_i$ , on obtient un polygône à  $2n$  côtés deux à deux identifiés.

Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans les côtés de ce polygône de manière à le ramener à une *forme normale*: L'orientation de la surface définit un sens de parcours du bord; en énumérant dans l'ordre les arêtes (sur lesquelles on aura choisi une fois pour toutes une orientation) représentées par les côtés du polygône, on obtient un symbole de type  $abc b^{-1} d a^{-1} \dots$  où chaque lettre apparaît une fois sans exposant (lorsque l'orientation de l'arête coïncide avec celle du polygône) et une fois avec exposant  $-1$  (car, des deux triangles bordant une arête, un exactement a une orientation compatible avec celle de l'arête).

**Définition III.2.1.** — On appelle forme normale un symbole du type

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

pour un certain  $g \geq 1$  ou  $a a^{-1}$  si  $g = 0$ .

Noter, qu'après identification, il correspond à une forme normale une somme connexe de  $g$  tores (surface de genre  $g$ ), si  $g \geq 1$ , et une sphère si  $g = 0$ .

La réduction à une forme normale se fait à travers une suite d'opérations qui simplifient la structure des identifications au bord du polygône.

**Première étape**

On commence par se ramener à un polygône dont tous les sommets sont identifiés. En effet : partant de  $ab \cdots b^{-1} \cdots$  où  $a$  est une arête allant d'un sommet  $p$  à un sommet  $q \neq p$  et  $b$  une arête allant de  $q$  à un sommet  $r$ , l'opération consistant à couper le polygône le long d'une diagonale  $pr$  et de coller  $b$  sur  $b^{-1}$  permet de remplacer le sommet  $q$  par un sommet  $p$ , voir la figure 1 tiré du livre de Reyssat [Rey1989].

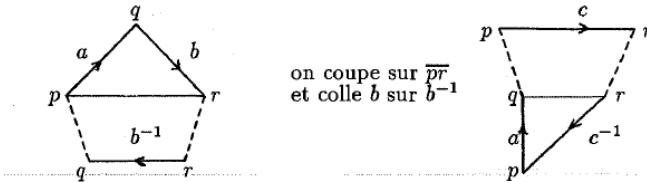


FIGURE 1. Première étape

**Deuxième étape**

On élimine ensuite les arêtes adjacentes  $aa^{-1}$  tant que le polygône a plus de deux arêtes, voir la figure 2 tiré du livre de Reyssat [Rey1989]. Cela ne change pas la topologie puisque cela correspond à une somme connexe avec une sphère.

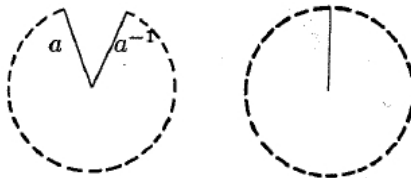


FIGURE 2. Deuxième étape

**Troisième étape**

À l'issue des deux premières étapes on vérifie facilement que si  $a$  est un côté alors il existe un autre côté  $b$  tel que  $a$  et  $b$  apparaissent (à permutation circulaire près) dans l'ordre  $a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1}$ , voir la figure 3 tiré du livre de Reysat [Rey1989]. On dira qu'ils sont *enchaînés*.

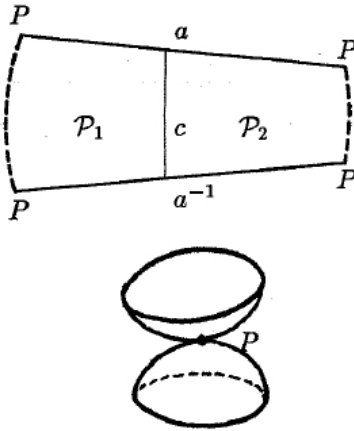


FIGURE 3. Si  $a$  n'est enchaîné à aucune autre arête l'espace quotient n'est pas une surface

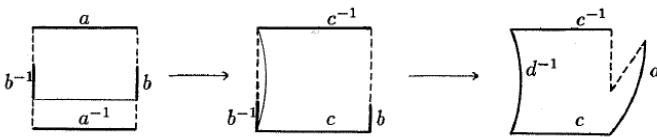


FIGURE 4. Troisième étape

Quitte à couper et coller deux fois on peut alors se ramener à ce que 4 côtés enchaînés se suivent toujours, voir la figure 4 tiré du livre de Reysat [Rey1989]. En recommençant à partir de la première étape on met ainsi le polygône sous forme normale. On en déduit :

**Théorème III.2.2.** — *Toute surface orientable compacte est homéomorphe à une sphère à  $g$  anses  $\Sigma_g$ .*

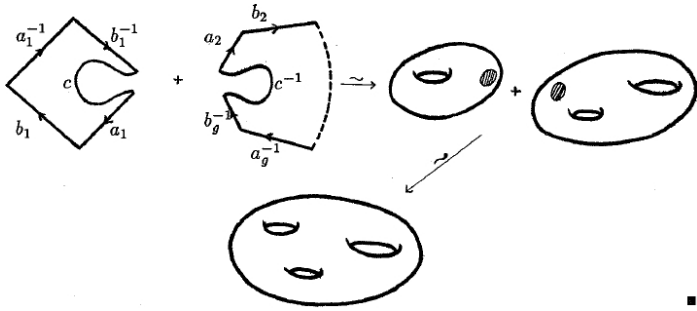


FIGURE 5. Des formes normales aux surfaces

**Remarque III.2.3.** — Le groupe fondamental de la surface  $\Sigma_g$  est

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Son abélianisé

$$\pi_1(\Sigma_g) / [\pi_1(\Sigma_g), \pi_1(\Sigma_g)]$$

est un groupe abélien libre de rang  $2g$ . En particulier si  $g \neq g'$  alors  $\Sigma_g \not\cong \Sigma_{g'}$ . L'entier  $g$  est donc uniquement déterminée par (la surface topologique)  $X$ ; on l'appelle le *genre* de la surface.

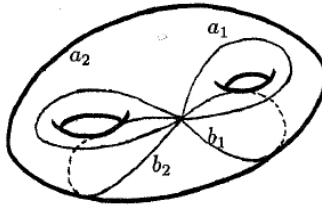


FIGURE 6. Générateurs du groupe fondamental

La proposition suivante est laissée en exercice.

**Proposition III.2.4.** — Soient  $S$ ,  $A$  et  $F$  le nombre de sommets, arêtes, triangles de la triangulation  $\tau$ . La caractéristique d'Euler

$$\chi = S - A + F$$

est indépendante du choix de la triangulation  $\tau$  de la surface  $X$ . On a  $\chi = 2 - 2g$ , où  $g$  est le genre de  $X$ .

**Remarque III.2.5.** — Le genre  $g$  est également égal à  $\frac{1}{2} \dim H^1(X)$  ou encore au nombre maximum de courbes simples fermées 2 à 2 disjointes tracées sur  $X$  et indépendantes en homologie.

### III.3. Quelques conséquences

#### Formule de Riemann-Hurwitz

**Théorème III.3.1.** — Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes ( $\equiv$  revêtement ramifié) de degré  $d$ . Pour  $y \in Y$ , on note  $v(y)$  l'indice de ramification de  $f$  en  $y$ . Alors :

$$\underbrace{\chi(Y)}_{=2-2g(Y)} = d \underbrace{\chi(X)}_{=2-2g(X)} - \sum_{y \in Y} (v(y) - 1).$$

*Démonstration.* — On part d'une triangulation  $\tau$  de  $X$  dont l'ensemble des sommets contient tous les points de ramification de  $f$ . Considérons maintenant la triangulation  $f^{-1}(\tau)$  de  $Y$ . Le nombre de triangles de  $f^{-1}(\tau)$  est égal à  $d$  fois le nombre de triangles de  $\tau$ . Il en est de même pour le nombre d'arêtes. On s'attend de même à ce que le nombre de sommets soit multiplié par  $d$ , mais chaque point de ramification  $y$  fait diminuer de  $v(y) - 1$  le nombre attendu.  $\square$

#### La formule du genre

Si  $X$  est la surface de Riemann compacte associée à une équation polynomiale irréductible  $P(x, y) = 0$ , on peut calculer son genre  $g$  à l'aide du théorème de Riemann-Hurwitz :

**Proposition III.3.2.** — Une courbe de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  définie par  $P$  de degré  $n$  avec pour seules singularités  $r$  points doubles à tangentes distinctes (plongement générique) est de genre

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - r.$$

*Démonstration dans le cas où la courbe est lisse.* — On associe à  $P$  le polynôme homogène de degré  $n$  :

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_0^n P(z_1/z_0, z_2/z_0).$$

On note alors

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : F(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

C'est une courbe que nous supposerons, pour simplifier, partout lisse (de sorte que  $r = 0$ ). On applique le théorème de Riemann-Hurwitz à une projection convenable de  $C$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Par exemple la projection<sup>(1)</sup>  $f : [z_0 : z_1 : z_2] \in C \mapsto [z_0 : z_1] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  après un changement de coordonnées de sorte que  $n = \deg P = \deg_y P$ . Ainsi  $f$  est un revêtement de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  de degré  $n$ . On a donc :

$$2 - 2g = 2n - \sum_{q \in C} (v(q) - 1).$$

Il reste à calculer  $\sum_{q \in C} (v(q) - 1)$ . Quitte à modifier le changement de coordonnées remarquons que l'on peut de plus supposer que la droite à l'infini  $L = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : z_0 = 0\}$  rencontre  $C$  transversalement, c'est-à-dire que  $f$  ne ramifie pas au-dessus de l'infini. Tous les points  $q$  de  $C$  où  $v(q)$  est strictement supérieur à 1 sont donc dans le plan fini  $z_0 \neq 0$ . On est ramené à travailler avec la courbe  $C_P$  et la projection  $f : (x, y) \in C_P \mapsto x \in \mathbb{C}$ . En un point de  $C_P$  où  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ , alors  $x$  est une coordonnée locale sur  $C_P$  et  $f$  est non ramifiée. Maintenant en un point  $q$  de  $C_P$  où  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , puisque la courbe est lisse, on a :  $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$  et on peut prendre  $y$  comme coordonnée locale. Mais en différentiant, par rapport à  $y$ , l'équation  $P(x(y), y) = 0$  on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

sur  $C_P$ . L'ordre d'annulation de  $\frac{\partial x}{\partial y}$  en  $q$ , c'est-à-dire  $v(q) - 1$ , est donc égal à l'ordre d'annulation de  $\frac{\partial P}{\partial y}$  en  $q$  le long de  $C_P$ , c'est-à-dire à la multiplicité de

$$C_P \cap \left\{ (x, y) : \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

en  $q$ . Puisque le polynôme  $P \frac{\partial P}{\partial y}$  est de degré  $n(n-1)$ , on conclut que  $2 - 2g = 2n - n(n-1)$  soit  $g = (n-1)(n-2)/2$ .  $\square$

### Le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ , et  $\text{Aut}(X)$  son groupe d'automorphisme. On admet qu'il est fini (voir par exemple Reyssat [Rey1989]).

<sup>(1)</sup>Projection depuis le point  $p = [0 : 0 : 1]$  sur la droite  $H = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : z_2 = 0\}$  qui ne passe pas par  $p$ .



**Théorème III.3.3 (Hurwitz).** — On a :

$$|\text{Aut}(X)| \leq 84(g - 1).$$

*Démonstration.* — Notons  $N$  le cardinal de  $\text{Aut}(X)$ . Étant donné un point  $p \in X$ , on note  $n_p$  le cardinal du stabilisateur de  $p$  dans  $\text{Aut}(X)$ . On note enfin  $\pi$  la projection de  $X \rightarrow \text{Aut}(X) \backslash X$ . Notons d’ores et déjà, même si nous ne le verrons qu’on chapitre suivant, que  $\text{Aut}(X) \backslash X$  est naturellement muni d’une structure de surface de Riemann

Si  $p$  et  $p'$  ont la même projection dans  $\text{Aut}(X) \backslash X$ , alors il existe un élément  $g \in \text{Aut}(X)$  tel que  $g(p) = p'$  et

$$\text{Stab}_{\text{Aut}(X)}(p') = g \text{Stab}_{\text{Aut}(X)}(p) g^{-1}.$$

En particulier  $n_p = n_{p'}$ . Si  $q$  est un point de  $\text{Aut}(X) \backslash X$ , on note  $n_q$  la valeur commune des  $n_p$  où  $p$  est n’importe quel point de  $X$  tel que  $\pi(p) = q$ . On pourra donc notamment parler de son genre.

Soit  $\gamma$  le genre de  $\text{Aut}(X) \backslash X$ . La formule de Riemann-Hurwitz s’écrit :

$$\chi(X) = N \chi(\text{Aut}(X) \backslash X) - \sum_{x \in X} (v(x) - 1)$$

où  $v(x)$  désigne l’indice de ramification de  $\pi$  en  $x$ . Si  $x$  se projette sur  $q \in \text{Aut}(X) \backslash X$  on a

$$v(x) = n_q \text{ et } |\pi^{-1}(q)| = \frac{N}{n_q}.$$

Puisque  $\chi(X) = 2 - 2g$  et  $\chi(\text{Aut}(X) \backslash X) = 2 - 2\gamma$ , on en déduit :

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + \sum_{q \in \text{Aut}(X) \backslash X} \frac{N}{n_q} (n_q - 1)$$

ou encore

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + \sum_{q \in \text{Aut}(X) \backslash X} N \left(1 - \frac{1}{n_q}\right). \tag{1}$$

On distingue alors différents cas :

- Si  $\gamma > 1$  on a  $2\gamma - 2 \geq 2$  et il découle de (1) que  $2g - 2 \geq 2N$  et donc que  $N \leq g - 1$ .
- Si  $\gamma = 1$ , il découle de (1) que

$$2g - 2 = N \sum_{q \in \text{Aut}(X) \backslash X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right).$$

Et comme cette expression est non nulle ( $g \geq 2$ ) la somme du membre de droite est  $\geq 1/2$ . On en déduit que  $N \leq 4g - 4$ .

– Si  $\gamma = 0$ , il découle de (1) que

$$2g - 2 = N \left( \sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) - 2 \right). \quad (2)$$

Maintenant, puisque  $2g - 2 > 0$ , il découle de (2) que la somme

$$\sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) \leq |\{q \in \text{Aut}(X) \setminus X : n_q > 1\}|$$

est strictement supérieur à 2. En particulier  $\pi$  ramifie au-dessus d'au moins 3 points.

Si  $\pi$  ramifie au dessus d'au moins 5 points, la somme du membre de droite de (2) est  $\geq 5/2$  et donc  $2g - 2 \geq N/2$  soit  $N \leq 4g - 4$ .

Il reste à considérer le cas où  $\gamma = 0$  et  $\pi$  ramifie au-dessus de 3 ou 4 points. Puisque  $\gamma = 0$  (et  $2g - 2 > 0$ ), il découle de (2) que

$$\sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) > 2.$$

Il s'agit donc de majorer  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$  et  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$  pour les  $n_i$  entiers sous les contraintes (respectivement) :

$$0 < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$$

et

$$0 < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} < 2.$$

La solution la pire est (2, 3, 7). Dans ce cas (2) s'écrit :

$$2g - 2 = \frac{N}{42}.$$

Dans tous les cas on obtient comme annoncé que  $N \leq 84(g - 1)$ . □

### III.4. Un exemple : la courbe de Klein

Dans cette section on détaille un exemple – la courbe de Klein – dont on montrera plus tard que son groupe d'automorphisme réalise la borne d'Hurwitz.

Soient  $P(x, y) = y^7 - x^2(x - 1)$ ,  $C = C_P$  la courbe lisse dans  $\mathbb{C}^2$  associée à  $P$  et  $X = \widehat{C}$  la surface de Riemann compacte associée à  $C$ .

**Proposition III.4.1.** — *La coordonnée  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  se prolonge en une application holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  qui ramifie au-dessus de 0, 1 et  $\infty$ . Les ordres de ramifications sont tous égaux à 7.*

*Démonstration.* — On a

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} : y^7 = x^2(x - 1)\}.$$

Et puisque  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6y^6$ , pour tout  $x \neq 0, 1$  le polynôme  $P(x, \cdot)$  est de degré 7 et à racines simples. La projection sur la première coordonnée  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  induit donc un revêtement non ramifié de degré 7 de  $C - \{(1, 0)\}$  sur  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ .

Par le théorème de prolongement des fonctions holomorphes la fonction  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  se prolonge alors en une application holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  qui ramifie au-dessus de 0, 1 et  $\infty$ .

Les points 0, 1 et  $\infty$  ont chacun un unique antécédent par  $x$ , leurs ordres de ramifications sont donc égaux à 7.  $\square$

**Remarque III.4.2.** — Le polynôme  $(x, y) \mapsto y^7 - x^2(x - 1)$  est irréductible (par exemple en appliquant le critère d'Eisenstein) ; la courbe  $X$  est donc bien connexe.

Soit  $g$  le genre de  $X$ . D'après la proposition précédente, la formule de Hurwitz s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 - 2g = \chi(X) &= 7\chi(\mathbb{CP}^1) - (7 - 1) - (7 - 1) - (7 - 1) \\ &= 14 - 18 = -4. \end{aligned}$$

Donc  $g = 3$ .

**Proposition III.4.3.** — *Les trois différentielles suivantes sur  $C$  se prolongent en des différentielles holomorphes sur  $X$  :*

$$\frac{dx}{y^3}, \quad \frac{-x dx}{y^5}, \quad \frac{-x dx}{y^6}.$$

*Démonstration.* — Le cas le plus délicat à traiter est celui de  $\frac{dx}{y^3}$  au voisinage du point (0, 0). Mais au voisinage de ce point on peut se donner une coordonnée locale  $t$  de sorte que  $x = t^7$  (la coordonnée  $x$  ramifie à l'ordre 7 au-dessus de 0). Alors

$$y^7 = t^{14}(t^7 - 1) = -t^{14}(1 + o(t))$$

de sorte que, à une constante multiplicative près,  $y = -t^2(1 + o(t))$  au voisinage de  $t = 0$ . Et

$$\frac{dx}{y^3} = \frac{7t^6 dt}{-t^6(1 + o(t))}$$

est holomorphe au voisinage de  $t = 0$ . Les autres formes en 0 et 1 se traitent soit de la même manière, soit en utilisant que sur  $X$ , on a  $7y^6 dy = (3x^2 - 2x)dx$ . Pour le point à l'infini, il suffit de passer dans la carte à l'infini.  $\square$

Considérons maintenant l'application  $f : C \rightarrow \mathbb{CP}^2$  donnée par

$$(x, y) \mapsto [U : V : W] = \left[ \frac{1}{y^3} ; \frac{-x}{y^5} ; \frac{-x}{y^6} \right].$$

**Proposition III.4.4.** — *L'application  $f$  se prolonge en une application holomorphe  $F$  de  $X$  dans la courbe  $Q$  d'équation :*

$$UW^3 + WV^3 + VU^3 = 0.$$

*Démonstration.* — On a :

$$\begin{aligned} UW^3 + WV^3 + VU^3 &= -\frac{x^3}{y^{21}} + \frac{x^4}{y^{21}} - \frac{x}{y^{14}} \\ &= -\frac{x}{y^{21}} \{y^7 - x^2(x - 1)\} = 0. \end{aligned}$$

L'application  $f|_C : C - \{(1, 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$  est donc à image dans la courbe  $Q$  et le théorème de prolongement des fonctions holomorphe implique que  $f$  se prolonge en une application holomorphe  $F$  de  $X$  dans la courbe  $Q$ .  $\square$

**Proposition III.4.5.** — *La courbe  $Q$  est lisse de genre 3.*

*Démonstration.* — Les trois cartes affines  $U = 1$ ,  $V = 1$  et  $W = 1$  couvrent tout  $\mathbb{CP}^2$ , par symétrie de l'équation, il suffit de vérifier que la courbe  $Q$  est lisse dans la carte affine  $W = 1$ . Dans cette carte, l'équation devient :

$$F(u, v) := u + v^3 + vu^3 = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 1 + 2u^2v \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 3v^2 + u^3.$$

De sorte que si  $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0$  alors

$$u = -2vu^3 \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{1}{3}vu^3$$

et  $F(u, v) = \frac{8}{3} \nu u^3$ . Finalement, le système d'équations :

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

n'a pas de solution. La courbe  $Q$  est donc lisse.

Notons que  $F$  est irréductible et donc que  $Q$  est connexe. Puisque  $F$  est de degré 4, la formule du genre implique finalement que le genre  $g$  de  $Q$  est :

$$g = \frac{1}{2}(4-1)(4-2) = 3.$$

□

L'application  $F : X \rightarrow Q$  étant holomorphe entre surfaces de Riemann (connexes) fermées, c'est un revêtement ramifié et il découle de la formule de Riemann-Hurwitz que

$$2g(X) - 2 \geq \deg(F)(2g(Q) - 2).$$

Mais  $g(X) = g(Q) = 3$ . Donc  $F$  est de degré 1 et  $F$  est un biholomorphisme.



# Surfaces quotients, uniformisation

## IV.1. Quotient de surfaces de Riemann

### Surface de Riemann quotient

Une autre manière de construire des surfaces de Riemann est de les obtenir comme *quotient* sous l'action de groupes sur d'autres surfaces de Riemann. C'est l'opération inverse du revêtement ramifié.

Par exemple une courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$  est le quotient de plan complexe par l'action par translation du réseau  $\Lambda$ .

En général on dispose du théorème suivant :

**Théorème IV.1.1.** — *Soit  $X$  une surface de Riemann et soit  $\Gamma$  un groupe discret opérant sur  $X$  de telle sorte que :*

1. *Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , l'application  $x \mapsto \gamma \cdot x$  est une application holomorphe de  $X$  dans lui-même.*
2. *L'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est propre.*

*Alors l'espace quotient  $X/\Gamma$  possède une structure naturelle de surface de Riemann, caractérisée par la propriété suivante :*

*Soit  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  l'application quotient. Pour tout ouvert  $U \subset X/\Gamma$ ,  $\pi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$  et une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si  $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.*

*Exemples.* — 1. Considérons le disque unité  $\mathbb{D}$ . Le groupe  $\mathbb{U}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  des racines  $n$ -ième de l'unité opère par multiplication sur  $\mathbb{D}$ . L'action n'est pas libre, néanmoins l'application  $\mathbb{U}_n$ -invariante  $z \mapsto z^n$  induit un

isomorphisme

$$\mathbb{D}/\mathbb{U}_n \cong \mathbb{D}.$$

Le quotient est donc lisse bien que l'action ne soit pas libre. Il découle de la démonstration ci-dessous que cet exemple est même l'exemple typique.

2. Le groupe  $\mathbb{Z}$  opère sur le plan complexe  $\mathbb{C}$  par translation et cette action vérifie les hypothèses du théorème IV.1.1. La fonction  $\mathbb{Z}$ -périodique  $z \mapsto \exp(2i\pi z)$  induit un isomorphisme

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*.$$

*Démonstration du théorème IV.1.1.* — Considérons un point  $\bar{p} = \pi(p) \in X/\Gamma$ . Si

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(p) = p\} = \{\text{id}\},$$

alors l'application quotient  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  est un biholomorphisme local au voisinage de  $p$ . On peut donc prendre pour carte autour de  $\bar{p}$  la composée  $\varphi \circ \pi^{-1}$  d'une carte locale  $\varphi$  autour de  $p$  avec  $\pi^{-1}$ .

Remarquons maintenant que l'ensemble des points  $p$  tels que  $\Gamma_p \neq \{\text{id}\}$  est discret : En effet, pour tout ouvert  $U$  relativement compact dans  $X$ , l'ensemble  $\{\gamma : \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$  est fini. Et quelque soit  $\gamma \neq \text{id}$ , le nombre de points fixes de  $\gamma$  dans un ouvert relativement compact est fini.<sup>(1)</sup>

Soit donc  $p$  un tel point. Montrons que  $p$  a un voisinage  $O$  simplement connexe stabilisé par  $\Gamma_p$ , mais tel que pour  $\gamma \notin \Gamma_p$ ,  $\gamma.O \cap O = \emptyset$ . On part d'un ouvert de carte autour de  $p$  suffisamment petit pour vérifier la deuxième condition. En lisant dans cette carte, on peut travailler dans  $\mathbb{C}$  : considérons  $U$  un voisinage simplement connexe (inclus dans la carte et tel que toutes ses images sous  $\Gamma_p$  le soient). On peut prendre pour  $O$  la composante connexe de  $\cup_{\Gamma_p} \gamma.U$ . C'est un ouvert simplement connexe<sup>(2)</sup>. D'après le théorème de représentation conforme,  $O$  est biholomorphe au disque unité. Choisissons comme carte autour de  $p$  un tel biholomorphisme  $\varphi$  sur  $O$  tel que  $\varphi(p) = 0$ . Alors, lu dans cette carte,  $\Gamma_p$  est un groupe fini d'automorphismes du disque qui fixe 0. C'est donc un sous-groupe du groupe des rotations, notamment il est cyclique : c'est un groupe  $\mathbb{U}_n$  pour un certain entier  $n$ .

<sup>(1)</sup> Si  $\gamma = \text{id}$  sur un ensemble contenant un point d'accumulation alors  $\gamma = \text{id}$  partout.

<sup>(2)</sup> En effet, dans le plan, un ouvert est simplement connexe si et seulement si toute courbe de Jordan contenue dans l'ouvert a son intérieur contenu dans l'ouvert. Merci aux élèves pour cette remarque.



Dans cette carte l'action de  $\Gamma_p$  se lit comme l'action des racines  $n$ -ième de l'unité sur  $\mathbb{D}$ . Alors dans le quotient  $X/\Gamma$ , l'ouvert  $\pi(U)$  peut être identifié au quotient  $U/\Gamma_p$  et donc au quotient  $\mathbb{D}/\mathbb{U}_n \cong \mathbb{D}$ .  $\square$

**Groupes fuchsien, courbes modulaires**

**Définition IV.1.2.** — Un *groupe fuchsien* est un sous-groupe discret de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

*Exemple.* — Le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est un groupe fuchsien.

Comme l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$  est propre, celle de tout groupe fuchsien l'est aussi.

**Définition IV.1.3.** — Soit  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Un *domaine fondamental* pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{H}$  fermé tel que  $\overline{\text{int}(D)} = D$ , que toute orbite de  $\Gamma$  rencontre  $D$  et que les translats  $\gamma \cdot \text{int}(D)$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) sont deux à deux disjoints.

Gauss démontre le célèbre théorème suivant (voir [Ser1970]) :

**Théorème IV.1.4 (Gauss).** — *Le sous-ensemble*

$$D = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1 \text{ et } |\text{Re}(\tau)| \leq 1/2\}$$

*de  $\mathbb{H}$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\tau \in \mathbb{H}$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , alors :

$$\text{Im}(\gamma\tau) = \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}. \tag{1}$$

Puisque  $c$  et  $d$  sont des entiers, le nombre de couples  $(c, d)$  tels que  $|c\tau + d|$  soit inférieur à un réel donné est *fini*. Il existe donc un élément  $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que  $\text{Im}(\gamma\tau)$  soit maximum et de partie réel compris entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ . Alors l'élément  $\gamma\tau$  appartient à  $D$  : en effet  $|\gamma\tau| \geq 1$  (car  $\text{Im}(-1/\gamma(\tau)) = \text{Im}(\tau)/|\gamma\tau|$ ). Cela prouve que toute  $\Gamma$ -orbite rencontre  $D$ .

Considérons maintenant un élément  $\tau \in D$  et un élément  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tels que  $\gamma\tau$  appartienne à  $D$ . Quitte à remplacer le couple  $(\tau, \gamma)$  par  $(\gamma\tau, \gamma^{-1})$  on peut supposer  $\text{Im}(\gamma\tau) \geq \text{Im}(\tau)$ , c'est-à-dire que  $|c\tau + d| \leq 1$ . C'est clairement impossible si  $|c| \geq 2$ , il reste donc à analyser les cas où  $c = 0, 1$  ou  $-1$  :

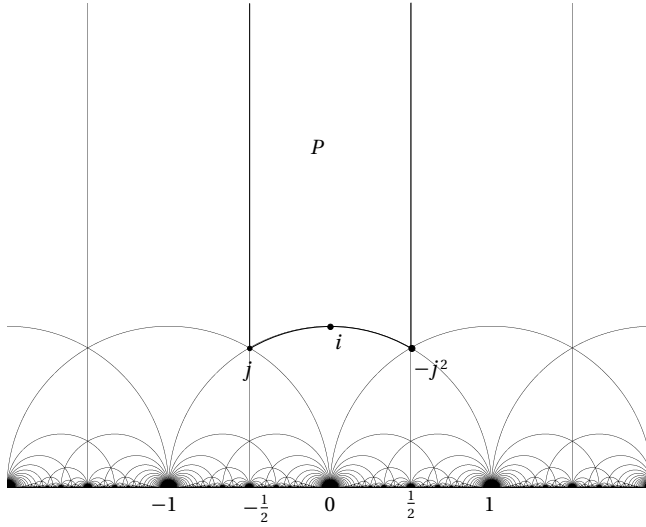


FIGURE 1. Un pavage pour  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

- Si  $c = 0$ , on a  $d = \pm 1$  et  $\gamma$  opère par translation de  $\pm b$ . Puisque les parties réelles de  $\tau$  et  $\gamma\tau$  sont toutes deux comprises entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , on conclut que soit  $\gamma$  est la transformation identité soit une translation par  $\pm 1$  et l'un des nombres  $\text{Re}(\tau)$  et  $\text{Re}(\gamma\tau)$  est égal à  $-\frac{1}{2}$  et l'autre à  $\frac{1}{2}$ .
- Si  $c = 1$ , le fait que  $|z + d| \leq 1$  impose  $d = 0$  sauf si  $z = j$ , resp.  $-\bar{j}$ , auquel cas on peut avoir  $d = 0$  ou  $1$ , resp.  $d = 0$  ou  $-1$ ). Le cas  $d = 0$  donne  $|z| \geq 1$  donc  $|z| = 1$ . Par ailleurs  $ad - bc = 1$  implique que  $b = -1$  soit  $\gamma\tau = a - 1/\tau$ . En considérant encore la partie réelle on en déduit que  $a = 0$  sauf si  $\text{Re}(\tau) = \pm\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire si  $\tau = j$  ou  $-\bar{j}$  auquel cas on a  $a = 0, \pm 1$ .
- Si  $c = -1$  on se ramène au cas précédent en remplaçant  $\gamma$  par  $-\gamma$ .

□

**Remarque IV.1.5.** — La démonstration montre plus précisément que si  $\tau \in D$  le stabilisateur  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est trivial sauf exactement dans les 3 cas suivants :

- $\tau = i$ , auquel cas  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 2 engendré par  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- $\tau = j$ , auquel cas  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 3 engendré par  $ST$ , où  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

–  $\tau = -\bar{j}$ , auquel cas  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 3 engendré par  $TS$ .

On peut ainsi vérifier que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$ .

**Proposition IV.1.6.** — Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Le quotient

$$Y_\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma$$

admet une structure de surface de Riemann compacte épointée ; on notera  $X_\Gamma = \widehat{Y}_\Gamma$ .

*Démonstration.* — Commençons par le cas  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Comme quotient  $Y(1) = Y_\Gamma$  est une surface de Riemann (non compacte de genre 0 et à un bout). Les horoboules centrées en l'infini

$$B_a = \{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{Im} \tau \geq a\} \quad (a > 0)$$

deviennent par passage au quotient des disques épointés, voisinages du bout de  $Y_\Gamma$ . On pose  $q = e^{2i\pi\tau}$  que l'on prend comme carte. On obtient ainsi une surface compacte  $X_\Gamma$  qui est une complétion de la surface de Riemann ouverte  $Y_\Gamma$ .

Dans le cas général d'un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , le quotient  $Y_\Gamma$  est un revêtement ramifié au-dessus de  $Y(1)$ . Il se compactifie de manière unique en un revêtement ramifié  $X_\Gamma$  au-dessus de  $X(1)$ . L'action projective de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1$  est transitive ; l'ensemble  $X_\Gamma \setminus Y_\Gamma$  est fini, en bijection avec les classes  $\Gamma \backslash \mathbb{Q}\mathbb{P}^1$ . Ses éléments sont encore appelés les *pointes* de  $X_\Gamma$  (ou de  $\Gamma$ ). Soit  $x = \rho(\infty)$  un représentant d'une pointe ( $\rho \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ) et soit  $\Gamma_x$  le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ . Le groupe  $\rho^{-1}\Gamma_x\rho$ , indépendant du choix du représentant de la pointe et de  $\rho$ , est engendré par  $\gamma(z) = z + m$  pour un certain entier  $m \geq 1$ . On pose  $q = e^{2i\pi\tau}$  et on prend comme carte  $\rho(w)$  avec

$$w = e^{2i\pi\tau/m} = q^{1/m}. \tag{2}$$

Noter enfin que toute inclusion  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  entre sous-groupes d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  induit une application holomorphe de  $X_{\Gamma_1}$  sur  $X_{\Gamma_2}$ .  $\square$

Pour  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  on a  $Y_\Gamma \simeq \mathbb{C}$  et  $X_\Gamma \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  (une seule pointe). En général l'application holomorphe correspondante  $X_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est un revêtement ramifié au-dessus de 3 points (qui correspondent à  $i, j$  et  $\infty$  dans  $X(1)$ ).

*Exemple.* — Le groupe

$$\Gamma(2) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \gamma \equiv \mathrm{Id} \pmod{2}\}$$

est un sous-groupe sans torsion de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma(2)$  est un revêtement. L'ensemble des classes d'équivalence  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma(2)$  est de cardinal 3 (on laissera le lecteur dessiner le domaine fondamental), les points 0, 1 et  $\infty$  représentent les 3 différentes classes d'équivalence  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma(2)$ . On en déduit que  $\mathbb{H}/\Gamma(2)$  est un revêtement de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  puis que  $X(2) := X_{\Gamma(2)} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

En général on peut appliquer la formule de Riemann-Hurwitz pour calculer le genre de  $X_{\Gamma}$  :

**Proposition IV.1.7.** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Le genre  $g$  de  $X_{\Gamma}$  est donné par la formule :*

$$g = 1 + \frac{[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma]}{12} - \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_3}{3} - \frac{\mu_{\infty}}{2},$$

où  $\mu_2$ , resp.  $\mu_3$ , désigne le nombre de classes de  $\Gamma$ -équivalence de points elliptiques d'ordre 2, resp. 3, et  $\mu_{\infty}$  est le cardinal de  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma$ .

*Démonstration.* — Le revêtement  $X_{\Gamma} \rightarrow X(1)$  est ramifié au-dessus des classes de  $i$ ,  $j$  et  $\infty$ . Raisonnons sur les points au-dessus de  $j$  : soient  $v_1, \dots, v_n$  les indices de ramifications des points de  $X_{\Gamma}$  au-dessus de la classe de  $j$  dans  $X(1)$ . Alors  $[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] = v_1 + \dots + v_n$  et chaque  $v_k$  est égal à 1 ou 3. Le nombre de  $k$  pour lesquels  $v_k$  est égal à 1 est le nombre de classes de  $\Gamma$ -équivalence de points elliptiques d'ordre 3 : c'est  $\mu_3$ . De sorte qu'on a :

$$[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] = \mu_3 + 3(n - \mu_3)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n (v_k - 1) = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - n = \frac{2}{3} ([\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_3).$$

De la même manière on montre que

$$\sum_q (v(q) - 1) = \frac{1}{2} ([\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_2)$$

si  $q$  parcourt les points au-dessus de la classe de  $i$ , et

$$\sum_q (v(q) - 1) = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_{\infty}$$

si  $q$  parcourt les points au-dessus de l'infini. La proposition découle alors de la formule de Hurwitz.  $\square$

Lorsque  $\Gamma$  est l'un des sous-groupes principaux de congruence

$$\Gamma(N) = \text{Ker}(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})),$$

on peut en déduire des formules explicites pour les invariants numériques (genre, nombre de pointes) de la surface de Riemann associée, voir [Shi1971, p. 20-23]. On note  $Y(N) = Y_{\Gamma(N)}$  et  $X(N) = X_{\Gamma(N)}$ .

### Un exemple : la courbe $X(7)$

Considérons le cas  $N = 7$ . Soit  $f$  la projection  $X(7) \rightarrow X(1)$ .

**Proposition IV.1.8.** — *Le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal 168.*

*Démonstration.* — Une matrice de  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est la donnée d'un vecteur non nul de  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$  et d'un autre qui ne lui est pas colinéaire. Le cardinal de  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est donc égal à  $(49-1)(49-7) = 48 \cdot 42$ . Puis le groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est le noyau du morphisme surjectif vers  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$  donné par le déterminant. C'est donc un sous-groupe d'indice 6 ; il est donc de cardinal  $8 \cdot 42$ . Enfin le centre de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal 2. On conclut que  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal  $8 \cdot 21 = 168$ .  $\square$

**Proposition IV.1.9.** — *Le sous-groupe  $\Gamma(7)$  est d'indice 168 dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que l'application  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  de réduction modulo 7 est surjective. Il est plus généralement vrai que l'application  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  de réduction modulo  $N$  est surjective ; montrons-le lorsque  $N = p$  est premier.<sup>(3)</sup> Dans ce cas l'anneau  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps  $k$ . Mais la méthode du pivot de Gauss implique que  $\text{PSL}(2, k)$  est engendré par les matrices de transvections

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in k).$$

Puisque les transvections sont évidemment dans l'image de l'application de réduction modulo  $p$ , le résultat voulu s'en déduit.  $\square$

**Proposition IV.1.10.** — *La surface  $X(7)$  est de genre 3.*

<sup>(3)</sup>Le cas général s'y ramène facilement, nous n'en aurons pas besoin ici.

*Démonstration.* — Les classes de conjugaison des éléments elliptiques dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sont représentés par les éléments

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aucun de ces éléments n'est congru à l'identité modulo 7. Le groupe  $\Gamma(7)$  opère donc librement sur  $\mathbb{H}$ . On en déduit que  $f$  ramifie d'ordre 2 en tous les points au-dessus de  $i$  et d'ordre 3 en tous les points au-dessus de  $j$ .

Maintenant si  $s$  est une pointe,  $s$  est  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalente à  $l'∞$ . Mais le stabilisateur de l'infini dans  $\Gamma(7)$  est

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 7m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

qui est d'indice 7 dans le stabilisateur de  $l'∞$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . On en déduit que  $f$  ramifie d'ordre 7 en tous les points au-dessus de l'infini.

En conservant les notations de la proposition IV.1.7 on a donc :

$$\mu_2 = 0, \mu_3 = 0 \text{ et } \mu_\infty = 24$$

et le genre de la courbe  $X(7)$  est égal à

$$1 + \frac{168}{12} - \frac{24}{2} = 3.$$

□

**Proposition IV.1.11.** — *La surface  $X(7)$  réalise la borne d'Hurwitz :*

$$|\mathrm{Aut}(X(7))| = 168 = 84(3 - 1).$$

*Démonstration.* — Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  opère par automorphismes sur  $X(7)$ . Le groupe des automorphismes de  $X(7)$  est donc de cardinal  $\geq 168 = 84(3 - 1)$ . Puisque  $X(7)$  est de genre 3 on en déduit que cette surface réalise la borne d'Hurwitz. □

On peut vérifier – c'est un bon exercice – que la surface  $X(7)$  est biholomorphe à la surface de Klein étudiée au chapitre précédent.

## IV.2. Le théorème de Belyi

**Définition IV.2.1.** — Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . Une surface de Riemann  $X$  est *définie sur  $K$*  si elle est biholomorphe à la normalisation  $\widehat{C}_P$  d'une courbe algébrique  $C_P$  avec  $P \in K[x, y]$ .

On peut montrer que la courbe modulaire  $X(1)$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ ; nous l'admettons. Étant donné un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  la courbe  $X_\Gamma$  est un revêtement ramifié fini de  $X(1)$ . Il n'est alors pas difficile d'en conclure que  $X_\Gamma$  est définie sur une extension finie de  $\mathbb{Q}$  et donc sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire des nombres complexes qui sont racines d'un polynôme non-nul à coefficients rationnels; là encore nous admettons ce résultat. Il est plus surprenant (et en fait assez élémentaire) que la réciproque soit vraie :

**Théorème IV.2.2 (Belyi).** — *Une surface de Riemann  $X$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  si et seulement si  $X$  est isomorphe à une surface de Riemann  $X_\Gamma$  pour un certain sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — Nous ne démontrons que la condition nécessaire, plus précisément nous montrons qu'une courbe  $X$  définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  est isomorphe à  $\widehat{Y}$  où  $Y$  est un revêtement fini (non ramifié) de  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Puisque  $X$  peut être définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , il existe une application holomorphe  $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  et un ensemble fini  $S \subset \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$  tel que la restriction de  $\pi$  à  $X - \pi^{-1}(S)$  soit un revêtement fini (non ramifié) au-dessus de  $\mathbb{CP}^1 - S$ . En composant  $\pi$  par un polynôme à coefficients rationnels on peut diminuer le degré maximal des points de  $S$  et finalement se ramener au cas  $S \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Quitte à composer  $\pi$  par une homographie on peut en outre supposer que  $S$  contient l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . L'observation clef de Belyi est alors qu'étant donnés deux entiers  $n, m \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $n + m \neq 0$ , l'application

$$\varphi_{nm} : \begin{cases} \mathbb{CP}^1 & \rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ z & \mapsto \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} z^n (1-z)^m \end{cases}$$

induit un revêtement (non ramifié)  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\} \rightarrow \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Si l'on choisit  $n$  et  $m$  de sorte que  $\frac{n}{n+m} \in S - \{0, 1, \infty\}$ , l'application  $\varphi_{nm} \circ \pi$  est donc un revêtement au-dessus de  $\mathbb{CP}^1 - (\{0, 1, \infty\} \cup \pi(S - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\}))$ . Puisque l'ensemble  $\{0, 1, \infty\} \cup \pi(S - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\})$  est de cardinal plus petit que  $S$  on conclut par récurrence que l'on peut se ramener au cas où  $S = \{0, 1, \infty\}$ .

Remarquons finalement que le sous-groupe de congruence  $\Gamma(2)$  opère librement sur  $\mathbb{H}$  et que le quotient  $\mathbb{H}/\Gamma(2)$  est isomorphe à  $\mathbb{C} - \{0, 1\} \cong \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Un revêtement (non ramifié)  $Y$  de  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$  est donc isomorphe à un quotient  $Y_\Gamma$  avec  $\Gamma$  sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma(2)$  et donc de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Finalement  $X \cong X_\Gamma$ .  $\square$

### IV.3. Classification des surfaces de Riemann

#### IV.3.1. Le théorème d'uniformisation

Un théorème de la théorie des surfaces de Riemann affirme que toute surface de Riemann connexe peut être obtenue comme quotient de la sphère de Riemann  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , du plan complexe  $\mathbb{C}$  ou du disque  $\mathbb{D}$ . On obtient plus précisément :

**Théorème IV.3.1.** — *L'ensemble des surfaces de Riemann peut être partitionné en trois sous-ensembles :*

- Les surfaces de Riemann elliptiques : *ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes à la sphère de Riemann  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Elles sont caractérisées par le fait de posséder une fonction holomorphe non constante  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ .<sup>(4)</sup>*
- Les surfaces de Riemann paraboliques : *ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes au plan complexe  $\mathbb{C}$ , ou à  $\mathbb{C}^*$  ou à une courbe elliptique<sup>(5)</sup>  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Elles sont caractérisées par le fait qu'elles ne sont pas elliptiques et qu'il existe une application holomorphe non constante  $\mathbb{C} \rightarrow X$ , où encore par comme étant exactement les surfaces de Riemann isomorphes à un quotient du plan complexe  $\mathbb{C}$  par une action de groupe vérifiant les hypothèses du théorème IV.1.1, c'est-à-dire par l'action d'un sous-groupe discret de translations complexes.*

*Parmi les surfaces paraboliques,  $\mathbb{C}$  est la seule qui soit simplement connexe,  $\mathbb{C}^*$  la seule qui ne soit pas simplement connexe et non compacte et les courbes elliptiques sont les seules qui soient compactes. Par ailleurs deux courbes elliptiques  $\mathbb{C}/\Lambda$  et  $\mathbb{C}/\Lambda'$  sont isomorphes si il existe  $k \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\Lambda' = k\Lambda$ . Dans une même classe d'isomorphie on peut prendre  $\Lambda = \Lambda_\tau := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  avec  $\tau \in \mathbb{H}$ . Et  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau \cong \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$  si et seulement  $\tau$  et  $\tau'$  représentent la même classe dans  $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

- Les surfaces de Riemann hyperboliques : *ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes à un quotient  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant librement sur  $\mathbb{H}$ . Elles sont caractérisées par le fait qu'il n'existe pas d'application holomorphe non constante  $\mathbb{C} \rightarrow X$ . De plus, deux surfaces  $\mathbb{H}/\Gamma$  et  $\mathbb{H}/\Gamma'$  sont isomorphes si et seulement s'il existe un élément  $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $\Gamma' = g\Gamma g^{-1}$ .*

<sup>(4)</sup>En prenant  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  dans le théorème IV.1.1, alors  $\Gamma$  est fini et  $X \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1/\Gamma (\cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ .

<sup>(5)</sup>La terminologie parabolique/elliptique apparaît ici bien malheureuse, mais il n'y a plus rien à faire !



On peut reformuler cette trichotomie en passant au revêtement universel : Si  $X$  est une surface de Riemann connexe et si  $\tilde{X}$  désigne son revêtement universel, alors :

- $X$  est elliptique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  (et en fait  $X \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ );
- $X$  est parabolique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{C}$ ;
- $X$  est hyperbolique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{H}$ .

En particulier, le théorème IV.3.1 peut se formuler simplement :

*Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère.*

Cet énoncé est appelé *théorème d'uniformisation*. Nous l'admettons, voir [Hub2006]. Nous en donnerons néanmoins une démonstration « heuristique » un peu plus loin.

### IV.3.2. Uniformisation, version métrique

On peut bien naturellement transporter le théorème IV.3.1 en un théorème de classification des structures conformes :

**Théorème IV.3.2.** — *Une surface de Riemann connexe est elliptique (resp. parabolique, resp. hyperbolique) si et seulement si elle peut être munie d'une métrique riemannienne complète induisant sa structure conforme et dont la courbure de Gauss est +1 (resp. 0, resp. -1).*

La condition nécessaire est facile à vérifier :

- Une surface de Riemann elliptique est isomorphe à la sphère de Riemann  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  que l'on peut munir de la métrique conforme de courbure +1 définie par

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

- La métrique plate sur  $\mathbb{C}$

$$ds^2 = |dz|^2$$

est invariante par translation. Elle induit donc une métrique complète de courbure nulle sur toute surface parabolique  $\mathbb{C}/\Gamma$  ( $\Gamma$  sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$ ).

- La *métrique de Poincaré*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\text{Im}z)^2}$$

sur  $\mathbb{H}$  est une métrique riemannienne de courbure  $-1$ , qui est préservée par l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$ . Elle induit donc une métrique complète

de courbure  $-1$  sur toute surface de Riemann de la forme  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  opérant librement sur  $\mathbb{H}$ .

Dans un cours fameux – qu’il faut absolument lire – Klein [Kle1882c] utilise le point de vu des métriques riemanniennes pour démontrer l’existence de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann abstraite, c’est ce point de vu que nous développons dans le chapitre suivant.

## Surfaces riemanniennes

Soit  $X$  une surface de Riemann.

**Proposition V.0.3.** — On peut munir  $X$  d'une métrique riemannienne  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $X$  qui est compatible avec la structure complexe, c'est-à-dire qui définit la même mesure des angles. On note  $S = (X, g)$  la surface riemannienne ainsi obtenue.

*Démonstration.* — Dans une coordonnée holomorphe locale  $z = x + iy$  la métrique  $g$  doit s'écrire  $e^{u(x,y)}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , où  $u$  est une fonction lisse. Il n'est pas difficile de construire une telle métrique : Il suffit de recouvrir  $X$  par des ouverts  $U_i$  munis de cartes holomorphes  $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  et de considérer une partition de l'unité  $(\rho_i)$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)$ .<sup>(1)</sup> On peut alors utiliser la métrique

$$g = \sum_i \rho_i \cdot z_i^*(\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

□

**Remarque V.0.4.** — La classe conforme de  $g$  est uniquement déterminée par la structure de surface de Riemann sur  $X$ .

La structure complexe de  $X$  induit aussi une *orientation* de  $S$ , que l'on obtient à partir de l'orientation standard de  $\mathbb{C}$  à l'aide des cartes

<sup>(1)</sup>Autrement dit,  $\rho_i \in C^\infty(X)$  est positive,  $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$  et

$$\forall x \in X, \quad \sum_i \rho_i(x) = 1.$$

holomorphes. En effet, les changements de cartes sont des biholomorphismes entre ouverts de  $\mathbb{C}$  et préservent donc l'orientation standard. On rappelle :

**Théorème V.0.5 (Gauss–Korn–Lichtenshtein).** — *Si  $(S, g)$  est une surface orientée munie d'une métrique riemannienne lisse  $g$ , alors  $S$  admet une unique structure de surface de Riemann compatible.*

Ce théorème d'*uniformisation locale* est beaucoup plus compliqué à démontrer que le théorème de Gauss (dont nous avons vu la preuve dans le cas analytique).

*En résumé, une structure de surface de Riemann sur la surface différentiable  $S$  est la même chose que la donnée d'une orientation et d'une classe conforme de métriques riemanniennes.*

La seule structure de surface de Riemann de  $S$  permet de définir l'opérateur *presque complexe* associé  $J : TS \rightarrow TS$ , qui est, en termes géométriques, l'opérateur de rotation d'angle  $\pi/2$  dans le sens positif. En fait, la donnée d'un tel opérateur (vérifiant l'équation  $J^2 = -I$ ) est équivalente à celle d'une orientation et d'une classe conforme de métriques, donc d'une structure de surface de Riemann sur  $S$ . À l'aide de  $J$  on peut tourner à la fois les vecteurs tangents et les formes différentielles réelles<sup>(2)</sup> :

$$\begin{aligned} *\vec{v} &:= J(\vec{v}), \text{ si } \vec{v} \in TS, \\ *\alpha &:= -\alpha \circ J, \text{ si } \alpha \in T^*S. \end{aligned} \tag{1}$$

La métrique  $g$  compatible avec la structure complexe étant fixée, on peut associer à chaque 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $S$  à valeurs réelles le champ de vecteurs  $\vec{v}_\alpha$  qui lui est *dual* par rapport à  $g$  :

$$\alpha(\cdot) = \langle \vec{v}_\alpha, \cdot \rangle.$$

**Lemme V.0.6.** — *On a :*

$$\vec{v}_{*\alpha} = *\vec{v}_\alpha.$$

*Démonstration.* — Cela résulte du fait que

$$*\alpha(\vec{v}) = -\alpha(J\vec{v}) = -\langle \vec{v}_\alpha, J\vec{v} \rangle = \langle J\vec{v}_\alpha, \vec{v} \rangle = \langle *\vec{v}_\alpha, \vec{v} \rangle.$$

□

<sup>(2)</sup>Attention au signe, qui est conventionnel.

On définit alors point par point le produit scalaire de deux 1-formes, comme étant celui des champs de vecteurs duaux :

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \vec{v}_{\alpha_1}, \vec{v}_{\alpha_2} \rangle.$$

Soit  $\text{vol}$  la forme d'aire associée à  $g$  et à l'orientation fixée de  $S$ .

**Lemme V.0.7.** — *On a les formules*

$$\begin{cases} \text{vol}(*\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, & \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in TS \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \text{vol} = \alpha_1 \wedge * \alpha_2, & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T^*S, \end{cases} \quad (2)$$

*Démonstration.* — Ces formules se démontrent facilement en calculant dans une base orthonormée.  $\square$

Toujours à l'aide de la dualité entre formes et vecteurs, on peut définir les notions de *rotationnel* et de *divergence* d'un champ de vecteurs que nous détaillons dans le paragraphe suivant.

### V.1. Rotationnel et divergence

Soit  $(S, g)$  une surface orientée munie d'une métrique riemannienne lisse. Nous noterons  $\text{vol}$  la forme d'aire associée. Soit  $\vec{v}$  un champ de vecteurs lisse sur  $S$  et  $\alpha = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$  la forme duale de  $\vec{v}$ .

**Définition V.1.1.** — La 2-forme  $d\alpha$  est le produit de la forme d'aire  $\text{vol}$  par une fonction lisse appelée *rotationnel* de  $\vec{v}$  :

$$d\alpha = \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

La 2-forme  $d(*\alpha)$  est le produit de la forme d'aire  $\text{vol}$  par une fonction lisse appelée *divergence* de  $\vec{v}$  :

$$d(*\alpha) = \text{div } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

*Interprétation physique.* — Par le théorème de Stokes, pour tout domaine  $U$  contenu dans  $S$ , à bord lisse  $\partial U$ , on a

$$\int_{\partial U} \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle dl = \int_U \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol},$$

où  $\vec{t}$  est le vecteur tangent unitaire sur  $\partial U$  et  $dl$  l'élément de longueur sur  $\partial U$ . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle la *circulation* de  $\vec{v}$  le long de la courbe  $\partial U$ . Le champ  $\vec{v}$  est dit *irrotationnel* si son rotationnel est

identiquement nul, ou, de manière équivalente, si la 1-forme  $\alpha$  est fermée.

De la même manière, on a

$$\int_{\partial U} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dl = \int_U \operatorname{div} \vec{v} \cdot \operatorname{vol},$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant sur le bord  $\partial U$ . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle le *flux* de  $\vec{v}$  au travers de la courbe  $\partial U$ . Si  $\vec{v}$  modélise un écoulement, ce terme exprime la variation infinitésimale de la quantité de fluide contenue dans  $U$ . L'écoulement est dit *incompressible* si la divergence de  $v$  est nulle ou, de manière équivalente, si la forme  $*\alpha$  est fermée.

## V.2. Formes holomorphes et champs de vecteurs

Soit  $\vec{v}$  un champs de vecteurs *irrotationnel*. La 1-forme duale  $\alpha$  est donc *fermée*. Rappelons le

**Lemme V.2.1 (de Poincaré).** — *Toute forme fermée est localement exacte : il existe, au voisinage de chaque point de  $S$ , une fonction  $u$  telle que  $du = \alpha$ .*

**Remarque V.2.2.** — On a alors  $du = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$ . Autrement dit,  $\vec{v}$  est le gradient de la fonction  $u : \vec{v} = \operatorname{grad} u$ . On dit souvent que la fonction  $u$  est un *potentiel* dont dérive  $\vec{v}$ .

Si  $\vec{v}$  est à la fois incompressible et irrotationnel, alors le potentiel  $u$  est une *fonction harmonique* :

$$\Delta u := \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$$

ou

$$*d*d u = *d*\alpha = 0.$$

**Remarque V.2.3.** — Même si la définition du laplacien dépend de la métrique, la notion de fonction harmonique ne dépend que de la structure conforme associée. En particulier, la fonction  $u$  et le champ  $\vec{v}$  sont automatiquement analytiques. Réciproquement, toute fonction harmonique définit *via* son gradient un flot incompressible et irrotationnel.

Considérons maintenant le champ  $*\vec{v}$ . On a les égalités

$$\operatorname{rot}(*\vec{v}) = \operatorname{div} \vec{v} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(*\vec{v}) = -\operatorname{rot} \vec{v}.$$

Ainsi, si  $\vec{v}$  est de divergence nulle (resp. irrotationnel), alors  $*\vec{v}$  est irrotationnel (resp. de divergence nulle). Supposons donc que le champ  $\vec{v}$  soit incompressible et irrotationnel. Le champ  $*\vec{v}$  jouit également de ces deux propriétés; en particulier, il dérive d'un potentiel  $u^*$ . Comme  $u$ , la fonction  $u^*$  n'est définie que localement et à une constante près. La 1-forme

$$\eta = du + i du^*$$

à valeurs complexes est elle bien définie sur toute la surface  $S$ .

**Lemme V.2.4.** — *La 1-forme  $\eta$  est holomorphe.*

*Démonstration.* — Plaçons-nous sur un ouvert  $U$  sur lequel le champ  $\vec{v}$  ne s'annule pas. Les gradients de  $u$  et  $u^*$  étant orthogonaux et de même norme, l'application  $u + i u^* : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe. Remarquons que, puisque cette application est un difféomorphisme local, les fonctions  $u$  et  $u^*$  fournissent des coordonnées locales conformes sur  $U$ . Une autre manière de formuler ce fait est de dire que la 1-forme  $\eta$  est holomorphe sur  $S$  privée des zéros de  $\vec{v}$ . Comme elle est, par ailleurs, définie sur  $S$  en entier (et que les zéros de  $\vec{v}$  sont isolés),  $\eta$  est une 1-forme holomorphe sur  $S$ .  $\square$

Réciproquement, étant donnée une 1-forme holomorphe  $\eta$ , le champ dual de la partie réelle de  $\eta$ , autrement dit le champ  $\vec{v}$  défini par

$$\operatorname{Re} \eta = \langle \vec{v}, \cdot \rangle,$$

est irrotationnel et de divergence nulle. Ceci permet de comprendre les propriétés locales des points critiques des champs de vecteurs irrotationnels de divergence nulle. Au voisinage d'un tel point, écrivons

$$\eta = df \text{ avec } f \text{ holomorphe.}$$

Il existe alors une coordonnée holomorphe locale  $z$  et un entier  $n$  tels que l'on ait :  $f(z) = z^n$  avec  $n \geq 2$ . Nous obtenons donc

$$\eta = n z^{n-1} dz,$$

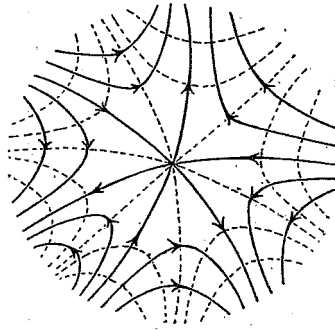


FIGURE 1. Voisinage d'un point critique

puis  $\langle \vec{v}, \cdot \rangle = \operatorname{Re}(nz^{n-1}dz)$ . Les lignes de champ correspondant au cas où  $n = 3$  sont représentées sur la figure 1 que l'on obtient en tirant en arrière le champs des vecteurs horizontaux par  $z \mapsto z^3$ .

En conclusion : *trouver une 1-forme holomorphe  $\eta$  équivaut à trouver un champs de vecteur  $\vec{v}$  de divergence nulle et irrotationnel*. On « sent » bien qu'un tel champs existe et on va le montrer !

### V.3. Et les formes méromorphes ?

On peut également considérer le cas où la forme  $\eta$  a des pôles. Le champ  $\vec{v}$  est alors défini sur la surface privée des pôles de  $\eta$ . Ceux-ci sont en nombre fini. Le lemme suivant décrit une forme méromorphe au voisinage de l'un de ses pôles.

#### **Lemme V.3.1 (forme normale locale d'une forme méromorphe)**

*Soit  $\eta$  une 1-forme méromorphe. Au voisinage d'un pôle de  $\eta$ , il existe une coordonnée holomorphe locale  $w$  pour laquelle*

$$\eta = \left( \frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^v} \right) dw, \quad (\lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{N}^*).$$

*Démonstration.* — Fixons une coordonnée holomorphe locale  $z$  quelconque. À l'aide de celle-ci,  $\eta$  s'écrit

$$\eta = \frac{\lambda}{z} dz + d \left( \frac{h(z)}{z^{v-1}} \right),$$



où  $h$  est une fonction holomorphe,  $\lambda \in \mathbb{C}$  est le résidu de la forme  $\eta$  en 0 et  $\nu \geq 2$  est un entier. Nous cherchons un changement de coordonnée de la forme  $w(z) = z \cdot u(z)$  où  $u$  est holomorphe et  $u(0) = 1$ , tel que

$$\frac{\lambda dz}{z} + d\left(\frac{h}{z^{\nu-1}}\right) = \frac{dw}{w^\nu} + \lambda \frac{dw}{w}.$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$\frac{dw}{w^\nu} + \lambda \frac{du}{u} = d\left(\frac{h}{z^{\nu-1}}\right).$$

En intégrant nous obtenons

$$\frac{-1}{(\nu-1)w^{\nu-1}} + \lambda \log u - \frac{h}{z^{\nu-1}} = C,$$

où  $C \in \mathbb{C}$  est une constante, puis, en multipliant par  $z^{\nu-1}$  :

$$\frac{-1}{(\nu-1)u^{\nu-1}} + \lambda z^{\nu-1} \log u - h - Cz^{\nu-1} = 0.$$

Notons  $\Phi(u, z)$  le membre de gauche de cette dernière équation. Au voisinage du point  $(1, 0)$ , la fonction  $\Phi(u, z)$  est une fonction holomorphe des deux variables  $u$  et  $z$ . La dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $u$  au point  $(u, z) = (1, 0)$  vaut 1, ce qui permet d'appliquer la version holomorphe du théorème des fonctions implicites. On trouve une fonction holomorphe locale  $u(z)$  qui permet de construire le changement de variable  $w(z) = z \cdot u(z)$ . □

Considérons donc la forme

$$\eta = \left(\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^\nu}\right) dw.$$

Soit  $\vec{v}$  le champs dual de la forme réelle

$$\alpha = \operatorname{Re} \eta.$$

Le champs  $\vec{v}$  s'obtient en superposant les champs duaux aux formes

$$\operatorname{Re}(\lambda dw/w) \text{ et } \operatorname{Re}(dw/w^\nu).$$

Considérons d'abord le cas où  $\nu = 1$ . Alors  $\eta$  s'écrit  $\mu dw/w$ , avec  $\mu = \lambda + 1$ . Décomposons de nouveau le champ dual à  $\operatorname{Re}(\mu dw/w)$  en la superposition d'un champ avec  $\mu$  réel et d'un autre avec  $\mu$  imaginaire pur. Lorsque  $\mu$  est réel, on trouve que le potentiel de  $\vec{v}$  est à une constante additive près la fonction  $u = \mu \log r$ , où  $w = re^{i\theta}$ . Les lignes de champ sont alors perpendiculaires aux cercles concentriques autour du point

$w = 0$ ; ce sont des *sources* positives ou négatives (*puits*, suivant le signe de  $\mu$  (voir figure 2).

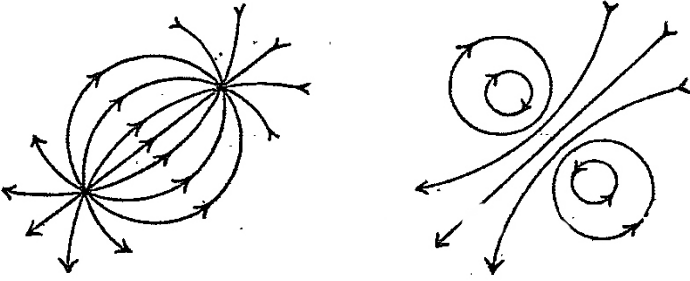


FIGURE 2. Puits/source et tourbillon

Lorsque  $\mu$  est imaginaire pur, le potentiel est à une constante additive près la fonction  $u = -\mu\theta$ , et les lignes de champ sont cette fois les cercles concentriques autour de  $w = 0$ , parcourus à vitesse  $\mu$ . On est en présence d'un *tourbillon* (voir figure 2).

Le cas du champ dual à la 1-forme  $dw/w^2$  s'obtient en remarquant que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{dw}{w-\varepsilon} - \frac{dw}{w+\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dw}{w^2}.$$

Lorsque  $\varepsilon$  est réel, cela revient à superposer une source « de débit  $\varepsilon$  » et un puits « de débit  $-\varepsilon$  » placés en des points  $p$  et  $p'$  situés à distance  $2\varepsilon$  l'un de l'autre : on obtient un dipôle. Lorsque  $\varepsilon$  est imaginaire pur, cela revient à superposer deux tourbillons « de sens opposés » placés en des points  $p$  et  $p'$  situés à distance  $2\varepsilon$  l'un de l'autre (voir figure 3).

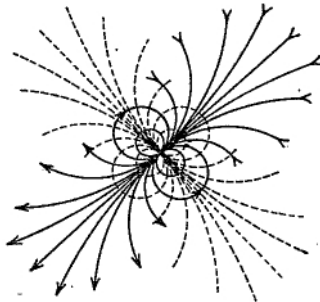


FIGURE 3. Le dipôle

Le même procédé peut également être utilisé pour étudier les champs duaux aux formes  $\operatorname{Re}(dw/w^\nu)$ , pour tout entier  $\nu \geq 2$ . On fait alors tendre vers une même limite,  $\nu$  points qui sont des sources, des puits ou des tourbillons.

En conclusion : *trouver une 2-forme méromorphe  $\eta$  à pôles prescrits équivaut à trouver un champs de vecteurs  $\vec{v}$  de divergence nulle et irrotationnel tel que chaque pôle de  $\eta$  corresponde à une singularité de  $\vec{v}$  (puits, source ou tourbillon).* On s'est ainsi ramené à un problème de plomberie !

### V.4. Périodes

Soit  $\eta$  une 1-forme holomorphe et soit  $a \in H_1(S, \mathbb{Z})$ .

**Définition V.4.1.** — La partie réelle de la période de  $\eta$  sur la classe  $a$  est par définition

$$[\operatorname{Re} \eta](a) := \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} \eta \right),$$

où  $\gamma$  est une (multi-)courbe orientée qui représente  $a$ .

On note  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent à la courbe  $\gamma$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal « sortant » tel que  $(\vec{t}, \vec{n})$  est une base indirecte. Notons  $\vec{v}$  le champ de vecteurs dual à  $\operatorname{Re} \eta$  : il vérifie  $\operatorname{Re} \eta = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$ . On remarque alors que  $\langle \vec{v}, \vec{t} \rangle = -\langle * \vec{v}, \vec{n} \rangle$ . On en déduit l'égalité (où  $dl$  est l'élément de longueur sur  $\gamma$ )

$$[\operatorname{Re} \eta](a) = \int_{\gamma} \langle -(* \vec{v}), \vec{n} \rangle dl.$$

La période  $[\operatorname{Re} \eta](a)$  est donc égale au flux du champ  $-( * \vec{v} )$  à travers la courbe  $\gamma$ .

### V.5. Théorème d'existence

Nous allons utiliser les considérations ci-dessus pour expliquer comment construire des formes méromorphes sur une surface de Riemann. Partons d'une surface de Riemann fermée  $X$  et fixons un nombre fini de points  $P_1, \dots, P_m$  sur  $X$ , et des *parties principales* de la forme :

$$(A_i z_i^{-1} + B_i z_i^{-2} + C_i z_i^{-3} + \dots) dz_i \tag{3}$$

(sommes finies) au voisinage de chacun des points  $P_i$ , en termes de paramètres locaux  $z_i$ . Fixons enfin  $2g$  courbes simples fermées  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  rendant  $X$  simplement connexe, et ne passant pas par les points  $P_i$ .

**Théorème V.5.1 (Existence de 1-formes méromorphes)**

*On suppose que la somme des résidus  $\sum_i A_i = 0$ . Alors, pour chaque système de  $2g$  nombres réels, il existe une unique forme méromorphe sur  $X$  qui possède des pôles uniquement aux points  $P_i$  avec les parties principales données et dont les périodes évaluées sur les  $2g$  courbes ont comme parties réelles les  $2g$  nombres donnés.*

Les considérations ci-dessus permettent de traduire le théorème V.5.1 d'existence de formes méromorphes en termes de champs de vecteurs (ou, d'un point de vue plus physique, « d'écoulement »). Trouver une 1-forme méromorphe  $\eta$  à pôles prescrits équivaut à trouver un champ de vecteurs  $\vec{v}$  de divergence nulle et irrotationnel tel que chaque pôle de  $\eta$  correspond à une singularité de  $\vec{v}$  (puits, source ou tourbillon). De même, fixer les périodes revient à fixer les flux à travers des courbes représentant une base de l'homologie. Le théorème doit donc sembler « évident » à tout plombier. Dans la section suivante on en donne une démonstration mathématiquement rigoureuse.

**V.6. Théorie de Hodge et démonstration du théorème V.5.1**

Fixons  $g$  une métrique riemannienne compatible sur  $X$  et notons  $S$  la surface (réelle) riemannienne correspondante. Soit  $\omega$  une 1-forme (lisse) sur  $S$ .

**Définition V.6.1.** —

- La forme  $\omega$  est *co-fermée* si  $*\omega$  est fermée.
- Elle est dite *harmonique* si elle est à la fois fermée et co-fermée.

La preuve du théorème V.5.1 repose sur le théorème suivant, qui est un cas particulier de la *théorie de Hodge* valable en toutes dimensions et développée justement en cherchant à généraliser la situation bidimensionnelle :

**Théorème V.6.2.** — *Toute 1-forme lisse  $\omega$  à valeurs réelles se décompose de manière unique en une somme de trois 1-formes :*

$$\omega = \omega_h + dF + *dG,$$

où  $\omega_h$  est une forme harmonique lisse, et  $F$  et  $G$  sont des fonctions lisses à valeurs réelles définies globalement sur  $S$ .

Bien sûr, l'unicité a trait aux 1-formes  $\omega_h$ ,  $dF$ ,  $*dG$  et non pas aux fonctions  $F$  et  $G$  qui, elles, ne sont définies qu'à des constantes d'intégration près. Expliquons pourquoi ce résultat implique le théorème V.5.1.

*Démonstration du théorème V.5.1 à l'aide du théorème V.6.2*

**Théorème V.5.1 pour les formes holomorphes.** — Comme une 1-forme holomorphe est complètement déterminée par sa partie réelle et que, de plus, toute 1-forme harmonique est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe, il s'agit de démontrer qu'il existe une unique 1-forme harmonique ayant des périodes prescrites.

Nous utilisons, sans la justifier, une forme très élémentaire du théorème de de Rham : Sur une surface compacte orientable de genre  $g$ , on peut d'une part prescrire les  $2g$ -périodes d'une 1-forme fermée et d'autre part, une forme est exacte si et seulement si ces périodes sont nulles.

Pour l'existence, considérons une 1-forme fermée  $\omega$  à valeurs réelles ayant les périodes prescrites et appliquons-lui le théorème V.6.2. Puisque  $\omega$  est fermée, la partie co-exacte  $*dG$  de  $\omega$  est fermée. La proposition suivante assure alors que  $*dG = 0$ . Ainsi  $\omega$  est cohomologue à sa composante harmonique  $\omega_h$ , qui est donc solution du problème.

**Proposition V.6.3.** — *Pour toute fonction lisse  $G : S \rightarrow \mathbb{R}$ , nous avons*

$$\int_S |*dG|^2 \text{vol} = - \int_S G \cdot d(*dG).$$

*Démonstration.* — Puisque la somme

$$G \cdot d(*dG) + dG \wedge *dG$$

est exacte (égale à la différentielle de la 1-forme  $G \cdot *dG$ ) nous avons

$$\int_S G \cdot d(*dG) = - \int_S dG \wedge *dG.$$

Les formes  $dG$  et  $*dG$  étant orthogonales et de même norme on a l'égalité  $dG \wedge *dG = |*dG|^2 \text{vol}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Pour l'*unicité*, il suffit de prouver qu'une 1-forme harmonique  $\omega$  dont les périodes sont nulles est nulle. Mais une telle forme est exacte et sa primitive est une fonction harmonique. Par le principe du maximum, cette primitive est constante,  $\omega$  est donc nulle.

*Théorème V.5.1 pour les formes méromorphes.* — Fixons des points  $P_1, \dots, P_m$  de la surface, des parties principales en chacun de ces points de résidus  $A_1, \dots, A_m$ , nombres complexes de somme nulle, et des périodes réelles. Nous cherchons une forme méromorphe sur  $S$  ayant des pôles en les  $P_i$  de partie principale fixées ci-dessus et ayant les parties réelles de périodes prescrites.

Soit  $\alpha_0$  une 1-forme réelle lisse sur  $S \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$  et qui, au voisinage de chaque point  $P_i$  vérifie

$$\alpha_0 = \text{Re} \left( (A_i z_i^{-1} + B_i z_i^{-2} + C_i z_i^{-3} + \dots) dz_i \right).$$

Puisque  $\alpha_0$  est harmonique au voisinage des points  $P_i$ , la 2-forme  $d\alpha_0$  y est nulle. Elle s'étend donc en une forme lisse sur  $S$ .

**Lemme V.6.4.** —  $\int_S d\alpha_0 = 0$ .

*Démonstration.* — Choisissons de petits disques  $D_i$  centrés aux points  $P_i$  sur lesquels  $d\alpha_0 = 0$ . On a alors d'après le théorème de Stokes

$$\int_S d\alpha_0 = \int_{S \setminus \cup_i D_i} d\alpha_0 = - \sum_i \int_{\partial D_i} \alpha_0.$$

Cette dernière somme est égale à

$$\text{Re} \left( 2i\pi \sum_i A_i \right),$$

qui est nulle par l'hypothèse sur les résidus des parties principales données.  $\square$

Comme  $d\alpha_0$  est une forme lisse d'intégrale nulle, elle admet une primitive  $\omega$ . Considérons maintenant la 1-forme fermée

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \omega$$

sur  $S \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ . De même que précédemment, la 2-forme  $d(*\alpha_1)$  s'étend en une 2-forme lisse et d'intégrale nulle sur  $S$ . Notons  $\beta$  une

primitive lisse de la 2-forme  $d(*\alpha_1)$  sur  $S$  et appliquons-lui le théorème V.6.2 :

$$\beta = \beta_h + dF + *dG.$$

De l'égalité

$$d\beta = d(*\alpha_1),$$

nous déduisons

$$d(*dG) = d(*\alpha_1).$$

La 1-forme  $\alpha_2 = \alpha_1 - dG$  est fermée (comme  $\alpha_1$ ) et co-fermée d'après l'équation précédente. Elle est donc harmonique en dehors de ses pôles. C'est la partie réelle de la forme méromorphe cherchée, ce qui conclut la preuve du théorème V.5.1.  $\square$

### V.7. Démonstration du théorème V.6.2

**Définition V.7.1.** — Soit  $\Omega_{L^2}^1(S)$  l'espace des 1-formes différentielles réelles sur  $S$  dont les coefficients sont des fonctions mesurables de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{L^2} := \int_S \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_P \text{vol}_P = \int_S \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

(La dernière égalité découlant de la formule 2.)

Soit  $E$  l'adhérence dans  $\Omega_{L^2}^1(S)$  de l'espace des formes exactes lisses,  $E^*$  l'adhérence dans  $\Omega_{L^2}^1(S)$  de l'espace des formes co-exactes lisses (c'est-à-dire qui s'écrivent  $*dF$ , où  $F$  est une fonction lisse).

**Lemme V.7.2.** — *Les espaces  $E$  et  $E^*$  sont orthogonaux.*

*Démonstration.* — Soit  $\omega$  une 1-forme et  $F$  une fonction (toutes deux supposées lisses). On a alors

$$\int_S \langle dF, \omega \rangle \text{vol} = - \int_S dF \wedge *\omega = \int_S Fd(*\omega). \quad (4)$$

La première égalité découle de la formule 2, page 67 ; la deuxième découle de la relation de Leibniz  $d(F*\omega) = dF \wedge *\omega + Fd(*\omega)$  et de la formule de Stokes.

En appliquant cette identité à  $\omega = *dG$ , où  $G$  est une fonction lisse, on trouve que  $\langle dF, *dG \rangle_{L^2} = 0$ . Les espaces  $E$  et  $E^*$  sont donc orthogonaux.  $\square$

**Définition V.7.3.** — On note  $H$  l'orthogonal de  $E \oplus E^*$ .

On obtient une décomposition en somme directe orthogonale

$$\Omega_{L^2}^1(S) = H \oplus E \oplus E^*.$$

Il s'agit maintenant de montrer que  $H$  est l'espace des formes harmoniques lisses. Il suffit de montrer que tout élément de  $H$  coïncide localement avec une forme harmonique lisse.

En se plaçant dans des coordonnées conformes et en choisissant la métrique euclidienne standard (ce qui est permis, vu que les espaces fonctionnels précédents ne dépendent que de la structure conforme de  $S$ ), on est ramené au lemme local suivant :

**Lemme V.7.4 (Lemme de Weyl).** — Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité muni de sa métrique euclidienne  $dx^2 + dy^2$ . Toute 1-forme sur  $\mathbb{D}$  mesurable, de carré intégrable et orthogonale aux formes exactes et co-exactes à support compact est harmonique.

*Démonstration.* — Soit  $\omega$  une 1-forme sur  $\mathbb{D}$  intégrable et orthogonale aux formes exactes et co-exactes à supports compacts. Commençons par remarquer que si  $\omega$  est lisse, alors  $\omega$  est harmonique. Il s'agit de montrer que  $\omega$  est fermée et co-fermée. Puisque  $*\omega$  a les mêmes propriétés que  $\omega$ , il suffit par exemple de montrer que  $*\omega$  est fermée. Mais  $\omega$  est orthogonale aux formes fermées à support compact ; donc, d'après les formules (4, page 77), la forme  $d(*\omega)$  est orthogonale à toutes les fonctions à support compact. Cette forme est donc nulle.

L'idée est alors de régulariser  $\omega$  par convolution. On remarque que si le noyau de convolution est choisi invariant par rotation, la forme  $\omega$  est égale à sa convolée. Cela provient de la formule de la moyenne qui assure que la valeur d'une fonction harmonique en un point est égale à sa moyenne sur tout cercle centré en ce point. Ainsi, on montre que  $\omega$  est égale à sa convolée et donc est lisse.

Formellement, pour tout  $\rho \in ]0, 1[$ , notons  $D_\rho$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $\rho$ , et introduisons un *noyau régularisant*  $(K_\rho)_{\rho \in ]0, 1[}$  tel que, pour tout  $\rho \in ]0, 1[$  :

1.  $K_\rho$  est une fonction positive lisse définie sur  $\mathbb{D}$ , de support  $D_\rho$ , et d'intégrale égale à 1 ;
2.  $K_\rho(x, y)$  ne dépend que de  $x^2 + y^2$ .



Pour toute fonction intégrable  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $\rho \in ]0, 1[$ , on considère la fonction  $M_\rho f$  définie par

$$M_\rho f(x, y) = \int_{\mathbb{D}} K_\rho(x' - x, y' - y) f(x', y') dx' dy'.$$

De même, pour toute 1-forme  $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy$  sur  $\mathbb{D}$  et tout  $\rho \in ]0, 1[$ , on considère la 1-forme  $M_\rho \omega$  définie par

$$M_\rho \omega = (M_\rho \omega_x) dx + (M_\rho \omega_y) dy.$$

On a alors les propriétés suivantes :

- (i) Pour toute fonction intégrable  $f$ , la fonction  $M_\rho f$  est définie et lisse sur  $D_{1-\rho}$ .
- (ii) Pour toute fonction intégrable  $f$ , on a  $M_\rho df = d(M_\rho f)$  sur  $D_{1-\rho}$ . De même, pour toute 1-forme  $\omega$ , on a  $M_\rho(*\omega) = *(M_\rho \omega)$  sur  $D_{1-\rho}$ .
- (iii) Pour tout couple de fonctions  $f_1$  et  $f_2$  avec  $f_1$  à support dans  $D_{1-\rho}$ , on a  $\langle M_\rho f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, M_\rho f_2 \rangle$ .
- (iv) Pour toute fonction intégrable  $f$ , et tous  $\rho, \rho' \in ]0, 1[$ , on a  $M_\rho M_{\rho'} f = M_{\rho'} M_\rho f$  sur  $D_{1-\rho-\rho'}$ .
- (v) Pour tout  $0 < r < 1$ , les fonctions  $M_\rho f$  convergent vers  $f$  dans  $L^2(D_r)$  lorsque  $\rho$  tend vers 0.
- (vi) Si  $u$  est une fonction harmonique sur  $\mathbb{D}$  alors  $M_\rho u = u$  sur  $D_{1-\rho}$ .

Le dernier point, crucial, provient de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques et du choix de  $K_\rho$  invariant par rotation.

Les propriétés (ii) et (iii) montrent que si  $\omega$  est orthogonale à toutes les formes lisses exactes et co-exactes à support compact, alors  $M_\rho \omega$  est orthogonale à toutes les formes exactes et co-exactes dont le support est contenu dans  $D_{1-\rho}$ . Mais comme  $M_\rho \omega$  est lisse sur  $D_{1-\rho}$  d'après la propriété (i), on a vu que cela implique qu'elle est en fait harmonique dans  $D_{1-\rho}$ .

Pour conclure, il nous reste à démontrer que  $M_\rho \omega$  est presque partout égale à  $\omega$  sur  $D_{1-\rho}$ . Observons pour cela que les propriétés (ii) et (vi) montrent que, pour tous  $\rho, \rho'$  avec  $0 < \rho, \rho' < 1$ , on a

$$M_{\rho'} M_\rho \omega = M_{\rho'}(d u) = d(M_{\rho'} u) = d u = M_\rho \omega$$

sur la boule  $D_{1-\rho-\rho'}$ , où  $u$  est le potentiel de  $M_\rho \omega$ . D'après (v), on en déduit

$$M_\rho \omega = M_{\rho'} M_\rho \omega = M_\rho M_{\rho'} \omega = M_{\rho'} \omega,$$

sur la boule  $D_{1-\rho-\rho'}$ . Alors pour tout  $0 < r < 1$ , la famille  $M_\rho \omega$  est constante pour  $0 < \rho < 1 - r$  et tend vers  $\omega$  dans  $\Omega_{L^2}^1(B(0, r))$  lorsque  $\rho$  tend vers 0.

On a donc montré que  $\omega$  est presque partout égale à une forme harmonique lisse. Le lemme est démontré.  $\square$

Pour conclure la preuve du théorème V.6.2, nous aurons besoin d'un second lemme local.

**Lemme V.7.5.** — Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité muni de sa métrique euclidienne  $dx^2 + dy^2$ . Soit  $\omega$  une 1-forme lisse sur  $\mathbb{D}$ . Alors il existe des fonctions lisses  $F$  et  $G$  définies sur le disque telles que

$$\omega = dF + *dG.$$

**Remarque V.7.6.** — Ce lemme semble indiquer que, dans l'énoncé du théorème V.6.2, la forme harmonique  $\omega_h$  est toujours nulle. Ce n'est bien sûr pas le cas : le lemme V.7.5 est un résultat local spécifique au disque.

*Démonstration.* — Si  $\omega$  est fermée, elle est exacte sur  $\mathbb{D}$ . On cherche donc la fonction  $G$  telle que  $\omega - *dG$  soit fermée. On mesure le défaut de fermeture de  $\omega$  en posant  $d\omega = \varphi dx \wedge dy$ . Quitte à étendre  $\omega$  en une forme lisse sur  $\mathbb{R}^2$ , on suppose que  $\varphi$  est définie sur le plan.

Alors, d'après la formule (4, page 77), on a

$$d(\omega - *dG) = (\varphi - \Delta G) dx \wedge dy.$$

Il nous reste donc à résoudre l'équation  $\Delta G = \varphi$  sur  $\mathbb{D}$ . Si  $\varphi$  est la masse de Dirac en 0, alors la fonction de Green  $G_0(re^{i\theta}) = -\log(r)$  convient. Pour traiter le cas général, il suffit, par linéarité, de convoler  $\varphi$  par  $G_0$ . On vérifie ainsi que la fonction suivante convient :

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \varphi(x', y') dx' dy'.$$

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème V.6.2. Considérons une 1-forme lisse  $\omega$  sur  $S$  et écrivons la décomposition

$$\omega = \omega_h + a + b,$$

où  $\omega_h$  est harmonique,  $a$  appartient à  $E$  et  $b$  appartient à  $E^*$ . Nous prouvons d'abord que  $a$  et  $b$  sont des formes lisses. Il suffit bien sûr de le

vérifier localement. On considère donc un disque  $D$  dans  $S$ , suffisamment petit pour supporter des coordonnées conformes  $(x, y)$ . D'après le lemme V.7.5, il existe des fonctions lisses  $F$  et  $G$  telles que

$$\omega_h + a - dF = *dG - b.$$

Le membre de gauche est orthogonal aux formes co-exactes à support compact dans  $D$ , tandis que celui de droite est orthogonal aux formes exactes à support compact dans  $D$ . Cette forme différentielle est donc harmonique et lisse d'après le lemme V.7.4 de Weyl. Ceci force la régularité des formes  $a$  et  $b$ .

Pour conclure, il faut en déduire que  $a$  et  $b$  sont exactes. On montre, par exemple en utilisant le théorème d'Ascoli, que toute forme lisse qui est une limite dans la topologie  $L^2$  de formes exactes lisses est exacte. Le théorème est démontré.



# Théorème de Riemann-Roch

## VI.1. Existence de fonctions méromorphes

Soit  $X$  une surface de Riemann. On peut construire des fonctions méromorphes sur  $X$  comme quotient de différentielles méromorphes : Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux 1-formes méromorphes sur  $X$ . Dans une coordonnée locale  $z$ , on écrit :

$$\omega_1 = g_1(z)dz \text{ et } \omega_2 = g_2(z)dz.$$

Le rapport  $g_1(z)/g_2(z)$  est indépendant de la coordonnée locale  $z$  ; on note  $f = \omega_1/\omega_2$  la fonction méromorphe (globale) sur  $X$  ainsi définie.

**Théorème VI.1.1.** — *Sur toute surface de Riemann (compacte), il existe une fonction méromorphe non constante.*

*Démonstration.* — Il suffit de construire deux 1-formes méromorphes non proportionnelles. Soient  $z_0, z_1$  et  $z_2$  trois points. On construit :

- Une 1-forme méromorphe  $\omega_1$  avec résidu 1 en  $z_1$  et résidu  $-1$  en  $z_0$  et holomorphe partout ailleurs.
- Une 1-forme méromorphe  $\omega_2$  avec résidu 1 en  $z_2$  et résidu  $-1$  en  $z_0$  et holomorphe partout ailleurs.

Le quotient  $\omega_1/\omega_2$  a un pôle en  $z_1$  (peut-être d'ordre  $> 1$ ) et un zéro en  $z_2$  (peut-être d'ordre  $> 1$ ), il n'est donc pas constant.  $\square$

**Définition VI.1.2.** — Étant donné  $m$  points distincts  $P_1, \dots, P_m$  de  $X$ , on note  $\mathcal{E}(P_1, \dots, P_m)$  l'ensemble des fonctions méromorphes ayant éventuellement des pôles simples en les points  $P_1, \dots, P_m$  (et pas ailleurs). C'est naturellement un *espace vectoriel* complexe.

L'objet du théorème de Riemann-Roch est d'estimer sa dimension. Nous commençons par déduire du théorème V.5.1 le

**Théorème VI.1.3 (Inégalité de Riemann).** — Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Alors :

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) \geq m - g + 1.$$

*Démonstration.* — Fixons un choix de coordonnée locale  $z$  autour de chacun des points  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , et  $2g$  courbes simples fermées  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  qui découpent  $X$  en un domaine simplement connexe et ne passent pas par les  $P_k$ . Soit alors  $\omega_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) l'unique 1-forme méromorphe de partie principale  $dz/z^2$  en  $P_k$ , holomorphe partout ailleurs et dont les parties réelles de ses  $2g$  périodes sont nulles. Considérons le sous-espace vectoriel  $V \subset \mathbb{C}^m$  constitué des  $m$ -uplets  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  tels qu'il existe une 1-forme holomorphe  $\eta$  telle que

$$\eta + \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$$

soit exacte. Si  $f \in \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m)$ , alors sa différentielle  $df$  est combinaison linéaire de différentielles de formes méromorphes avec un pôle en  $P_i$  et de différentielles holomorphes :

$$df = \eta + \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m.$$

Puisqu'une forme holomorphe exacte est nulle, l'application  $df \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  est injective (elle est surjective par définition). On en déduit que

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) = \dim V + 1.$$

(En prenant des primitives (multiformes), il ne faut pas oublier de compter +1 dans les calculs de dimension, à cause de la constante d'intégration.)

$$\text{Soit } \Gamma = (\text{Im}(\int_{\gamma_l} \omega_k))_{l,k} \in M_{2g \times m}(\mathbb{R}).$$

**Lemme VI.1.4.** — Un  $m$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  de nombres complexes appartient au sous-espace  $V$  si

$$\Gamma \begin{pmatrix} \text{Re}(\alpha_1) \\ \vdots \\ \text{Re}(\alpha_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma \begin{pmatrix} \text{Im}(\alpha_1) \\ \vdots \\ \text{Im}(\alpha_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — Cela résulte du fait que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in V$  si et seulement si

$$\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$$

a les mêmes périodes qu'une 1-forme holomorphe. Or la condition implique que toutes les parties réelles des périodes de  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  sont nulles. Les parties réelles d'une 1-forme holomorphe sont toutes nulles si et seulement si cette forme est nulle (et donc ses périodes sont nulles).

Ainsi,  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  a ses périodes nulles, elle est donc exacte.  $\square$

Le théorème du rang implique donc que la dimension réelle de  $V$  est  $\geq 2m - 2g$ .  $\square$

Un corollaire immédiat, que l'on obtient en variant les ensembles de pôles imposés, est le suivant :

**Corollaire VI.1.5 (Riemann).** — *Une surface de Riemann compacte possède une infinité de fonctions méromorphes linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ .*

Par la suite, ce fut Gustav Roch, un étudiant de Riemann, qui réussit à interpréter la différence entre la dimension recherchée et l'expression  $m - g + 1$ .

**Théorème VI.1.6 (Riemann-Roch).** — *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Soient  $P_1, \dots, P_m$  des points distincts sur la surface. Alors :*

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) = m - g + 1 + \dim \Omega(P_1, \dots, P_m)$$

où  $\Omega(P_1, \dots, P_m)$  est l'espace vectoriel des formes holomorphes qui s'annulent en chacun des  $P_k$ .

Nous démontrons ce théorème dans les paragraphes qui suivent, mais avant on donne une première application du théorème de Riemann-Roch à l'uniformisation des courbes en genre 0 et 1.

*Application à l'uniformisation des courbes en genre 0 et 1.* — Il est difficile de surestimer l'importance du théorème de Riemann-Roch dans l'approche moderne de la théorie des courbes algébriques. En particulier, c'est ce théorème que l'on utilise régulièrement pour démontrer que toute surface de Riemann compacte simplement connexe est isomorphe à la sphère de Riemann.

**Théorème VI.1.7.** — *Une surface de Riemann compacte de genre nul est biholomorphe à la sphère de Riemann.*

*Démonstration.* — Une application directe du théorème de Riemann-Roch donne en effet l'existence sur une telle surface  $S$  d'une fonction méromorphe n'ayant qu'un pôle simple, c'est-à-dire d'une application holomorphe  $: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  de degré 1. Puisque  $S$  est de genre nul, le théorème de Riemann-Hurwitz entraîne que cette application ne présente pas de point de ramification, et est donc un isomorphisme.  $\square$

De manière semblable, le théorème de Riemann-Roch permet d'uniformiser les courbes de genre 1.

**Théorème VI.1.8.** — *Une surface de Riemann compacte de genre 1 est biholomorphe au quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau de translations.*

*Démonstration.* — Le théorème de Riemann-Roch appliqué au cas où  $m = 0$ ,  $g = 1$  fournit, sur une surface  $S$  de genre 1, l'existence d'une forme holomorphe  $\omega$  non-nulle. Or pour tout point  $P$  de  $S$ , l'espace  $\mathcal{E}(P)$  est réduit au constante :  $S$  ne possède pas de fonction méromorphe avec un unique pôle simple ; sinon, comme dans la preuve précédente,  $S$  serait isomorphe à la sphère de Riemann, de genre 0. En appliquant le théorème de Riemann-Roch avec  $m = 1$  et  $g = 1$ , on en déduit qu'une forme holomorphe non nulle sur  $S$  ne s'annule jamais.

Construisons alors son champ dual, c'est-à-dire le champ de vecteurs holomorphe non singulier  $X$  tel que  $\omega(X) = 1$ . L'intégration de ce champ fournit une action de  $\mathbb{C}$  sur la surface  $S$ . Puisque  $X$  est non singulier, toutes les courbes (complexes) intégrales de  $X$ , c'est-à-dire les orbites de notre action sont ouvertes. Comme le complémentaire d'une orbite est une réunion d'orbites, ces dernières sont aussi fermées et, par connexité de  $S$ , l'action de  $\mathbb{C}$  est transitive, ce qui identifie  $S$  à  $\mathbb{C}/\Lambda$ , où  $\Lambda$  est le stabilisateur d'un point, un sous-groupe fermé de  $\mathbb{C}$ . Puisque  $S$  est compacte et de même dimension que  $\mathbb{C}$ ,  $\Lambda$  est nécessairement un réseau de  $\mathbb{C}$ .  $\square$



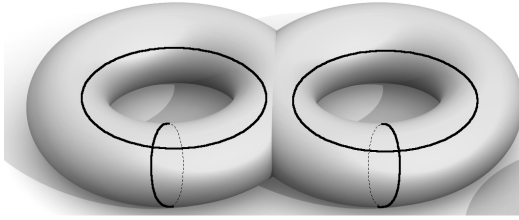


FIGURE 1. Une base symplectique de l'homologie

**VI.2. Relations bilinéaires de Riemann**

**VI.2.1. Une proposition de nature topologique**

Soit  $S$  une surface (lisse) compacte, connexe et orientable. Rappelons que

$$H_1(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \quad \text{et} \quad H_{\text{dR}}^1(S; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g},$$

où  $g$  est le genre de  $S$ . L'accouplement

$$\int : H_1(S; \mathbb{Z}) \times H_{\text{dR}}^1(S; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

met ces deux espaces en dualité : pour toute base  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$  de  $H_1(S; \mathbb{Z})$  il existe une base duale  $(\omega_1, \dots, \omega_{2g})$  de  $H_{\text{dR}}^1(S; \mathbb{R})$  telle que, pour tout  $i, j = 1, \dots, 2g$ ,

$$\int_{\gamma_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$

Le produit d'intersection

$$\begin{aligned} H_1(S; \mathbb{Z}) \times H_1(S; \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\mapsto \gamma_1 \# \gamma_2 \end{aligned}$$

définie une forme bilinéaire antisymétrique sur  $H_1(S; \mathbb{Z})$  qui possède des bases *symplectiques* relativement à ce produit.

**Proposition VI.2.1.** — Pour toute base symplectique  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  de  $H_1(S; \mathbb{Z})$  et pour toutes 1-formes fermées  $\eta$  et  $\eta'$  sur  $S$ , on a :

$$\int_S \eta \wedge \eta' = \sum_{i=1}^g \left( \int_{a_i} \eta \cdot \int_{b_i} \eta' - \int_{a_i} \eta' \cdot \int_{b_i} \eta \right).$$

*Démonstration.* — La base symplectique  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  de  $H_1(S; \mathbb{Z})$  est associée à un découpage de  $S$  en un  $4g$ -gône  $\Delta$  de cotés  $A_1, B_1, A'_1, B'_1, \dots, A_g, B_g, A'_g, B'_g$  où  $A_i$  et  $A'_i$  sont identifiés par l'application  $\varphi_i$  et  $B_i$  et  $B'_i$  par l'application  $\psi_i$ . On peut voir les formes différentielles  $\eta$  et  $\eta'$  comme des formes sur  $\Delta$ .

Puisque  $\Delta$  est simplement connexe, il existe une fonction  $f$  telle que  $df = \eta$ . Alors pour tout  $x \in A_i$  et pour tout  $y \in B_i$  on a (voir figure 2) :

$$f \circ \varphi_i(x) - f(x) = \int_{b_i(x)} df = \int_{b_i} \eta \quad (1)$$

et

$$f(y) - f \circ \psi_i(y) = \int_{a_i(y)} df = \int_{a_i} \eta. \quad (2)$$

La formule de Stokes implique :

$$\begin{aligned} \int_S \eta \wedge \eta' &= \int_{\Delta} \eta \wedge \eta' = \int_D d(f\eta') \\ &= \int_{\partial\Delta} f\eta' \\ &= \sum_{i=1}^g \int_{A_i+B_i-A'_i-B'_i} f\eta', \end{aligned}$$

et il découle donc de (1) et (2) que

$$\int_{A_i-A'_i} f\eta' = \int_{A_i} (f - f \circ \varphi_i)\eta' = - \int_{b_i} \eta \cdot \int_{a_i} \eta'$$

et

$$\int_{B_i-B'_i} f\eta' = \int_{B_i} (f - f \circ \psi_i)\eta' = \int_{a_i} \eta \cdot \int_{b_i} \eta'$$

ce qui prouve l'égalité annoncée □

**Remarque VI.2.2.** — Si  $S$  est munie d'une structure de surface de Riemann et si  $\eta$  et  $\eta'$  sont holomorphes on a de plus :

$$\int_S \eta \wedge \eta' = 0 \quad (\text{car } dz \wedge dz = 0)$$

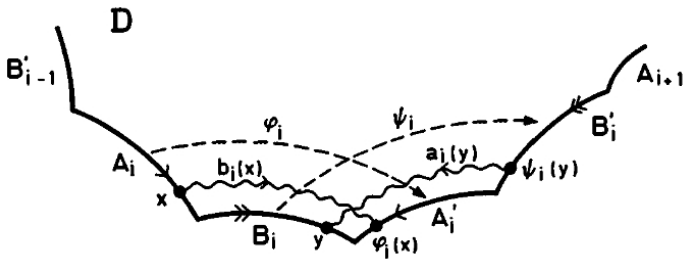


FIGURE 2. Relations de périodes

et si  $\eta \neq 0$ ,

$$i \int_X \eta \wedge \bar{\eta} > 0 \text{ (car } dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy).$$

Il découle alors de la proposition VI.2.1 que l'application  $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)_{i=1, \dots, g}$  est injective. En particulier que l'espace vectoriel des 1-forme holomorphes est de dimension  $\leq g$  ; le théorème suivant montre que l'on a en fait égalité.

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte avec  $m$  points marqués  $P_1, \dots, P_m$  et dont on fixe  $2g$  courbes simples fermées  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  qui ne passent pas par les  $P_i$  et forment une base symplectique de  $H_1(X; \mathbb{Z})$ . En conservant les notations (parties principales  $A_i$  en chaque  $P_i$ ) du théorème V.5.1 on montre la variante suivante :

**Théorème VI.2.3 (Existence de 1-formes méromorphes)**

*On suppose que la somme des résidus  $\sum_i A_i = 0$ . Alors, pour chaque système de  $g$  nombres complexes, il existe une unique forme méromorphe sur  $X$  qui possède des pôles uniquement aux points  $P_i$  avec les parties principales données et dont les périodes évaluées sur les  $g$  courbes  $a_1, \dots, a_g$  sont les  $g$  nombres donnés.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence de la remarque précédente et du théorème V.5.1 : en vertu de ce dernier, l'espace recherché est un espace affine sur l'espace des formes holomorphes, qui est de dimension (réelle)  $2g$ . Or l'application  $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)_{i=1, \dots, g}$  est injective. Elle est donc bijective : une forme holomorphe est uniquement déterminée par ses périodes sur les  $a_i$ .

La même application  $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)_{i=1, \dots, g}$  est une application affine injective sur l'espace recherché. Ce dernier est de dimension complexe  $g$  (comme son espace directeur, celui des formes holomorphes). C'est donc une bijection.  $\square$

Pour démontrer le théorème de Riemann-Roch nous aurons enfin besoin d'une version raffinée de la proposition VI.2.1 que nous énonçons ci-dessous. La démonstration est essentiellement la même, nous ne faisons que l'esquisser.

**Proposition VI.2.4.** — *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte dont on fixe  $2g$  courbes simples fermées  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  qui forment une base symplectique de  $H_1(X; \mathbb{Z})$ . Soient  $\omega_1$  une 1-forme holomorphe sur  $X$  et  $\omega_2$  une 1-forme méromorphe (non singulière le long des  $a_j, b_j$ ). Étant donné un point  $z_0 \in X - \{a_j, b_j\}$  on pose  $u(z) = \int_{z_0}^z \omega_1$ . Alors :*

$$2i\pi \sum \text{Res}(u \omega_2) = \sum_{i=1}^g \left( \int_{a_i} \omega_1 \cdot \int_{b_i} \omega_2 - \int_{a_i} \omega_2 \cdot \int_{b_i} \omega_1 \right).$$

*Démonstration.* — En conservant les notations de la proposition VI.2.4, la proposition découle de la formule des résidus

$$2i\pi \sum \text{Res}(u \omega_2) = \int_{\partial \Delta} u \omega_2$$

et des équations (1) et (2).  $\square$

### VI.2.2. Relations bilinéaires de Riemann

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte dont on fixe  $2g$  courbes simples fermées  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  qui forment une base symplectique de  $H_1(X; \mathbb{Z})$ . On fixe une base  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  de l'espace des 1-formes holomorphes sur  $X$ .

**Définition VI.2.5.** — On appelle *matrices des périodes* les matrices  $A$  et  $B \in M_g(\mathbb{C})$  définies par

$$A_{ij} = \int_{a_j} \omega_i \text{ et } B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i.$$

### **Théorème VI.2.6 (Relations bilinéaires de Riemann)**

1. La matrice  $A$  est inversible.

2. La matrice  $\Omega = A^{-1}B$  est symétrique et sa partie imaginaire  $\text{Im } \Omega = (\text{Im } \Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$  est définie positive.

*Démonstration.* — Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_g) \in \mathbb{C}^g$  tel que

$$\sum_{i=1}^g \lambda_i A_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, g).$$

Considérons alors la 1-forme holomorphe

$$\omega = \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i.$$

Par définition de  $A$ , on a :

$$\int_{a_j} \omega = 0 \quad (j = 1, \dots, g)$$

et donc aussi

$$\int_{a_j} \bar{\omega} = 0 \quad (j = 1, \dots, g).$$

Il découle donc de la proposition VI.2.1 que  $\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = 0$ , de sorte que  $\omega = 0$  et donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_g = 0$ . La matrice  $A$  est donc inversible.

Montrons maintenant le deuxième point du théorème. On vérifie facilement que la matrice  $\Omega$  est indépendante du choix de la base  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ . Puisque  $A$  est inversible, quitte à changer de base on peut supposer que  $A = I$ , c'est-à-dire que

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

On a alors  $\Omega_{ij} = B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i$  mais il découle encore de la proposition VI.2.1 que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \omega_i \wedge \omega_j = \sum_{k=1}^g \left( \int_{a_k} \omega_i \cdot \int_{b_k} \omega_j - \int_{a_k} \omega_j \cdot \int_{b_k} \omega_i \right) \\ &= \int_{b_i} \omega_j - \int_{b_j} \omega_i \end{aligned}$$

de sorte que  $\Omega$  est symétrique. Finalement si  $v = (v_1, \dots, v_g) \in \mathbb{R}^g - \{0\}$ , il découle encore de la proposition VI.2.1 que

$${}^t v \cdot \text{Im } \Omega \cdot v = \frac{i}{2} \int_X \eta \wedge \bar{\eta} > 0,$$

où  $\eta = \sum_{i=1}^g v_i \omega_i$ . □

### VI.3. Démonstration du théorème VI.1.6

On procède comme pour la démonstration de l'inégalité de Riemann. Cependant, grâce à la variante du théorème d'existence donnée dans le théorème VI.2.3, on se place dans un cadre plus naturel où les applications définies sont linéaires sur  $\mathbb{C}$ . Ca permet d'analyser plus simplement ces applications. Fixons donc un choix de coordonnée locale  $z$  autour de chacun des points  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , et  $2g$  courbes simples fermées  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  qui forment une base symplectique de  $H_1(X; \mathbb{Z})$  et ne passent pas par les  $P_k$ . D'après le théorème VI.2.3 il existe une unique 1-forme méromorphe  $\omega_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) de partie principale  $dz/z^2$  en  $P_k$ , holomorphe partout ailleurs et dont les  $g$  périodes selon les courbes  $a_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) sont nulles.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel  $V \subset \mathbb{C}^m$  constitué des  $m$ -uplets  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  tels qu'il existe une 1-forme holomorphe  $\eta$  telle que

$$\eta + \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$$

soit exacte. Comme dans la démonstration de l'inégalité de Riemann, on a :

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) = \dim V + 1.$$

Soit

$$H = \left( \int_{b_i} \omega_j \right) \in M_{g \times m}(\mathbb{C}).$$

**Lemme VI.3.1.** — Un élément  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$  appartient à  $V$  si et seulement si

il appartient à  $\text{Ker}(H)$ .

De plus, la forme  $\eta$  apparaissant dans la définition de  $V$  est toujours nulle.

*Démonstration.* — Si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in V$  alors la forme  $\omega = \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  a les mêmes périodes que la 1-forme holomorphe  $-\eta$ . Mais, par définition des  $\omega_j$ , toutes les  $a$ -périodes de  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  sont nulles.

Donc c'est aussi vrai pour  $-\eta$  qui est donc nulle. Les  $b$ -périodes de  $\omega$  sont donc également nulles. On en déduit :

$$0 = \int_{b_i} \left( \sum_j \alpha_j \omega_j \right) = \sum_j \alpha_j \left( \int_{b_i} \omega_j \right) \quad (i = 1, \dots, g),$$

c'est-à-dire que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \text{Ker}H$ .

Si, réciproquement, on suppose que

$$H \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors les  $a$ -périodes et les  $b$ -périodes de  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  sont nulles donc  $\alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_m \omega_m$  est exacte (sans avoir besoin de la corriger par une forme holomorphe  $\eta$ ).  $\square$

Il découle du lemme précédent que  $V = \text{Ker}H$ , où  $H$  est vue comme application linéaire  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^g$ . Le théorème du rang implique donc :

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) = m - \text{rang}(H) + 1. \tag{3}$$

On retrouve en particulier l'inégalité de Riemann :  $\dim \mathcal{E}(P_1, \dots, P_m) \geq m - g + 1$ . Il nous reste à déterminer le rang de  $H$ . On l'interprète en termes de 1-formes holomorphes, en passant à l'application duale.

Soit  $\varphi_l$  la 1-forme holomorphe déterminée par ses  $a$ -périodes :

$$\int_{a_k} \varphi_l = \delta_{kl}.$$

**Lemme VI.3.2.** — *Un  $g$ -uplet de nombres complexes  $(\beta_1, \dots, \beta_g)$  appartient au noyau de  ${}^t H : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^m$  si et seulement si la 1-forme holomorphe  $\beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_g \varphi_g$  s'annule en les points  $P_1, \dots, P_m$ .*

*Démonstration.* — Dans les coordonnées locales  $z$  autour des points  $P_k$  on a :

$$\varphi_l = (\lambda_l^k + \dots) dz.$$

La proposition VI.2.4 appliquée à  $\omega_1 = \varphi_l$  et  $\omega_2 = \omega_k$  implique alors :

$$\int_{b_l} \omega_k = \int_{a_l} \varphi_l \cdot \int_{b_l} \omega_k = 2i\pi \text{Res}_{P_k} \left( \underbrace{\left( \int \varphi_l \right) \omega_k}_{= \frac{\lambda_l^k}{z} dz + \dots} \right) = 2i\pi \lambda_l^k.$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2i\pi}H = (\varphi_l(P_k))_{\substack{l=1,\dots,g \\ k=1,\dots,m}}$$

et  $(\beta_1, \dots, \beta_g)H = 0$  si et seulement si la 1-forme holomorphe  $\beta_1\varphi_1 + \dots + \beta_g\varphi_g$  s'annule en les points  $P_1, \dots, P_m$ .  $\square$

D'après le théorème du rang

$$g = \text{rang}({}^t H) + \dim \text{Ker}({}^t H)$$

et, d'après le lemme précédent,

$$\dim \text{Ker}({}^t H) = \dim \Omega(P_1, \dots, P_m).$$

On a donc :

$$\dim \Omega(P_1, \dots, P_m) = g - \text{rang}({}^t H). \quad (4)$$

Puisque  $H$  et  ${}^t H$  ont le même rang, le théorème de Riemann-Roch découle de (3) et (4).

#### VI.4. Vision faisceutique du théorème de Riemann-Roch et dualité de Serre

Nous présentons ici la vision moderne du théorème de Riemann-Roch *via* la notion de *faisceau* qui permet de mieux comprendre le passage du local au global.

##### VI.4.1. Faisceaux

**Définition VI.4.1 (Faisceau).** — Soit  $X$  un espace topologique. Un *faisceau*  $\mathcal{F}$  de groupes abéliens sur  $X$  est une famille de groupes abéliens  $\mathcal{F}(U)$  paramétrés par les ouverts  $U \subset X$  (les sections au-dessus de  $U$ ) et une familles de morphismes de groupes  $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  (applications de restriction), où  $V \subset U \subset X$  sont des ouverts, astreints aux propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{F}(\emptyset)$  est le groupe trivial,  $\rho_U^U$  est toujours l'identité et  $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$  dès que  $W \subset V \subset U$  (on dit alors que  $\mathcal{F}$  est un *préfaisceau*) ;
2. si  $U = \cup U_i$  (recouvrement ouvert) et si  $f, g \in \mathcal{F}(U)$  et  $\rho_{U_i}^U(f) = \rho_{U_i}^U(g)$  pour tout  $i$ , alors  $f = g$ ,
3. si  $U = \cup U_i$  (recouvrement ouvert) et si on se donne des  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tels que  $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$ , alors il existe un élément  $f \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$ .



*Exemples.* — 1. Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout ouvert  $U \subset X$  soit  $\mathcal{C}(U)$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour  $V \subset U$  soit  $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  l'application de restriction usuelle. Alors  $\mathcal{C}$  est un faisceau.

2. Si  $X$  est une surface de Riemann, les algèbres  $\mathcal{O}(U)$  des fonctions holomorphes sur  $U$  et les applications de restrictions standard définissent un faisceau  $\mathcal{O}$ .

On prendra garde au fait que l'algèbre  $\mathcal{B}(U)$  des fonctions holomorphes bornées sur  $U \subset X$  définit bien un préfaisceau mais pas un faisceau.

3. On définit de même le faisceau  $\Omega^1$  des 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann ainsi que le faisceau  $\mathcal{E}$  des fonctions lisses, le faisceau  $\mathcal{E}^1$  des 1-formes lisses, le faisceau  $\mathcal{E}^{1,0}$ , resp.  $\mathcal{E}^{0,1}$ , des 1-formes de type  $(1, 0)$ , resp.  $(0, 1)$ , c'est-à-dire localement de type  $f dz$ , resp.  $f d\bar{z}$ , avec  $f$  lisse.

**Définition VI.4.2.** — Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau sur un espace topologique  $X$  et  $x \in X$  un point. On définit la relation  $\simeq_x$  sur l'union disjointe

$$\bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

par :  $f \in \mathcal{F}(U)$  et  $g \in \mathcal{F}(V)$  sont équivalents  $f \simeq_x g$  si et seulement s'il existe un ouvert  $W \subset U \cap V$  contenant  $x$  tel que  $f|_W = g|_W$ . On note

$$\mathcal{F}_x = \left( \bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \right) / \simeq_x;$$

c'est un groupe abélien. Pour tout voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$ , soit

$$\rho_x : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$$

l'application qui à un élément  $f \in \mathcal{F}(U)$  associe sa classe d'équivalence modulo  $\simeq_x$ . On appelle  $\rho_x(f)$  le *germe* de  $f$ .

### VI.4.2. Cohomologie

Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{F}$  un faisceau de groupes abéliens sur  $X$ .

**Définition VI.4.3.** — On note  $H^0(X; \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$  le groupe des sections globales du faisceau  $\mathcal{F}$ .

C'est l'objet qui nous intéresse ; il s'inscrit dans une famille de groupes de cohomologie mais nous ne considérerons ici que le suivant  $H^1(X; \mathcal{F})$ . Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On note

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_q)} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

avec sa structure naturelle de groupe. Le groupe  $H^0(X; \mathcal{F})$  est aussi le noyau du morphisme

$$\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

qui à  $(c_i)$  associe  $(c_{ij})$  où  $c_{ij} = c_i - c_j$  est défini sur  $U_i \cap U_j$ . On définit de la même manière

$$\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

par  $\delta((c_{ij})) = (c_{ijk})$ , où  $c_{ijk} = c_{jk} - c_{ik} + c_{ij}$  est défini sur  $U_i \cap U_j \cap U_k$ .

**Définition VI.4.4.** — L'espace des *1-cocycles* est

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker}(\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

et celui des *1-cobord* est

$$B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Im}(\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

On a  $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  et on pose :

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

L'espace  $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$  est indépendant du recouvrement  $\mathcal{U}$ . En général si  $\mathcal{V}$  est un recouvrement ouvert de  $X$  plus fin que  $\mathcal{U}$ , il n'est pas difficile de montrer (cf. par exemple [Forst1977, §12]) qu'il existe une injection canonique

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

de sorte que que les groupes  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  forme un système directe indexé par les recouvrements  $\mathcal{U}$ . On pose alors :

**Définition VI.4.5.** — Le premier groupe de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{F}$  est la limite directe du système  $(H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}))_{\mathcal{U}}$  :

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \left( \bigcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \right) / \simeq,$$

où  $\xi \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  et  $\eta \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  sont équivalents,  $\xi \simeq \eta$ , si et seulement s'il existe un recouvrement plus fin  $\mathcal{W}$  tel que les images de  $\xi$  et  $\eta$  dans  $H^1(\mathcal{W}, \mathcal{F})$  coïncident.

Noter que pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  l'application canonique

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

est injective. En particulier  $H^1(X, \mathcal{F})$  est trivial si et seulement si tous les  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  sont triviaux.

**Théorème VI.4.6.** — *Soit  $X$  une surface de Riemann et  $\mathcal{F}$  l'un des faisceaux  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^1$ ,  $\mathcal{E}^{1,0}$  ou  $\mathcal{E}^{0,1}$ . Alors :  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ .*

*Démonstration.* — Nous ne considérons que le cas  $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ ; les autres cas se traitent de la même manière. Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert quelconque de  $X$ . Nous allons montrer que  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$ . Considérons donc un cocycle  $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ . Il s'agit de montrer qu'il existe des fonctions  $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$  telles que pour  $i, j \in I$  on ait

$$g_i - g_j = f_{ij}$$

sur  $U_i \cap U_j$ .

Soit  $(\psi_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$ . On pose

$$g_i = \sum_{j \in I} \psi_j f_{ij}.$$

Alors, en utilisant la relation de cocycle pour  $f$ , on a :

$$\begin{aligned} g_i - g_j &= \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \psi_k f_{jk} \\ &= \sum_k \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_k \psi_k f_{ij} = f_{ij}. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant n'est pas difficile mais fondamental en pratique pour calculer le premier groupe de cohomologie; on renvoie à [Forst1977, §12] pour sa démonstration.

**Théorème VI.4.7 (Leray).** — *Si pour tout  $U_i$  du recouvrement  $\mathcal{U}$  on a  $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$  alors*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F}).$$

Les définitions et résultats suivants nous serviront à calculer des groupes de cohomologie en changeant le faisceau.

**Définition VI.4.8.** — Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des faisceaux de groupes abéliens au-dessus d'un espace topologique  $X$ . Un *morphisme de faisceaux*  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est une famille de morphismes de groupes

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), \quad U \text{ ouvert dans } X,$$

qui est compatible aux morphismes de restrictions, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \text{restr.} \downarrow & & \downarrow \text{restr.} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

est commutatif.

Pour tout ouvert  $U \subset X$  on définit

$$\mathcal{K}(U) = \text{Ker}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)).$$

La famille de groupes abéliens  $\mathcal{K}(U)$  définit un faisceau que l'on appelle le *noyau* de  $\alpha$ ; on le note  $\mathcal{K} = \text{Ker}\alpha$ .

Si  $x \in X$ , un morphisme de faisceau  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induit un morphisme de groupe

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x.$$

Une suite de morphismes de faisceaux  $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$  est dit *exacte* si la suite

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

est exacte.

Le théorème suivant est essentiellement formel; cf. [Forst1977, §15].

**Théorème VI.4.9.** — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux sur un espace topologique  $X$  tel que  $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ . Alors :

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X) / \beta(\mathcal{G}(X)).$$

### VI.4.3. Retour aux surfaces de Riemann

Soit  $X$  une surface de Riemann. On note  $d''$  l'opérateur différentiel sur les fonctions lisse sur  $X$  défini par

$$d'' f = d f^{(0,1)}.$$

Dans un ouvert de coordonnée  $(U, z)$  on a donc :

$$d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z}.$$

**Lemme VI.4.10.** — *La suite de faisceaux*

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1} \rightarrow 0$$

*est exacte.*

*Démonstration.* — La seule chose délicate à vérifier est que pour tout  $x \in X$  le morphisme

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{d''_x} \mathcal{E}_x^{0,1}$$

est surjectif. Mais cela découle des lemmes V.7.4 et V.7.5 en ne considérant que les formes de type  $(0, 1)$ .  $\square$

L'espace  $H^0(\mathcal{O})$  s'interprète comme l'espace des fonctions holomorphes sur  $X$  et les théorèmes VI.4.6 et VI.4.9 permettent de déduire du lemme précédent le

**Théorème VI.4.11 (Dolbeault).** — *On a :*

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{E}(X).$$

On veut étudier des fonctions *méromorphes* à pôles prescrit. Cela motive la

**Définition VI.4.12.** — On interprète un système de multiplicités  $n_i$  attachées à des points  $P_i$  comme un *diviseur*  $D := \sum n_i P_i$ . La somme  $\sum n_i$  est par définition *le degré*  $\deg(D)$  de  $D$ . Un diviseur  $D$  est dit *effectif* si tous les  $n_i$  sont positifs. On définit alors un ordre sur les diviseurs :  $D_1 \geq D_2$  si  $D_1 - D_2$  est effectif.

Les (germes de) fonctions ayant au plus un pôle d'ordre  $n_i$  au point  $P_i$  forment un faisceau, noté  $\mathcal{O}(D)$ .

**Définition VI.4.13.** — Un *fibré en droites*  $L$  est une famille  $\{L_x\}_{x \in X}$  de droites complexes qui dépendent holomorphiquement de  $x \in X$ . Une *section*  $s$  de  $L$  est une application  $X \rightarrow L, x \mapsto s(x) \in L_x$ .

Soit  $P \in X$  et  $t$  une trivialisatıon locale holomorphe de  $L$  au voisinage de  $P$ . Si  $s$  est une section méromorphe et non-nulle. Alors, au-voisinage

de  $P$  on a  $s = ft$  avec  $f$  méromorphe et la valuation de  $f$  en  $P$  ne dépend pas de la trivialisaton  $t$ , on la note  $v_P(s)$ . On pose alors

$$\text{divs} = \sum_{P \in X} v_P(s)R \quad (\text{somme finie}).$$

Le diviseur  $\text{divs}$  est effectif si et seulement si  $s$  est holomorphe.

**Proposition VI.4.14.** — *Étant donné un diviseur  $D = \sum n_i P_i$  sur  $X$ , on peut lui associer un fibré en droites (complexes)  $L(D)$  et une section méromorphe telle que  $\text{divs} = D$ .*

*Démonstration.* — On se fixe des cartes disjointes  $(U_i, z_i)$  autour de chacun des  $P_i$  telles que  $z_i(P_i) = 0$ . Soit  $U_0 = X - \{P_1, \dots, P_m\}$ . On définit  $L$  comme le fibré en droites de trivialisaton  $U_0, U_1, \dots, U_m$  et de fonctions de transition

$$\varphi_{U_i U_0} = z_i^{n_i} \text{ sur } U_i \cap U_0.$$

Enfin la fonction  $s$  définie par  $s(x) = z_i^{n_i}(x)$ , pour  $x \in U_i$ , et  $s(x) = 1$  pour  $x \in U_0$  est une section méromorphe de  $L$  telle que  $\text{divs} = D$ .  $\square$

Le faisceau  $\mathcal{O}_D$  est aussi le faisceau des sections (locales) holomorphes de  $L$ . Les deux groupes de cohomologie  $H^0(X; L(D)) := H^0(X, \mathcal{O}(D))$  et  $H^1(X; L(D)) := H^1(X, \mathcal{O}(D))$  de ce faisceau sont naturellement des espaces vectoriels complexes. Le premier espace  $H^0(X, \mathcal{O}(D))$  s'interprète comme l'espace recherché des fonctions méromorphes à pôles d'ordre au plus  $D$  et définies globalement sur  $X$  (ou encore que l'espace des section (globales) holomorphes de  $L(D)$ ). Il est de dimension fini notée  $h^0(\mathcal{O}(D))$  (dimension qui est aussi souvent notée  $l(D)$  dans la littérature). Le second espace peut se réécrire comme dans le théorème de Dolbeault : puisque l'on dispose d'un espace  $C^\infty(X; L)$  de sections  $C^\infty$  du fibré  $L = L(D)$ , on a également un opérateur

$$d_L'' : C^\infty(X; L) \rightarrow C^\infty(X; L \otimes \bar{\omega}_X),$$

où  $\omega_X$  est le fibré en droite dual du fibré tangent holomorphe. On a alors :

$$H^1(X, \mathcal{O}(D)) = C^\infty(X; L \otimes \bar{\omega}_X) / \text{Im} d_L''.$$

Il découle de la théorie de Hodge que cet espace est lui aussi *de dimension finie*, notée  $h^1(\mathcal{O}(D))$ . La théorie de Hodge permet d'ailleurs d'interpréter globalement cet espace comme l'espace vectoriel des formes harmoniques de type  $(0, 1)$  ( $\equiv$  formes anti-holomorphes) à valeurs dans  $L$ .

Une autre manière d'interpréter cet espace de cohomologie globalement est *via le théorème de dualité de Serre* que nous décrivons maintenant.

#### VI.4.4. Théorème de dualité de Serre

Soient  $X$  une surface de Riemann compacte et  $L_1$  et  $L_2$  deux fibrés en droites au-dessus de  $X$ . Si  $f_i \in C^\infty(X; L_i)$ ,  $i = 1, 2$ , alors

$$d''_{L_1 \otimes L_2}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot d''_{L_2} f_2 + d''_{L_1} f_1 \cdot f_2.$$

En particulier si  $f_1 \in H^0(X; L_1)$ , on a  $d''_{L_1 \otimes L_2}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot d''_{L_2} f_2$ . L'application

$$\begin{cases} H^0(X; L_1) \times C^\infty(X; L_2 \otimes \bar{\omega}_X) & \rightarrow C^\infty(X; L_1 \otimes L_2 \otimes \bar{\omega}_X) \\ (f_1, \alpha_2) & \mapsto f_1 \cdot \alpha_2 \end{cases}$$

passé donc au quotient en une application

$$\begin{cases} H^0(X; L_1) \times H^1(X; L_2) & \rightarrow H^1(X; L_1 \otimes L_2) \\ (f_1, [\alpha_2]) & \mapsto f_1 \cdot [\alpha_2] = [f_1 \cdot \alpha_2]. \end{cases} \quad (5)$$

Considérons maintenant le cas où  $L_2 = L$  et  $L_1 = L^* \otimes \omega_X$ . Alors

$$H^1(X; L^* \otimes L \otimes \omega_X) \cong H^1(X; \omega_X).$$

Mais un élément de  $H^1(X; \omega_X)$  est représentée par une 2-forme  $\alpha$  sur  $X$  (à des formes exactes près) que l'on peut intégrer sur  $X$  :

$$\text{Res}([\alpha]) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \alpha.$$

On obtient ainsi une application surjective

$$\text{Res} : H^1(X; \omega_X) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui composée avec l'application (5) induit une application bilinéaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^0(X; L^* \otimes \omega_X) \times H^1(X; L) \rightarrow \mathbb{C}.$$

**Théorème VI.4.15 (Dualité de Serre).** — *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte et soit  $L = L(D)$  un fibré en droites complexes sur  $X$ . Alors l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  met les espaces  $H^0(X, \Omega(-D)) = H^0(X; L^* \otimes \omega_X)$  et  $H^1(X, \mathcal{O}(D)) = H^1(X; L)$  en dualité. Ici  $\Omega(-D)$  est le faisceau des formes holomorphes s'annulant au moins à l'ordre  $D$ . On a donc canoniquement :*

$$H^1(X, \mathcal{O}(D)) \cong H^0(X, \Omega(-D))^*.$$

**Remarque VI.4.16.** — 1. Dans les coordonnées utilisées dans notre démonstration « élémentaire » du théorème de Riemann-Roch, la dualité de Serre correspond au fait que

$$\text{Ker}({}^t H) \cong \text{Coker}(H).$$

Le théorème ci-dessus à l'avantage de ne plus passer par des coordonnées.

2. En théorie de Hodge le théorème de dualité de Serre n'est autre que la dualité entre les formes de type  $(1, 0)$  et les formes de type  $(0, 1)$  donné par le cup-produit.

Rappelons le théorème de Riemann-Roch :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}(D)) - \dim H^0(X, \Omega(-D)) = \text{deg}(D) - g + 1.$$

La *caractéristique d'Euler*  $\chi(\mathcal{O}(D))$  du faisceau  $\mathcal{O}(D)$  est par définition la différence  $h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D))$ . Via la dualité de Serre, le théorème de Riemann-Roch s'écrit donc dans ce langage

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \text{deg}(D) - g + 1.$$

Vu de cette manière, on n'a qu'une réécriture tautologique. La force de cette réécriture provient du fait qu'ainsi on obtient des énoncés qui s'étendent en toutes dimensions, comme l'ont montré Kodaira, Hirzebruch, Serre, Grothendieck dans les années 1950 : la caractéristique d'Euler  $\chi(\mathcal{F})$  du faisceau  $\mathcal{F}$  des sections d'un fibré algébrique sur une variété algébrique compacte ou d'un fibré holomorphe sur une variété analytique compacte s'exprime uniquement en termes d'invariants topologiques du fibré considéré et du fibré tangent de la variété ; et les espaces vectoriels  $H^i(\mathcal{F})$  intervenant dans la définition de  $\chi(\mathcal{F})$  sont naturellement isomorphes à  $(H^{n-i}(\Omega(\mathcal{F}^*)))^*$ , où  $n$  est la dimension de la variété.

## VI.5. Existence de 1-formes méromorphes sur les courbes algébriques

Partant d'une surface de Riemann  $X$  compacte associée à une courbe algébrique on peut démontrer l'existence de 1-formes méromorphes « à la main ». Supposons donc que  $X$  s'immerge dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  comme une courbe algébrique  $C$  dont tous les points singuliers sont doubles à tangentes distinctes. Pour un choix convenable de carte affine, la courbe  $C$  est transverse à la droite à l'infini et, au voisinage de chaque point



double, la première projection  $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est une coordonnée sur chaque branche.

Commençons par construire des 1-formes holomorphes sur  $X$ . Notons  $E$  l'espace vectoriel des polynômes  $P \in \mathbb{C}[x, y]$  de degré au plus  $d - 3$  et qui s'annulent en chaque point double de  $C$ . Soit  $P \in E$ . Notons  $\omega_P$  le relevé à  $X$  de la différentielle abélienne

$$P(x, y) \frac{dx}{F'_y} \quad (6)$$

où  $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ .

- Proposition VI.5.1.** — 1. Pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , la forme  $\omega_P$  est holomorphe sur  $X$ .
2. L'application  $P \mapsto \omega_P$  de  $E$  vers l'espace  $\Omega^1(X)$  des 1-formes holomorphes sur  $X$  est linéaire et injective.
3. La dimension de  $E$  est supérieure ou égale à  $g$ , le genre de  $X$ .

*Démonstration.* — 1. L'expression (6) définit *a priori* une 1-forme holomorphe sur  $C$  privée :

- des points où la première projection  $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ne définit pas une coordonnée holomorphe locale, c'est-à-dire des points d'intersection de  $C$  avec la droite à l'infini, et des points de ramifications de  $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ;
- des points où  $F'_y$  s'annule, c'est-à-dire des points doubles de  $C$  et des points de ramifications de  $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ;
- des points où  $P(x, y)$  devient infini, c'est-à-dire des points d'intersection de  $C$  avec la droite à l'infini.

En fait, la 1-forme définie par l'expression (6) se prolonge de manière holomorphe aux points de ramification de  $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . En effet, en utilisant l'égalité  $F'_x dx + F'_y dy = 0$ , on voit que l'égalité (6) peut se réécrire

$$\omega = -\frac{P(x, y)}{F'_x} dy$$

(là où cela a un sens) ; cette expression définit une 1-forme holomorphe au voisinage de tout point de ramification de  $x$ . En chaque point double de  $C$ , le polynôme  $F'_y$  a un zéro d'ordre 1 et le polynôme  $P(x, y)$  s'annule, le relevé de la 1-forme définie par l'expression (6) se prolonge donc en une forme holomorphe au-dessus des points doubles de  $X$ . Enfin, en se plaçant dans les variables  $u = \frac{1}{x}$  et  $v = \frac{1}{y}$ , on voit que la 1-forme définie

par (6) se prolonge de manière holomorphe aux points d'intersection de  $C$  avec la droite à l'infini puisque le polynôme  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $d - 3$  (on utilise ici le fait que  $C$  est transverse à la droite à l'infini).

2. Le point 2 est immédiat.

3. Comptons les dimensions. Les polynômes en les variables  $x, y$  de degré au plus  $d - 3$  forment un espace vectoriel de dimension  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ . Pour s'annuler en chacun des  $r$  points doubles de  $C$ , un polynôme doit vérifier  $r$  équations linéaires. La dimension de l'espace  $E$  est donc supérieure ou égale à

$$\frac{(d-2)(d-1)}{2} - r$$

qui est égal au genre de  $X$  d'après (III.3.2). □

Nous allons maintenant voir que la dimension de  $E$  est en fait égale à  $g$ . Pour toute base symplectique  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  de  $H_1(T, \mathbb{Z})$  et pour deux 1-formes fermées  $\eta$  et  $\eta'$  sur  $T$ , on a

$$\int_X \eta \wedge \eta' = \sum_{i=1}^g \left( \int_{a_i} \eta \int_{b_i} \eta' - \int_{a_i} \eta' \int_{b_i} \eta \right). \tag{7}$$

Dans la suite on fixe  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  des lacets représentant les classes  $a_1, \dots, a_g$  et on note  $A$  leur réunion.

Il découle de (7) que l'application linéaire

$$\Psi : \begin{cases} \Omega^1(S) & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \\ \omega & \longmapsto & \left( \int_{a_i} \omega \right)_{i=1 \dots g} \end{cases} \tag{8}$$

est injective. Une 1-forme holomorphe  $\omega$  non nulle vérifie en effet

$$i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

Plutôt que de considérer l'application  $\Psi$  on aurait pu considérer l'application linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \Omega^1(X) & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^g \\ \omega & \longmapsto & \left( \operatorname{Re} \left( \int_{a_i} \omega \right), \operatorname{Re} \left( \int_{b_i} \omega \right) \right)_{i=1 \dots g}. \end{cases}$$

De la même manière cette application est encore injective. On retrouve ainsi l'unicité dans le théorème V.5.1. Pour ce qui est des formes

holomorphes, la partie existence peut être remplacée par la proposition VI.5.1. L'application linéaire  $\Psi$  est alors un isomorphisme et on obtient le théorème V.5.1 pour les formes holomorphes.

**Proposition VI.5.2.** — *Pour tout  $g$ -uplet  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_g)$  de nombres complexes, il existe une unique 1-forme holomorphe  $\omega_{\mathbf{n}}$  sur  $X$  dont l'intégrale le long du lacet  $\alpha_i$  est égale à  $n_i$  pour  $i = 1, \dots, g$ .*

*Notons de plus que la 1-forme  $\omega_{\mathbf{n}}$  dépend de manière linéaire (donc, en particulier, holomorphe) du  $g$ -uplet  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_g)$ .*

Dans la suite nous allons construire des formes *méromorphes*. Intéressons-nous d'abord aux 1-formes méromorphes n'ayant que des pôles simples. Une telle forme peut toujours s'écrire comme combinaison linéaire de 1-formes méromorphes ayant chacune exactement deux pôles simples de résidus respectifs  $+1$  et  $-1$ . Par ailleurs, quitte à soustraire des 1-formes holomorphes, la proposition VI.5.2 autorise à ne considérer que des 1-formes dont les intégrales le long des lacets  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  sont nulles. On est donc ramené à montrer le résultat suivant :

**Proposition VI.5.3.** — *Étant donnés deux points distincts  $p, q \in X \setminus A$ , il existe une unique 1-forme méromorphe  $\omega_{p,q}$  sur  $T$ , ayant des pôles simples en  $p$  et  $q$  de résidus respectifs  $+1$  et  $-1$ , n'ayant pas d'autre pôle, et dont l'intégrale le long de chacun des lacets  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  est nulle.*

*Démonstration.* — On considère l'espace vectoriel  $\Omega_{p,q}$  des 1-formes méromorphes sur  $X$  ayant éventuellement des pôles simples en  $p$  et en  $q$ , et aucun autre pôle. On note  $\Theta : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{C}^{g+1}$  l'application linéaire qui à un élément de  $\Omega_{p,q}$  associe son intégrale le long de chacun des lacets  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ , et son résidu en  $p$  (le résidu en  $q$  est l'opposé du résidu en  $p$ ). Montrer la proposition équivaut à montrer que  $\Theta$  est bijective. On sait qu'elle est injective : en effet, deux éléments de son noyau diffèrent d'une 1-forme holomorphe dont l'intégrale le long de chacun des lacets  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  est nulle. Il suffit donc de prouver que la dimension de l'espace vectoriel  $\Omega_{p,q}$  est au moins égale à  $g + 1$ .

La démonstration est similaire à celle de la proposition VI.5.1. On construit les formes cherchées sur la courbe  $C$ . On peut supposer que les projetés de  $p$  et  $q$  dans  $C$  ne sont pas des points singuliers et n'appartiennent pas à la droite à l'infini ; nous continuons à les noter  $p$  et  $q$ .

Soit  $D$  la droite de  $\mathbb{C}P^2$  qui passe par  $p$  et  $q$ . On choisit une équation  $(ax + by + c = 0)$  de  $D$  et on cherche des éléments de  $\Omega_{p,q}$  qui s'écrivent

$$\omega = \frac{P(x, y)}{(ax + by + c)F'_y} dx, \quad (9)$$

où  $P(x, y)$  est un polynôme. La droite  $D$  intersecte la courbe  $C$  en  $d$  points, comptés avec multiplicités ; pour simplifier on va supposer que ces points sont deux à deux distincts et ne sont pas situés sur la droite à l'infini. La formule (9) définit *a priori* une 1-forme holomorphe sur la courbe  $C$  privée des points de ramification de  $x : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , des points d'intersection de  $C$  avec la droite à l'infini, des points doubles de  $C$  et des points d'intersection de  $C$  avec la droite  $D$ . Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition VI.5.1 montre que la formule (9) se relève en un élément de  $\Omega_{p,q}$  si et seulement si :

- le polynôme  $P$  a un degré inférieur ou égal à  $d - 2$  ;
- le polynôme  $P$  s'annule en chaque point double de  $C$  ;
- le polynôme  $P$  s'annule en chacun des  $d - 2$  points d'intersection de  $C$  avec  $D$  distincts de  $p$  et de  $q$ .

Les polynômes en les variables  $x, y$  de degré au plus  $d - 2$  forment un espace vectoriel de dimension  $\frac{d(d-1)}{2}$ . Pour s'annuler en chacun des  $r$  points doubles de  $C$  et en chacun des  $d - 2$  points de  $C \cap D$  distincts de  $p$  et  $q$ , un polynôme doit satisfaire  $r + (d - 2)$  équations linéaires. La dimension de l'espace  $\Omega_{p,q}$  est donc supérieure ou égale à

$$\frac{d(d-1)}{2} - r - (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r + 1$$

qui est égal à  $g + 1$  d'après (III.3.2).

Un décompte de dimensions similaire (mais plus fastidieux à expliciter) donne le même résultat dans le cas où  $D$  a des points d'intersection multiples avec  $C$ . □

Le même genre d'arguments que ci-dessus permet de construire des 1-formes méromorphes avec des pôles d'ordres supérieurs ou égaux à 2.

# Théorème d'Abel-Jacobi

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte dont on fixe  $2g$  courbes simples fermées  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  qui forment une base symplectique de  $H_1(X; \mathbb{Z})$ . On fixe une base  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  de l'espace des 1-formes holomorphes sur  $X$ .

## VII.1. Réseau des périodes

L'image  $\Lambda$  de l'application injective

$$p : \begin{cases} H_1(X; \mathbb{Z}) & \rightarrow & \Omega^1(X)^* \\ \gamma & \mapsto & (\omega \mapsto \int_\gamma \omega) \end{cases}$$

est un réseau dans  $\Omega^1(X)^*$ .

**Définition VII.1.1.** — On appelle *réseau des périodes* le réseau  $\Lambda$ . La base duale à  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  identifie  $\Omega^1(X)^*$  à  $\mathbb{C}^g$ . Vu comme réseau dans  $\mathbb{C}^g$  on a :

$$\Lambda = A\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g.$$

Ici  $A$  et  $B$  sont les matrices de périodes (cf. Définition VI.2.5).

Noter que  $\Lambda$  est bien un réseau puisqu'il découle des relations bilinéaires de Riemann que le rang réel de  $(A, B)$  est égal à  $2g$  ; les relations bilinéaires de Riemann montrent même que c'est un réseau très particulier.

## VII.2. Application d'Abel-Jacobi

Soient  $O$  et  $P$  deux points de  $X$ . Deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  reliant  $O$  à  $P$  dans  $X$  ne diffèrent que par un élément de  $H_1(X; \mathbb{Z})$ . Autrement dit, on a :

$$p(\gamma) = p(\gamma') \text{ modulo } \Lambda.$$

L'application  $u_O : X \rightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda$  qui à un point  $P \in X$  associe

$$\left( \int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right),$$

où  $\gamma$  est un chemin quelconque allant de  $O$  à  $P$ , est donc bien définie. L'application  $u_O$  dépend bien sûr du point  $O$ . D'un autre côté, à tout point  $P \in X$  on peut associer le diviseur  $P - O$  de degré 0. Le diviseur associé à une fonction méromorphe  $f$  sur  $X$  est également de degré 0. On introduit alors :

**Définition VII.2.1.** — Les diviseurs de degré 0 forment naturellement un groupe abélien. On appelle *groupe de Picard* le quotient  $\text{Pic}_0(X)$  du groupe des diviseurs de degré 0 par le sous-groupe des diviseurs de fonctions méromorphes.

**Proposition VII.2.2.** — La fonction  $u_O$  s'étend naturellement en un morphisme de groupes

$$u : \begin{cases} \text{Pic}_0(X) & \rightarrow & \mathbb{C}^g / \Lambda \\ \sum n_P P & \mapsto & \sum n_P u_O(P). \end{cases}$$

qui ne dépend pas du point  $O$ .

*Démonstration.* — Commençons par montrer que  $u$  est bien définie : si  $f$  est une fonction méromorphe et  $\text{div}(f) = \sum n_P P$ , on pose  $\omega = \frac{df}{2i\pi f}$ . Pour  $i = 1, \dots, g$ , on note  $F_i(x) = \int_O^x \omega_i$ . La proposition VI.2.4 implique alors pour  $i = 1, \dots, g$ , on a :

$$\sum \text{Res} \left( F_i \frac{df}{f} \right) = \sum_j \left( \int_{a_j} \omega \cdot \int_{b_j} \omega_i - \int_{b_j} \omega \cdot \int_{a_j} \omega_i \right). \quad (1)$$

Le membre de droite de (1) est une combinaison linéaire entière des périodes  $\int_{b_j} \omega_i$  et  $\int_{a_j} \omega_i$  puisque les périodes de  $\omega$  sont entières (théorème des résidus). D'un autre côté, le membre de gauche est égal à  $\sum n_P F_i(P)$ . Finalement  $F_i(P)$  est précisément la  $i$ -ème coordonnée de  $u_O(P)$ . On

conclut donc que  $u_O(P)$  appartient au réseau  $\Lambda$  et donc que l'application  $u$  est bien définie.

Maintenant, si on change  $O$  en  $O'$ , on a :

$$(u_O - u_{O'})\left(\sum n_P P\right) = -\left(\sum n_P\right) \cdot \left(\int_O^{O'} \omega_1, \dots, \int_O^{O'} \omega_g\right).$$

Mais la somme du membre de droite est nulle puisque le diviseur est de degré  $\sum n_P = 0$ .  $\square$

**Définition VII.2.3.** — L'application  $u$  est appelée *application d'Abel-Jacobi*.

### VII.3. Théorème d'Abel

**Théorème VII.3.1.** — *L'application d'Abel-Jacobi est injective.*

*Démonstration.* — Soit  $D = \sum n_P P$  un diviseur de degré 0 tel que  $u(D) = 0$ . Il s'agit de montrer qu'il existe une fonction méromorphe  $f$  telle que  $D = \text{div}(f)$ . Nous allons en fait construire la forme  $\omega$  « égale à  $\frac{df}{2i\pi f}$  ».

Soit  $\omega$  une forme méromorphe sur  $X$  à pôles simples en les points  $P$ , du diviseur  $D$ , de résidu  $n_P$ . Il découle encore de la proposition VI.2.4 que l'on a :

$$u(D) = \left( \sum_j \left( \int_{a_j} \omega \cdot \int_{b_j} \omega_i - \int_{b_j} \omega \cdot \int_{a_j} \omega_i \right) \right)_{i=1, \dots, g}.$$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut modifier  $\omega$  de manière à ce que toutes ses périodes soient entières.

**Lemme VII.3.2.** — *Soient  $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$  des nombres complexes. Il existe une 1-forme holomorphe  $\eta$  telle que*

$$\int_{a_j} \eta = x_j \text{ et } \int_{b_j} \eta = y_j$$

*si et seulement si*

$$\sum_j \left( y_j \int_{a_j} \omega_i - x_j \int_{b_j} \omega_i \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, g).$$

*Démonstration.* — La matrice  $A$  des  $a$ -périodes est inversible les vecteurs  $(\int_{a_j} \omega_1, \dots, \int_{a_j} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$  sont donc linéairement indépendants et l'application linéaire  $\Phi : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^g$  qui à un  $2g$ -uplet  $(x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g)$  de nombres complexes associe le  $g$ -uplet

$$\left( \sum_j \left( y_j \int_{a_j} \omega_1 - x_j \int_{b_j} \omega_1 \right), \dots, \sum_j \left( y_j \int_{a_j} \omega_g - x_j \int_{b_j} \omega_g \right) \right)$$

est surjective. Son noyau est donc de dimension  $g$ . Mais si  $\eta$  est une 1-forme holomorphe  $\eta \wedge \omega_i = 0$  ( $i = 1, \dots, g$ ) et la proposition VI.2.1 implique que

$$\left( \int_{a_1} \eta, \dots, \int_{a_g} \eta, \int_{b_1} \eta, \dots, \int_{b_g} \eta \right) \in \text{Ker} \Phi.$$

Le lemme découle donc du fait que la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes est égale à  $g$ .  $\square$

Puisque  $u(D) = 0$  dans  $\mathbb{C}^g / \Lambda$ , il existe des entiers  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$  tels que

$$\sum_j \left( \left( \int_{b_j} \omega - B_j \right) \int_{a_j} \omega_i - \left( \int_{a_j} \omega - A_j \right) \int_{b_j} \omega_i \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, g).$$

D'après le lemme ci-dessus, il existe donc une 1-forme holomorphe  $\eta$  telle que  $\omega - \eta$  a toute ses périodes entières. On peut donc supposer que  $\omega$  a toutes ses périodes entières. La fonction méromorphe

$$f(x) = \exp \left( 2i\pi \int_0^x \omega \right)$$

est alors bien définie et  $\text{div}(f) = D$ .  $\square$

### VII.4. Théorème de Jacobi

**Théorème VII.4.1.** — *L'application d'Abel-Jacobi est surjective.*

*Démonstration.* — L'application  $u$  étant un morphisme de groupe, il suffit de montrer que l'image de  $u$  contient un voisinage de 0. Cela résultera du théorème d'inversion locale.

**Lemme VII.4.2.** — *Il existe  $g$  points distincts  $P_1, \dots, P_g \in X$  tels que toute 1-forme holomorphe qui s'annule en chacun des  $P_k$  est identiquement nulle.*



*Démonstration.* — Pour tout  $P \in X$ , le sous-espace

$$H_P = \{\omega \in \Omega^1(X) : \omega(P) = 0\}$$

est de codimension  $\leq 1$  dans  $\Omega^1(X)$ . Mais l'intersection  $\cap_{P \in X} H_P$  est triviale et  $\dim \Omega^1(X) = g$ . Il existe donc  $P_1, \dots, P_g \in X$  tels que

$$H_{P_1} \cap \dots \cap H_{P_g} = \{0\}.$$

□

Fixons  $P_1, \dots, P_g \in X$  comme dans le lemme ainsi que des coordonnées locales disjointes et simplement connexes  $(U_j, z_j)$  autour de ces points et telles que  $z_j(P_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, g$ . Dans ces coordonnées chaque forme  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, g$ , s'écrit

$$\omega_i = \varphi_{ij} dz_j \text{ sur } U_j.$$

Le lemme ci-dessus implique que la matrice

$$\left( \varphi_{ij}(P_j) \right)_{1 \leq i, j \leq g}$$

est inversible.

Considérons maintenant l'application

$$F : U_1 \times \dots \times U_g \rightarrow \mathbb{C}^g$$

qui à  $x = (x_1, \dots, x_g)$  associe  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_g(x))$  où

$$F_i(x) = \sum_j \int_{P_j}^{x_j} \omega_i, \quad i = 1, \dots, g.$$

(L'intégrale est bien définie puisque les  $U_j$  sont simplement connexes.)

L'application  $F$  est différentiable relativement aux coordonnées complexes  $z_1, \dots, z_g$  et sa matrice jacobienne est

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x) \right) = \left( \varphi_{ij}(x_j) \right).$$

Elle est donc inversible au point  $P = (P_1, \dots, P_g)$  de sorte que le théorème d'inversion local implique que

$$W = F(U_1 \times \dots \times U_g) \subset \mathbb{C}^g$$

est un voisinage de  $F(P) = 0$ .

Finalement si  $\xi \in W$ , il existe des points  $Q_1, \dots, Q_g \in X$  tels que

$$\left( \sum_j \int_{P_j}^{Q_j} \omega_1, \dots, \sum_j \int_{P_j}^{Q_j} \omega_g \right) = \xi,$$

autrement dit  $u(\sum_j(Q_j - P_j)) = \xi$ . □

On résume les théorèmes d'Abel et de Jacobi en le

**Théorème VII.4.3 (Abel-Jacobi).** — *L'application d'Abel-Jacobi*

$$u : \text{Pic}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X) := \mathbb{C}^g / \Lambda$$

*est bijective.*

De plus, si on se fixe un point  $O \in X$ , on a une application

$$u_O : X \rightarrow \text{Jac}(X); P \mapsto u(P - O).$$

On a déjà vu que cette application est un isomorphisme lorsque  $g = 1$ .

En général on a encore :

**Proposition VII.4.4.** — *Si  $g \geq 1$ , l'application  $u_O : X \rightarrow \text{Jac}(X)$  est un plongement.*

*Démonstration.* — Puisque  $X$  est compacte, il suffit de montrer que  $u_O$  est une immersion injective.

Montrons d'abord que  $u_O$  est injective : supposons par l'absurde que  $u_O(P) = u_O(P')$ . Alors  $u$  s'annule sur le diviseur, de degré 0,  $P - P'$ . Ce dernier est donc le diviseur d'une fonction  $f$ . Celle-ci a un unique pôle et un unique zéro, c'est donc une application  $X \rightarrow \mathbb{C}P^1$  de degré 1. C'est absurde puisque  $g \geq 1$ .

Montrons maintenant que  $u_O$  est une immersion : comme dans la démonstration du théorème de Jacobi on a

$$d_P u_O(v) = (\omega_1(P)(v), \dots, \omega_g(P)(v)).$$

La proposition découle donc du théorème d'inversion local et du lemme suivant. □

**Lemme VII.4.5.** — *Les 1-formes holomorphes  $\omega_1, \dots, \omega_g$  n'ont aucun zéro commun.*

*Démonstration.* — Supposons par l'absurde que  $P$  soit un zéro commun. D'après le théorème de Riemann-Roch la dimension de l'espace des fonctions méromorphes sur  $X$  ayant au plus un pôle simple en  $P$  est égale à

$$1 - g + 1 + \dim\{\omega \in \Omega^1(X) : \omega(P) = 0\} = 2.$$

Il existe donc une fonction sur  $X$  qui a un unique pôle en  $P$ . C'est une application  $X \rightarrow \mathbb{C}P^1$  de degré 1, d'où encore une absurdité. □

**Remarque VII.4.6.** — Une fois fixé un point  $O \in X$  on dispose plus généralement d'une application

$$X^{(g)} = X^g / \mathfrak{S}_g \rightarrow \text{Jac}(X)$$

qui à  $[P_1, \dots, P_g]$  associe  $u(\sum_j (P_j - O))$ . On peut munir  $X^{(g)}$  d'une structure analytique. On a vu que l'application  $X^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(X)$  est surjective. Pour des raisons de dimension, on peut vérifier qu'elle est à fibres finies. On montre :

- $X^{(g)}$  et  $\text{Jac}(X)$  sont des variétés algébriques.
- L'application  $X^{(g)} \rightarrow \text{Jac}(X)$  est birationnelle.



# Espace des modules grossier

Après avoir étudié les surfaces individuellement, on cherche à les comprendre dans leur ensemble. C'est la naissance de l'« espace » des modules.

## VIII.1. Courbes elliptiques

Une courbe elliptique est donnée par un *réseau* de  $\mathbb{C}$  à homothétie près. Montrons que l'ensemble de ces réseaux à homothétie près est  $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}$ .

**Définition VIII.1.1.** — On appelle *réseau marqué* la donnée d'un sous-groupe discret de rang 2 du groupe additif  $(\mathbb{C}, +)$  et d'une base  $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  de ce réseau telle que  $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$ . Notons

$$\mathcal{R} = \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H} \right\}$$

l'ensemble des réseaux marqués.

L'ensemble  $\mathcal{R}$  est stable par l'action naturelle de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{C}^2$  (et que  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{R}$  s'identifie à l'ensemble des réseaux de  $\mathbb{C}$ , voir [Ser1970]). Cette action induit l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$  par homographies :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Nous expliquons maintenant qu'il existe une fonction

$$j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante sous l'action de  $SL(2, \mathbb{Z})$  et telle que deux réseaux  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  de  $\mathbb{C}$  sont homothétiques<sup>(1)</sup> si et seulement si  $j([\Lambda_1]) = j([\Lambda_2])$ , où  $[\Lambda_i]$  désigne la classe d'homothétie du réseau  $\Lambda_i$ . Pour plus de détails, on consultera [Ser1970]. Considérons tout d'abord plus généralement un sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini de  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

On appelle *forme automorphe* sur  $\mathbb{H}$  relativement à  $\Gamma$  toute fonction  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$f(\tau) = \hat{f}(\tau, 1)$$

où  $\hat{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction homogène de degré  $-2k$ , invariante par  $\Gamma$  et telle que  $\hat{f}(\tau, 1)$  soit méromorphe sur  $\mathbb{H}$  ainsi qu'aux pointes dans la variable  $w$  définie en (2). La fonction  $f$  vérifie en particulier

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-2k} = f(\tau) \quad \left(\tau \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right). \quad (1)$$

On appelle  $k$  le *poids* de  $f$ .

Parmi les formes automorphes, il convient de distinguer plusieurs sous-ensembles. Tout d'abord, on note  $\mathcal{M}(\Gamma) = M_0(\Gamma)$  l'ensemble des formes de poids  $k = 0$ , qui s'identifie au corps des fonctions méromorphes de  $X_\Gamma$ . Ensuite, on considère l'ensemble  $M_k(\Gamma)$  des formes de poids  $k$  holomorphes sur  $\mathbb{H}$  et holomorphes en la variable  $w$  en chaque pointe de  $\Gamma$  : les *formes modulaires*. Munie du produit, la somme directe  $M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre graduée.

Considérons maintenant le cas de  $\Gamma(1) = SL(2, \mathbb{Z})$ . Soit  $k > 2$ . Pour tout  $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{R}$  posons

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum'_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda^{2k}}, \quad (2)$$

où l'on désigne par  $\Sigma'$  la sommation sur les vecteurs *non nuls* du réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$  (la convergence est assurée par le fait que  $k > 2$ ). Par construction,  $G_k(\omega_1, \omega_2)$  est homogène de degré  $-2k$  et  $SL(2, \mathbb{Z})$ -invariante; un argument de convergence normale – dans un domaine fondamental de  $SL(2, \mathbb{Z})$  – montre que  $G_k(\tau, 1)$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$  ainsi qu'à la pointe  $\infty$ , voir [Ser1970, chap. VII]. On sait de plus que l'algèbre des formes modulaires pour  $SL(2, \mathbb{Z})$  est polynomiale, engendrée par  $g_2 = 60G_2$  et  $g_3 = 140G_3$  de poids respectifs 2 et 3 :  $M(SL(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{C}[g_2, g_3] \simeq \mathbb{C}[X, Y]$ .

<sup>(1)</sup> C'est-à-dire tels qu'il existe un  $k \in \mathbb{C}^*$  tel que  $k\Lambda_1 = \Lambda_2$ , ce qui est équivalent au fait que  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  et  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  sont isomorphes.

Pour construire une fonction méromorphe sur  $\mathbb{H}$  qui soit  $SL(2, \mathbb{Z})$ -invariante et non constante, on considère la première composante homogène de  $M(SL(2, \mathbb{Z}))$  de dimension au moins 2, de manière à former le quotient de deux formes modulaires linéairement indépendantes et de même poids. On montre (voir [Ser1970, chap. VII]) que cette première composante est  $M_6(SL(2, \mathbb{Z}))$  qui contient la forme  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{H}$ . On pose donc naturellement

$$J = g_2^3/\Delta, \quad \text{et} \quad j = (12)^3 J. \quad (3)$$

La fonction  $j$ , appelée *invariant modulaire*, est holomorphe sur  $\mathbb{H}$  et admet un pôle simple (de résidu égal à 1) à l'infini. Par passage au quotient elle induit un isomorphisme de  $X(1)$  sur  $\mathbb{C}P^1$ .

Pour des raisons de symétrie, on obtient  $g_3(i) = 0$  et  $g_2(\rho) = 0$  pour  $\rho = (1 + i\sqrt{3})/2$  (voir éq. (2)), d'où les valeurs spéciales

$$j(i) = 12^3 = 1728 \quad \text{et} \quad j(\rho) = 0. \quad (4)$$

Enfin, le corps des fonctions méromorphes  $SL(2, \mathbb{Z})$ -invariantes coïncide avec  $\mathbb{C}(j)$ , qui est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable sur  $\mathbb{C}$ . Pour tout sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , le corps de fonctions  $\mathcal{M}(\Gamma)$  est donc une extension finie de  $\mathbb{C}(j)$ , galoisienne si et seulement si  $\Gamma$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma(1)$ .

## VIII.2. Modules en genre supérieur

Rappelons que deux courbes algébriques sont birationnellement équivalentes si les surfaces de Riemann (compactes) associées sont biholomorphes.

Le choix d'une équation  $F(x, y) = 0$  dans une classe d'équivalence birationnelle (et le choix de l'une des deux variables  $y$  que l'on exprimera comme fonction algébrique de l'autre  $x$  à l'aide de l'équation) permet de définir *une extension finie du corps*  $\mathbb{C}(x)$ . Il s'agit ici du corps des fonctions rationnelles sur la courbe définie par l'équation  $F(x, y) = 0$  (qui peut être pensé aussi comme corps des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann associée). En termes algébriques, deux courbes algébriques sont *birationnellement équivalentes* si leurs corps de fonctions rationnelles sont isomorphes en tant qu'extension de corps de  $\mathbb{C}$ .

À partir de là, il est naturel de considérer le problème des *modules* pour les surfaces de Riemann de genre  $g$ . Il s'agit, une fois le type topologique (c'est-à-dire le genre) fixé, d'étudier les classes d'équivalence birationnelle dont les surfaces de Riemann ont ce type topologique.

Nous parlerons bientôt d'*espace des modules*, mais on peut déjà s'intéresser au nombre de paramètres nécessaires pour se localiser dans cet espace, c'est-à-dire à sa dimension *complexe*, sans faire référence à la possibilité de construire globalement un tel « espace ».

Riemann propose deux méthodes pour le calcul du nombre de modules, la première valable uniquement pour  $g > 1$ , et la deuxième valable aussi pour  $g = 1$  (dans le cas  $g = 0$ , on a vu au chapitre précédent que toutes les surfaces de Riemann sont isomorphes à  $\overline{\mathbb{C}}_z \simeq \mathbb{CP}^1$ ).

### Première méthode.

Riemann considère l'ensemble des fonctions méromorphes ayant exactement  $\mu$  pôles (comptés avec multiplicités) sur  $X$ , où  $\mu$  est un entier supérieur à  $2g$ . Autrement dit, il considère l'espace des applications holomorphes de degré  $\mu$  de  $X$  vers  $\mathbb{CP}^1$ . Il découle du théorème de Riemann–Roch (théorème VI.1.6) que cet espace est de dimension  $2\mu - g + 1$ .

D'après le théorème de Riemann–Hurwitz, une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{CP}^1$  ayant  $\mu$  pôles possède  $2(\mu + g - 1)$  valeurs de ramification, c'est-à-dire que son image critique est un sous-ensemble fini de la sphère de Riemann ayant ce cardinal. En faisant varier la fonction (les constantes arbitraires dont elle dépend), cet ensemble fini varie. Ces constantes peuvent être déterminées de telle sorte que  $2\mu - g + 1$  valeurs de ramification prennent des valeurs données. Lorsque  $g > 1$  ces valeurs de ramification sont des fonctions indépendantes entre elles. En choisissant la fonction méromorphe sur  $X$  de telle manière que  $2\mu - g + 1$  valeurs de ramification prennent des valeurs données, il reste  $3g - 3$  valeurs de ramification libres, qui forment donc un système complet de modules pour  $X$ .

### Deuxième méthode

Au lieu de considérer comme dans la méthode précédente des attributs des fonctions méromorphes sur  $X$ , cette deuxième méthode considère des attributs des intégrales  $w$  de formes holomorphes. Plus précisément, leurs modules de périodicité par rapport à un système de courbes fixées transformant  $X$  en une surface simplement connexe  $X'$  et



leurs valeurs aux zéros de la forme holomorphe associée, c'est-à-dire les valeurs critiques de  $w|_X$ .

Le décompte permettant de retrouver les  $3g - 3$  modules dont dépend la surface  $X$  est le suivant : On écrit  $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_g w_g + c$ , que l'on voit comme variable indépendante. On peut déterminer les grandeurs  $\alpha$  et la constante  $c$  de telle sorte que

1. Parmi les  $2g$  modules de périodicité,  $g$  d'entre eux prennent des valeurs données.
2. Une des  $2g - 2$  valeurs de ramification des fonctions périodiques de  $w$  ait une valeur donnée.

De cette manière  $w$  est complètement déterminé et, par conséquent, les  $3g - 3$  grandeurs restantes dont dépend le mode de ramification et la périodicité de ces fonctions de  $w$  le sont aussi.

### VIII.3. Espace des modules

La question se pose alors de comprendre si l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann de genre  $g$  fixé peut être muni naturellement de structures supplémentaires. Par exemple, a-t-il une topologie rendant les paramètres considérés ci-dessus dans les deux méthodes précédentes des fonctions continues? C'est lorsque l'on munit l'ensemble des classes d'isomorphisme d'un certain type d'objets de structures supplémentaires de nature géométrique que l'on parle d'*espace* des modules. Le problème général des modules est de construire de telles structures qui reflètent les structures considérées sur les objets examinés.

Par exemple, si on regarde les surfaces de Riemann compactes en tant que courbes algébriques complexes, on peut se demander s'il existe un espace des modules qui soit lui-même une variété algébrique complexe. On sait que c'est effectivement le cas (voir le livre [HaMo1998]) :

**Proposition VIII.3.1.** — *Il existe une variété quasi-projective complexe irréductible  $\mathcal{M}_g$  (en particulier connexe) qui est un espace des modules grossier pour les courbes algébriques complexes lisses compactes de genre  $g$ .*

Expliquons ce que cela veut dire. On peut facilement définir la notion de *familles algébriques* de courbes de genre  $g$  : il s'agit d'un morphisme

algébrique  $X \xrightarrow{\pi} B$  tel que les fibres  $\pi^{-1}(b)$  soient toutes des courbes de genre  $g$ . On obtient ainsi une famille de courbes « paramétrée » par la base  $B$ . Notre espace  $\mathcal{M}_g$  est caractérisé par le fait que pour chaque famille de ce type, il existe *une unique* application algébrique  $B \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}_g$  telle que pour tout  $b \in B$ , la courbe  $\pi^{-1}(b)$  appartienne à la classe d'isomorphisme représentée par le point  $\gamma(b) \in \mathcal{M}_g$ . En particulier, on voit que les points de  $\mathcal{M}_g$  sont canoniquement en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes de genre  $g$ , ce qui montre que la structure algébrique de  $\mathcal{M}_g$  est bien une structure géométrique sur cet ensemble de modules.

Un point important est que  $\mathcal{M}_g$  lui-même n'est base d'aucun morphisme algébrique  $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g$  tel que pour tout  $b \in \mathcal{M}_g$ , la fibre  $\pi^{-1}(b)$  soit dans la classe d'isomorphisme représentée par  $b$  : on dit pour cette raison que  $\mathcal{M}_g$  n'est qu'un espace des modules *grossier*.

On voit que dans les deux méthodes proposées par Riemann, on considère en fait des surfaces de Riemann munies de certaines structures supplémentaires : une fonction méromorphe ainsi qu'une numérotation de ses valeurs critiques, ou bien une base de l'homologie. Il est important de poser la question de l'existence d'espaces de modules pour de telles surfaces de Riemann « enrichies ». L'avantage d'une telle approche est qu'en enrichissant suffisamment la structure, on obtient des objets *sans automorphismes*, et que cela facilite l'étude du problème des modules. Par exemple, cela permet de montrer que  $\mathcal{M}_g$  est en fait le quotient par un groupe fini d'une variété algébrique *lisse*.

#### VIII.4. Dépendance des modules

Considérons maintenant des surfaces de Riemann compactes  $S$  munies d'une métrique riemannienne compatible  $h$ . On a défini, pour  $g > 1$ , des paramètres complexes locaux pour l'espace des modules  $\mathcal{M}_g$  des courbes complexes de genre  $g$ . On s'intéresse ici à ceux de la deuxième sorte, qui sont des « périodes » d'une 1-forme holomorphe  $\omega$  sur  $S^{(2)}$ .

L'introduction d'une métrique riemannienne permet de se poser, sur ces modules, des questions de continuité. L'espace  $\text{Mét}(S)$  des métriques riemanniennes sur  $S$  est en effet naturellement muni d'une topologie<sup>(3)</sup>.

<sup>(2)</sup>Rappelons que pour cela on a marqué  $S$  par une base de l'homologie.

<sup>(3)</sup>La topologie compacte-ouverte.

Chacune de ces métriques  $h$  définit, comme on l'a vu, une structure de surface de Riemann notée  $S^{\mathbb{C}}(h)$ . On peut donc se demander comment varient ces modules. Plus précisément, le but de cette section est de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \text{Mét}(S) &\rightarrow \mathcal{M}_g \\ h &\mapsto S^{\mathbb{C}}(h) \end{aligned}$$

est continue pour la topologie « définie » par Riemann sur l'espace  $\mathcal{M}_g$  des (classes d'isomorphisme de) surfaces de Riemann de genre  $g$ .

Nous exposons ici brièvement les idées qui permettent de montrer que cette application est effectivement continue. À chaque métrique riemannienne  $h$ , on peut associer un sous-espace de dimension  $2g$  de l'espace des 1-formes différentielles réelles : l'espace de formes harmoniques  $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$ . On voit cet espace comme le noyau du laplacien  $\Delta_h = dd^* + d^*d^{(4)}$  associé à  $h$ . Cet opérateur varie continûment avec  $h$  et est un opérateur elliptique. La théorie de Fredholm permet alors de prouver le théorème suivant (voir [Hod1941]) :

**Théorème VIII.4.1 (Hodge).** — *Soit  $(S, h)$  une surface riemannienne (compacte, orientée, sans bord) de genre  $g$ . Alors dans l'espace  $\Omega^1(S, \mathbb{R})$  des 1-formes  $C^\infty$  sur  $S$ , le sous-espace  $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$  des formes harmoniques (i.e. fermées et co-fermées) est de dimension finie  $2g$  et varie continûment avec la métrique  $h$ .*

Pour montrer que  $S^{\mathbb{C}}(h)$  dépend continûment de  $h$ , on commence par remarquer que l'étoile de Hodge  $*_h$  définit une structure complexe sur  $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$  puisque  $*_h^2 = -\text{Id}$  en ce degré. De plus, l'étoile de Hodge commute au laplacien. Ainsi le sous-espace propre des formes holomorphes

$$H^{1,0}(h) = \ker *_h + i \text{Id} \subset \text{Harm}_h^1(S, \mathbb{C})$$

varie lui aussi continûment avec  $h$ .

Fixons une base  $(A_i, B_i)_{1 \leq i \leq g}$  de l'homologie  $H^1(S)$ . Les formes  $\omega_i$ , définies par

$$\int_{A_j} \omega_k(h) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq g,$$

<sup>(4)</sup>  $d^*$  est l'adjoint de  $d$  pour le produit scalaire  $L^2$  défini page 77 et étendu à toutes les formes.

sont l'intersection de l'espace des formes holomorphes avec des hyperplans affines. Elles varient donc continûment avec  $h$ .

En particulier les périodes  $\int_{B_j} \omega_k(h) = \Pi_{jk}(h)$  sont continues, ainsi que les zéros  $P_i(h)$  des  $\omega_j(h)$ , ou de leurs combinaisons linéaires  $\omega(h)$  (à coefficients constants), et donc également les intégrales  $\int_{P_1(h)}^{P_i(h)} \omega(h)$  entre deux tels zéros.

Noter que l'on sait (c'est un théorème dû à Torelli) que les  $\Pi_{jk}$  déterminent la courbe complexe.

# Épilogue : une « démonstration » du théorème d'uniformisation

## IX.1. Une démonstration « expérimentale »

Soit  $X$  une surface de Riemann simplement connexe. Uniformiser  $X$  revient à trouver une carte globale sur  $X$  et donc à produire un flot irrotationnel et incompressible à partir d'une seule *source* en un point arbitraire de  $X$ . (Si  $X$  est compacte on ajoute un puits.)

Le champ de vecteur du flot s'écrit  $\vec{v} = \text{grad } p$  avec un potentiel  $p$  qui, dans une carte locale  $(U, z)$  autour de la source  $z = 0$ , est égal à  $\log|z|$ . Il s'agit donc de trouver une fonction  $p$  globale telle que

1.  $\Delta p = 0$  sur  $X - \{\text{source}\}$ , et
2.  $p = \log|z|$  au voisinage de la source.

On écrit alors  $*\vec{v} = \text{grad } q$ . La circulation

$$\int_{p^{-1}(\bullet)} dq$$

ne dépend pas de la courbe de niveau (d'après le théorème de Stokes) et vaut donc  $2\pi$  (d'après l'expression dans la carte locale autour de la source). Le paramètre

$$z = \exp(p + iq)$$

est donc globalement défini avec un zéro (unique) en la source (et éventuellement un pôle en le puits). On « voit bien » que  $z$  est injective. On distingue alors trois cas :

1.  $X$  est compacte alors elle est de genre  $g = 0$ .

2.  $X$  est non compacte et  $p$  non bornée, alors  $z$  réalise un isomorphisme de  $X$  vers  $\mathbb{C}$ .
3.  $X$  est non compacte et  $p \rightarrow p(\infty) < +\infty$ , alors  $z$  réalise un isomorphisme de  $X$  vers  $D(0, \exp(p(\infty)))$ .

### IX.2. Plus rigoureusement...

Supposons, pour simplifier, que  $X$  est non compacte. Soit  $\omega$  une 1-forme fermée telle que  $\omega = d \log z$  près de la source et nulle en dehors d'un petit voisinage de la source. Alors  $\omega - i*\omega$  s'annule près de la source et e l'infini et la théorie de Hodge permet d'écrire  $\omega - i*\omega = \omega_0 + d f_1 + *d f_2$  avec  $\omega_0$  harmonique. La forme

$$\omega - d f_1 = i*\omega + *d f_2 + \omega_0$$

est donc lisse, exacte et cofermée hors de la source. Sa partie réelle s'écrit donc  $d p$  avec  $p$  harmonique sur  $X$  privée de la source. et  $p = \log|z|$  au voisinage de la source.

Finalement puisque  $X$  est simplement connexe, on a  $\pi_1(X - \{\text{source}\}) \cong \mathbb{Z}$  et donc  $*d p$  est exacte modulo  $2\pi$ . Autrement dit, on a :

$$*d p = d q$$

avec  $q$  bien définie modulo  $2\pi$ . La fonction

$$z = \exp(p + i q)$$

est alors bien définie globalement.

Il reste à montrer que  $z$  est injective. C'est un peu plus subtil. Si  $p$  a une limite en l'infini, alors

$$z : X \rightarrow D(0, \exp(\infty))$$

est *propre* et *holomorphe* non constante, donc  $z$  est surjective (car ouverte et propre). C'est un revêtement ramifié. Mais en la source  $z' \neq 0$  et  $z^{-1}(0) = \{\text{source}\}$ . Le revêtement est donc de degré 1 et  $z$  est injective. Pour les cas restant on renvoie aux différents livres cités en bibliographie...

# Bibliographie

- [Bea1983] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Grad. Texts in Math. 91, Springer, New York, 1983.
- [Bos1992] J.-B. BOST – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelian varieties », *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 64–211.
- [DoDo1977] R. & A. DOUADY – *Algèbre et théories galoisiennes*, CEDIC, Paris, 1977. Nouvelle édition augmentée, Cassini, Paris, 2005.
- [FaKr1980] H. M. FARKAS, I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer, New York, 1980.
- [Forst1977] O. FORSTER – *Riemannsche Flächen*, Springer, Berlin, 1977. Traduction anglaise : *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer, New York, 1981.
- [GrHa1978] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [Gun1972] ———, *Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties*, Math. Notes 12, Princeton Univ. Press, 1972.
- [HaMo1998] J. HARRIS & I. MORRISON – *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math. 187, Springer, New York, 1998.
- [Hod1941] W. V. D. HODGE – *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.
- [Hub2006] ———, *Teichmüller theory, vol. 1*, Matrix Editions, Ithaca NY, 2006.
- [ImTa1992] Y. IMAYOSHI & M. TANIGUCHI – *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, Tokyo, 1992.
- [Jos2002] J. JOST – *Compact Riemann surfaces, An introduction to Contemporary mathematics, Second edition*, Springer, New York, 2002.

- [Kat1992] S. KATOK – *Fuchsian Groups*, The Univ. of Chicago Press, 1992.
- [Kle1882c] ———, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [McKMo1997] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Mum1983] ———, *Tata lectures on theta I*, Progr. in Mathematics 28, Birkhäuser, Bâle, 1983.
- [Mum1999] ———, *The red book of varieties and schemes*, seconde édition. Contient [Mum1975]. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer, Berlin, 1999.
- [Mum1975] D. MUMFORD – *Curves and their Jacobians*, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [Rad1925] T. RADÓ – « Über den Begriffe der Riemannsche Fläche », *Acta Litt. Sci. Szeged* 2 (1925), p. 101–121.
- [Rey1989] É. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [Rud1987] W. RUDIN – *Real and complex analysis*, seconde édition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [Sai2011] ———, *Uniformisation des Surfaces de Riemann*, ENS Éditions, 2011.
- [Ser1970] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Univ. France, Paris, 1970.
- [Shi1971] ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kanô Memorial Lectures, n° 1*, Publ. Math. Soc. Japan, n° 11. Iwanami Shoten, Tokyo, & Princeton Univ. Press, 1971.
- [Spr1957] G. SPRINGER – *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1957.