Examen - Surfaces de Riemann - 31/10/2014

Durée de trois heures. Les notes de cours sont autorisées, pas les téléphones portables. On admettra que toute application "naturellement définie" est holomorphe, enfin, on notera K_X le fibré canonique sur la surface de Riemann X.

Exercice 1 : Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, x^2y + y^2x + 1 = 0\}$

1. Montrer que X est une surface de Riemann.
2. On note $\hat{X} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, xy^2 + yx^2 + z^3 = 0\}$. Montrer que $\hat{X}$ est une surface de Riemann et que l'application $\hat{\varphi} : X \to \hat{X}$ définie par $\hat{\varphi}(x, y) = [x, y, 1]$ permet d'identifier X à $\hat{X}$ privée d'un nombre fini de points. Quel est le genre de $\hat{X}$?
3. On note $\tilde{X} = \{([x, t], [y, s]) \in (\mathbb{P}^1)^2, x^2ys + y^2xt + s^2t^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Montrer que $\tilde{X}$ est une surface de Riemann et que l'application $\tilde{\varphi} : X \to \tilde{X}$ définie par $\tilde{\varphi}(x, y) = ([x, 1], [y, 1])$ permet d'identifier X à $\tilde{X}$ privée d'un nombre fini de points.
4. Déterminer les points de ramification de l'application $p_1 : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$ induite par la première projection. En déduire le genre de $\tilde{X}$.
5. Soit X et Y deux surfaces de Riemann compactes et connexes, $P \subset X$ et $Q \subset Y$ deux parties finies et $\varphi : X \setminus P \to Y \setminus Q$ un biholomorphisme. Montrer que φ s'étend en un biholomorphisme de X vers Y. Comparer les genres de $\hat{X}$ et $\tilde{X}$.

   Indication : on considèrera des suites exhaustives de compacts de $X \setminus P$ et $Y \setminus Q$ puis on utilisera le fait qu'une fonction holomorphe et bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ se prolonge de manière holomorphe à $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Exercice 2 : Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène de degré $d > 0$ et $X = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, P(x, y, z) = 0\}$. On suppose que X est une surface de Riemann. Pour $p \in \mathbb{P}^2$, on note $D_p \subset \mathbb{C}^3$ la droite représentée par p et $i : X \to \mathbb{P}^2$ l'inclusion.

1. Soit $\hat{X} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, P(x, y, z) = 0\}$ et $\pi : \hat{X} \to X$ la projection canonique. Pour tout $p \in X$, on définit $\varphi : D_p \to T_pX$ par $\varphi(u) = d_u\pi(v)$ où v et w sont deux vecteurs qui vérifient les équations

   $$\det(u, v, w) = 1, \quad d_uP(v) = 0, \quad d_uP(w) = 1.$$

   Montrer que φ est bien définie et vérifie $\varphi(\lambda u) = \lambda^{d-3}\varphi(u)$. En déduire que les fibrés K_X et $i^*\mathcal{O}(d - 3)$ sont isomorphes.
2. Déduire de l'isomorphisme ci-dessus une nouvelle preuve de la formule reliant genre et degré.

3. Montrer que l'application qui à toute forme linéaire sur $\mathbb{C}^3$ associe sa restriction à X induit une application injective $\mathbb{C}^3 \to H^0(X, K)$. En déduire que si $d = 4$, le plongement canonique de X s'identifie à l'inclusion de X dans $\mathbb{P}^2$.
4. Soit X une quartique dans $\mathbb{P}^2$ (i.e. $d = 4$). Montrer que tout automorphisme de X se prolonge à $\mathbb{P}^2$.

Exercice 3 : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$ de matrice A. On appelle quartique de Ciana le lieu

$$C_q = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, q(x^2, y^2, z^2) = 0\}$$

1. Montrer que C_q est une surface de Riemann si et seulement si q est non-dégénérée et les coefficients diagonaux de A et A^{-1} sont non nuls.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ agit sur C_q fidèlement et holomorphiquement.
3. Réciproquement, si X est une quartique dans $\mathbb{P}^2$ qui admet deux involutions distinctes et non triviales qui commutent, prouver que X est isomorphe à C_q pour un certain q.

   Indication : On utilisera la dernière question de l'exercice précédent.
4. Soit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathrm{Aut}(C_q)$ les applications données par $\sigma_1([x, y, z]) = [-x, y, z]$, $\sigma_2([x, y, z]) = [x, -y, z], \sigma_3([x, y, z]) = [x, y, -z]$. Construire une application holomorphe $\pi : C_q \to \mathbb{P}^1$ invariante par σ_1, σ_2 et σ_3 et calculer son degré.
5. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on admet qu'il existe une structure de surface de Riemann sur $E_i = C_q/\sim_i$ où $x \sim_i \sigma_i(x)$ qui rend holomorphes la projection $p_i : C_q \to E_i$ et l'application $\pi_i : E_i \to \mathbb{P}^1$ induite par π. Calculer le genre de E_i.
6. Soit ω_i un générateur de $H^0(E_i, K_{E_i})$. Montrer que les formes holomorphes $(\eta_i = p_i^*\omega_i)_{i=1,2,3}$ sont une base de $H^0(C_q, K_{C_q})$
7. Soit $\Lambda = \{(\int_\gamma \eta_1, \int_\gamma \eta_2, \int_\gamma \eta_3), \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})\} \subset \mathbb{C}^3$ le réseau des périodes de C_q et pour $i = 1, 2, 3$, $\Lambda_i = \{\int_\gamma \omega_i, \gamma \in H_1(E_i, \mathbb{Z})\} \subset \mathbb{C}$. Montrer que Λ est un sous-groupe d'indice fini de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \Lambda_3$.
8. Calculer cet indice. (hors barème)

Corrigé de l'examen - Surfaces de Riemann - 31/10/2014

Exercice 1 :

1. Notons $P = x^2y + y^2x + 1$. On a $\partial_x P = 2xy + y^2$ et $\partial_y P = x^2 + 2xy$. Si $P = \partial_x P = \partial_y P = 0$ alors si $x = 0$, $y = 0$ ce qui est impossible, sinon $x = -2y$ et $y = -2x$ ce qui n'est pas possible non plus. Donc X est lisse.
2. Notons $Q = xy^2+yx^2+z^3$. On a $\partial_x Q = y^2+2xy, \partial_y Q = x^2+2xy, \partial_z Q = 3z^2$. Si les trois dérivées s'annulent, alors $z = 0$ et comme précédemment x et y s'annulent ce qui est impossible pour un point de $\mathbb{P}^2$. Ainsi $\hat{X}$ est une surface de Riemann et la formule genre-degré nous donne $g = 1$. L'application $\hat{\varphi} : X \to \hat{X}$ est bien définie et un point $[x, y, z]$ de $\hat{X} \setminus X$ vérifie $z = 0$ et $x^2y+y^2x = 0$. Il y a trois solutions à cette équation dans $\mathbb{P}^2$: $[0, 1, 0], [1, 0, 0]$ et $[1, -1, 0]$.
3. On pose $R = x^2ys + y^2xt + s^2t^2$ et on calcule $\partial_x R = 2xys + y^2t, \partial_y R = x^2s + 2yxt, \partial_t R = y^2x + 2s^2t, \partial_s R = x^2y + 2st^2$. Si toutes ces quantités sont nulles, on rappelle qu'on a $(x, t) \neq 0$ et $(y, s) \neq 0$. Ainsi $y = 0$ ou $yt + 2xs = 0$ et $x = 0$ ou $xs + 2yt = 0$. Mais si $x = 0$ alors $s = 0$ et $y = 0$ ce qui est impossible, de même pour y ainsi $xy \neq 0$. Les équations $yt + 2xs = xs + 2yt = 0$ impliquent $xs = yt = 0$ d'où $s = t = 0$, mais ceci est impossible. Finalement $\tilde{X}$ est lisse. Un point de $\tilde{X} \setminus X$ vérifie soit $x = 1, t = 0$, et du coup $ys = 0$, soit $y = 1, s = 0$ et du coup $xt = 0$. On a donc les points $([1, 0], [1, 0]), ([1, 0], [0, 1]), ([0, 1], [1, 0])$.
4. L'application p_1 est définie par $p_1([x, t], [y, s]) = [x, t]$. L'équation définissant $\tilde{X}$ quand x et t sont donnés est de degré 2 en y et s. Elle a donc génériquement deux solutions et p_1 est de degré 2. L'application p_1 aura un point de ramification d'ordre 2 précisément pour les points où il n'y a qu'une solution. C'est-à-dire quand $x^2ys+y^2xt+s^2t^2$ s'écrit $(ay+bs)^2$, soit si et seulement si $(x^2)^2 = 4(2xt)t^2$. Ceci implique $x(x^3 - (2t)^3) = 0$: on a 4 solutions : $[0, 1], [2, 1], [2j, 1], [2j^2, 1]$ où $j = \exp(2i\pi/3)$. Par la formule de Riemann-Hurwitz, on a $\chi(\tilde{X}) = 2\chi(\mathbb{P}^1) - 4 = 0$ donc $g = 1$.
5. Notons $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ et choisissons des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ au voisinage de $p_1, \ldots, p_n$. Alors pour N assez grand, l'ensemble K_N défini par $\forall i, |z_i| \geq \frac{1}{N}$ est une famille exhaustive de compacts de $K_N \setminus P$ au sens où $\bigcup_N K_N = X \setminus P$ et tout compact de $X \setminus P$ est inclus dans un K_N avec N assez grand. On définit de même des compacts K'_N de $Y \setminus Q$.

   La suite $\varphi(K_N)$ est une suite exhaustive de compacts de $Y \setminus Q$ donc pour tout N' il existe N tel que $K'_{N'} \subset \varphi(K_N)$. Or le complémentaire de K_N dans X est une réunion de disques $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ (resp. le complémentaire de $K'_{N'}$ dans Y est une réunion de disques $D'_1 \cup \cdots \cup D'_{n'}$). On en déduit l'inclusion $\varphi(D_1 \cup \cdots \cup D_n) \subset D'_1 \cup \cdots \cup D'_{n'}$. Par connexité, pour tout i il existe j tel que $\varphi(D_i) \subset D'_j$. En écrivant φ dans les cartes correspondantes, on voit une fonction bornée et holomorphe sur un disque épointé : elle se prolonge donc de manière holomorphe. En applicant le même raisonnement à φ^{-1}, on a bien prouvé que φ s'étend en un biholomorphisme de X vers Y. En particulier, X et Y ont le même genre. Dans les questions précédentes, X s'identifie à la fois à $\hat{X} \setminus P$ et $\tilde{X} \setminus Q$. Ainsi l'identité se prolonge en un biholomorphisme de $\hat{X}$ vers $\tilde{X}$. Il est donc normal que ces deux surfaces aient le même genre.

Exercice 2 :

1. On remarque que φ est bien définie car si on ajoute à v un multiple de u, $\varphi(u)$ ne change pas car $d_u\pi(u) = 0$. De plus si on ajoute à w un élément de $\ker d_u\pi$, le déterminant ne change pas puisque u et v forment une base de ce noyau. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$: comme P est de degré d, sa dérivée est de degré $d-1$ ainsi $d_{\lambda u}P(w) = \lambda^{d-1}d_uP(w)$. On doit donc remplacer w par $\lambda^{1-d}w$. De plus, π est invariant par multiplication par λ ainsi $d_{\lambda u}\pi(\lambda v) = d_u\pi(v)$. Il n'y a plus qu'à compter les puissances de λ. Le morphisme φ s'interprète comme un élément de $\mathrm{Hom}(D_p^{\otimes(d-3)}, T_pX)$. C'est un isomorphisme pour tout p, nécessairement holomorphe qui induit donc l'isomorphisme $\mathcal{O}(3-d) \simeq T$, d'où celui de l'énoncé.
2. On rappelle que $\deg i^*\mathcal{O}(1) = d$, ainsi $2g-2 = \deg K = \deg(i^*\mathcal{O}(1))^{\otimes(d-3)} = d(d-3)$.
3. Toute forme linéaire sur $\mathbb{C}^3$ peut être vue comme un élément de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1))$. Par restriction, cela donne un élément de $H^0(X, i^*\mathcal{O}(1)) = H^0(X, K)$ car $d = 4$. Si la forme λ est envoyée sur 0 c'est que X est inclus dans $\mathbb{P}(\ker\lambda)$. Ceci est impossible pour une courbe de degré $d > 0$ qui rencontre tout hyperplan d fois. De plus $H^0(X, K)$ est de dimension 3 puisque X est de genre 3, ainsi cette dernière application est un isomorphisme. A $p \in X$, le plongement canonique associe l'hyperplan des sections de $H^0(X, K)$ qui s'annulent en p. Mais les différentielles holomorphes sont précisément les restrictions des formes linéaires de $\mathbb{C}^3$. Via cette identification, le plongement canonique est l'identité !
4. Si φ est un automorphisme de X, φ^* est un automorphisme de $H^0(X, K)$. Par l'identification précédente, φ^* devient un automorphisme du dual de $\mathbb{C}^3$. En prenant son adjoint, on définit un élément φ^{**} de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ qui étend φ à $\mathbb{P}^2$.

Exercice 3 :

1. Notons $X = (x^2, y^2, z^2)^T$ de sorte que $P(x, y, z) = q(x^2, y^2, z^2) = X^TAX$. On calcule $\partial_xP = 2xe_1^TAX$, de même pour y et z où e_i désigne la base canonique. Si $\partial_xP = \partial_yP = \partial_zP = 0$ avec $X \neq 0$, on a $x = 0$ ou e_1 est orthogonal à X pour la forme q. Si A est dégénéré, en prenant des racines carrées d'un vecteur du noyau, on trouve un point singulier. Supposons donc $\det(A) \neq 0$, d'après ce qui précède, un point singulier doit avoir au moins une coordonnée nulle, disons $x = 0$. Si $y = 0$, alors $P(0, 0, z) = cz^4$

où c est le dernier coefficient diagonal de A, supposé non nul, cela implique donc $z = 0$. Ainsi, on a y et z non nuls et AX est orthogonal à e_2 et e_3, il s'écrit donc λe_1. Dans ce cas $P(x, y, z) = X^T AX = \lambda^2 (A^{-1}e_1)^T (A^{-1}e_1)$. Il s'agit du premier coefficient diagonal de A^{-1}, non nul par hypothèse.

2. On note σ_1 la transformation $[x, y, z] \mapsto [-x, y, z]$ de même pour σ_2 et σ_3. Ce sont des biholomorphismes qui commutent et vérifient $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathrm{Id}$. Le groupe engendré par σ_1 et σ_2 s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et agit fidèlement sur X car P est une fonction paire de x, y et z.
3. Soit σ_1 et σ_2 les deux involutions de X. D'après l'exercice précédent, on peut les relever à deux matrices $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ qui vérifient $A_1^2 = \lambda\mathrm{Id}, A_2^2 = \mu\mathrm{Id}, A_1A_2 = \nu A_2A_1$ pour λ, μ, ν dans $\mathbb{C}^*$. Quitte à multiplier A_1 et A_2 par des constantes, on peut supposer $A_1^2 = A_2^2 = \mathrm{Id}$. Si $A_1x = \epsilon x$ avec $\epsilon = \pm 1$, alors $A_2A_1x = \epsilon A_2x = \nu A_1A_2x$. Donc $\nu\epsilon$ est une valeur propre de A_2 et $\nu = \pm 1$. Quitte à changer leur signe, on peut supposer que A_1 et A_2 n'ont qu'un vecteur propre négatif, noté e_1 et e_2. L'intersection des espaces propres positifs de A_1 et A_2 donne un vecteur e_3 et on a dans cette base
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans cette base, le polynôme de degré 4 qui définit X est pair en x, y et z. C'est donc une forme quadratique en x^2, y^2 et z^2 et X est isomorphe à la quadrique de Ciana correspondante.
4. On définit $E_1 = C_q/\sim$ où on a posé $z \sim \sigma_1(z)$ et on note π_1 la projection canonique. Soit $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, q(x, y, z) = 0\}$: il s'agit d'une quadrique non-dégénérée, donc isomorphe à $\mathbb{P}^1$. De plus l'application $c : C_q \to Q$ définie par $[x, y, z] \mapsto [x^2, y^2, z^2]$ est clairement holomorphe et invariante par σ_1. On a donc une factorisation $c = p_1 \circ \pi_1$ où $C_q \xrightarrow{\pi_1} E_1 \xrightarrow{p_1} Q$. Il n'y a qu'une structure de surface de Riemann sur E_1 qui rende ces deux applications holomorphes. Comme π_1 de degré 2, pour calculer le genre de E_1 il suffit de calculer le nombre de points fixes de σ_1, i.e le nombre de points d'intersection entre C_q et l'hyperplan $x = 0$. Comme C_q est de degré 4, il y en a 4 et on a par la formule de Riemann-Hurwitz $\chi(C_q) = 2\chi(E_1) - 4 = -4$ donc $\chi(E_1) = 0$ et c'est une courbe elliptique.
5. Par construction, $\sigma_i^*\eta_i = \eta_i$, et $\eta_i \neq 0$. Or chaque involution σ_i agit sur $H^0(X, K)$ par des involutions non-triviales qui commutent. Si ces involutions ont la valeur propre 1 avec multiplicité 2, le produit $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ne fait pas 1. C'est donc l'inverse qui se produit et η_i est le générateur de l'espace fixé par σ_i : en particulier ces formes sont indépendantes.
6. On a $\int_\gamma \eta_i = \int_\gamma p_i^*\omega_i = \int_{p_i(\gamma)} \omega_i \in \Lambda_i$. Ainsi $\Lambda \subset \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \Lambda_3$. Les deux sont des réseaux de $\mathbb{C}^3$ (le quotient $\mathbb{C}^3/\Lambda$ s'identifie à la jacobienne de C_q) ainsi le quotient est fini.