Examen - Surfaces de Riemann - 26/10/2015

Durée de trois heures. Les notes de cours sont autorisées, pas les téléphones portables.

Notation : On notera $\mathcal{M}_X$ le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte et connexe X. Si f appartient à $\mathcal{M}_X$ et x est un point de X, on notera $k_x(f) \in \mathbb{Z}$ la multiplicité de f en x.

On emploiera librement dans le premier exercice le théorème de Bézout : deux courbes algébriques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degrés d_1 et d_2 se coupent en $d_1 d_2$ points comptés avec multiplicités.

Exercice 1 :

1. Soit X la quartique de Klein définie par
$$X = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0\}.$$
Montrer qu'il s'agit d'une surface de Riemann et donner son genre.
2. Donner sans calcul le nombre de points d'intersection de X avec la droite projective d'équation $x + y + z = 0$.
3. Soit φ l'automorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par $\varphi([x, y, z]) = [y, z, x]$. Montrer que φ induit un biholomorphisme de X d'ordre 3 et déterminer ses points fixes.
4. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par $f([x, y, z]) = [(x + y + z)^3, xyz]$ est bien définie, holomorphe et vérifie $f \circ \varphi = f$.
5. Notons $P(x, y, z) = x^3 y + y^3 z + z^3 x$, $f_1(x, y, z) = (x + y + z)^3$, $f_2(x, y, z) = xyz$. Montrer que $[x, y, z]$ est un point de ramification de f si et seulement si on a $P(x, y, z) = 0$ et
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$
En déduire le nombre de points de ramification de f, comptés avec multiplicités.
6. Calculer le degré de f puis vérifier le calcul à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz.
7. Soit $\Phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ l'application définie par
$$\Phi([x, y, z]) = [x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz].$$
Montrer que Φ induit un plongement de X vers une sous-variété Y qui est l'intersection de 4 quadriques dans $\mathbb{P}^5$ que l'on explicitera.

Exercice 2 : Soit X une surface de Riemann compacte et connexe de genre g. On note K son fibré canonique et T son fibré tangent holomorphe.

1. Calculer la dimension de $H^0(X, K^2)$.
2. Montrer que l'application de Kodaira associée $\Psi : X \to \mathbb{P}(H^0(X, K^2)^*)$ est bien définie si $g \geq 2$ et que c'est un plongement si $g \geq 3$.
3. Soit $p \in X$ un point et z une coordonnée locale dans un ouvert U contenant p. Notons Ψ_p la classe dans $H^1(X, T)$ définie par le cocycle $\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ sur $U_0 \cap U_1$ où $U_0 = U$ et $U_1 = X \setminus \{p\}$. Montrer que $\Psi_p = 0$ si et seulement s'il existe un champ de vecteur méromorphe sur X avec un pôle simple en p et pas d'autre singularité.
4. En déduire que si $g \geq 2$, le cocyle ψ_p est non nul pour tout p.
5. Soit L_1 et L_2 deux fibrés en droites sur X et $\alpha \in H^0(X, L_1)$. Pour $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de X, montrer que l'application $\mathcal{O}_{L_2}(U_i \cap U_j) \to \mathcal{O}_{L_1 \otimes L_2}(U_i \cap U_j)$ définie par $h_{ij} \mapsto \alpha|_{U_i \cap U_j} h_{ij}$ induit un morphisme du groupe $H^1(X, L_2)$ vers le groupe $H^1(X, L_1 \otimes L_2)$. On le note $\beta \mapsto \alpha\beta$. [1]
6. Montrer que l'application $H^0(X, K^2) \to H^1(X, K) \simeq \mathbb{C}$ définie par $\alpha \mapsto \alpha\psi_p$ a pour noyau l'ensemble des sections de K^2 s'annulant en p. En déduire que l'on a $\Psi(p) = [\psi_p]$.
7. *(Hors barème).* Montrer que si $g = 2$ et $\psi \in H^1(X, T)$, l'expression $\psi(\alpha, \beta) = \langle \psi, \alpha\beta \rangle$ avec $\alpha, \beta \in H^0(X, K)$ permet d'identifier $H^1(X, T)$ a l'espace des formes quadratiques sur $H^0(X, K)$.

Exercice 3 : Soit X une surface de Riemann compacte et connexe. Pour $f, g \in \mathcal{M}_X$ et $x \in X$, on appelle symbole modéré en x la quantité

$$\{f, g\}_x = (-1)^{k_x(f)k_x(g)} \lim_{z \to x} \frac{f(z)^{k_x(g)}}{g(z)^{k_x(f)}}.$$

1. Montrer que $\{f, g\}_x$ est un élément bien défini de $\mathbb{C}^*$.
2. Établir pour tout $f, g, h \in \mathcal{M}_X$ les identités suivantes :
$$\{f, gh\}_x = \{f, g\}_x \{f, h\}_x, \{f, g\}_x = \{g, f\}_x^{-1}, \{f, 1 - f\}_x = 1.$$
3. Soit S la réunion des pôles et des zéros de f et g. On introduit la forme différentielle réelle $\eta(f, g) = \log|f| d \arg g - \log|g| d \arg f \in \Omega^1(X \setminus S, \mathbb{R})$. Prouver que η est fermée : on pourra relier $d\eta$ à la 2-forme complexe $\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$.
4. Montrer que pour tout lacet C_x assez petit entourant positivement $x \in S$ on a $\frac{1}{2\pi} \int_{C_x} \eta(f, g) = \log|\{f, g\}_x|$.
5. Justifier et démontrer l'égalité $|\prod_{x \in X} \{f, g\}_x| = 1$. [2]
6. *(Hors barème)* Montrer que l'expression $\theta = \log|x| d \arg y - \log|y| d \arg x$ définit sur la courbe d'équation $xy + x + y - 1 = 0$ une forme différentielle exacte.

1. On rappelle que si $L_1 = K \otimes L^{-1}$ et $L_2 = L$ alors cette application est la dualité de Serre : elle est non-dégénérée.
2. La même égalité est vraie sans valeur absolue, c'est la loi de réciprocité de Weil.

Corrigé Exercice 1 :

1. Posons $P = x^3y+y^3z+z^3x$ et supposons qu'on ait $\partial_x P = 3x^2y+z^3 = \partial_y P = 3y^2z+x^3 = \partial_z P = 3z^2x+y^3 = 0$. Si $x = 0$ alors la première équation donne $z = 0$ et la troisième $y = 0$. Par symétrie, aucune coordonnée ne s'annule. On tire du cube de la première équation $27x^6y^3 = -z^9$. En insérant la troisième, cela donne $81x^7 = z^7$. Par symétrie cyclique en x, y, z, cette équation n'a pas de solutions.

2. Il est clair que φ est un biholomorphisme d'ordre 3. Si $[x, y, z]$ est un point fixe alors $y = \lambda x, z = \lambda y, x = \lambda z$ pour un $\lambda \neq 0$. On en déduit que $x \neq 0$ et $\lambda^3 = 1$, puis $\lambda + \lambda^5 + \lambda^6 = 0$ soit $\lambda = \exp(\pm 2i\pi/3)$, ce qui nous donne deux points fixes.

3. Si f n'est pas définie, c'est qu'on peut avoir $x + y + z = xyz = 0$ pour un certain $[x, y, z] \in X$. Mais $xyz = 0$ implique que l'une des coordonnées est nulle, l'équation de X qu'une deuxième est nulle et enfin $x + y + z = 0$ que les trois sont nulles, une contradiction. Il est clair que du coup f est holomorphe et invariante car symétrique en x, y, z.

4. L'espace tangent de X en $[x, y, z]$ est le quotient du noyau de la différentielle de P par la droite engendrée par (x, y, z). L'application $F = (f_1, f_2)$ a une différentielle DF qui est une application linéaire $DF : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ qui passe au quotient en une application linéaire de $T_{[x,y,z]}\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to T_{[f_1(x,y,z),f_2(x,y,z)]}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Cette application est nulle en restriction au noyau de DP si et seulement si les trois formes linéaires DP, Df_1, Df_2 sont linéairement indépendantes. Le résultat s'en suit. Ecrivant le déterminant, on constate qu'il est de degré 7 dans les variables x, y, z et donc son annulation définit une courbe de degré 7. En intersection avec la courbe X de degré 4, on trouve 28 solutions d'après le théorème de Bézout.

5. La préimage par f de $[a, b]$ est l'intersection de X avec la courbe d'équation $b(x+y+z)^3 = axyz$. L'une étant de degré 4 et l'autre de degré 3, le théorème de Bézout nous dit que f est de degré 12. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, on doit avoir $2 - 2g = 2d - r$ avec $g = 3$, $d = 12$ et $r = 28$ ce qu'on vérifie directement.

6. Il est classique que Φ est un plongement (de Veronese). Notons $u = x^2, v = y^2, w = z^2, r = xy, s = yz, t = xz$. L'image du plongement est caractérisée par les équations $r^2 = uv, s^2 = vw, t^2 = uw$. L'équation de X s'écrit $ur + vs + wt = 0$. Réciproquement, un point satisfaisant ces 4 équations est bien dans l'image de X.

Exercice 2 :

1. Si $g = 0$ on trouve 0, si $g = 1$, on trouve 1. D'après la formule de Riemann-Roch, en genre $g \geq 2$, comme $\deg K^{-1} < 0$, on trouve $h^0(X, K^2) = \deg K^2 - g + 1 = 3g - 3$.

2. Supposons $g \geq 2$ et prenons $p \in X$. Alors $h^0(X, K^2 \otimes L_p^{-1}) - h^0(X, K^{-1} \otimes L_p) = 3g-4$. Comme $\deg K^{-1} \otimes L_p < 0$, on a $h^0(X, K^2 \otimes L_p^{-1}) = h^0(X, K^2) - 1$ et K^2 est sans point base. Ainsi Ψ est bien définie. D'après le critère d'amplitude, si $g \geq 3$, Ψ est un plongement si on a $h^0(X, K^2 \otimes L_p^{-1} \otimes L_q^{-1}) = h^0(K^2) - 2$. Mais une application directe de Riemann-Roch montre que c'est le cas.
3. Soit $U_0 = U$ et $U_1 = X \setminus \{p\}$. Le recouvrement ayant deux ouverts, la formule définit bien un cocycle dans $H^1(X, T)$. Si $\Psi_p = 0$ alors quitte à raffiner le recouvrement, on peut trouver deux champs ξ_0 et ξ_1 sur U_0 et U_1 tels que $\xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ sur l'intersection $U \setminus \{p\}$. Ainsi le champ défini par ξ_1 sur $X \setminus \{p\}$ s'écrit $\xi_0 + \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ sur U avec ξ_0 holomorphe. Il présente donc bien un pôle simple en p. La réciproque est claire.
4. Si ψ_p est nul, c'est que le fibré $T \otimes L_p$ admet une section holomorphe. Or son degré est $2 - 2g + 1 < 0$ si $g \geq 2$. C'est donc impossible.
5. Le cocycle αh est simplement donné par les applications $\alpha|_{U_i \cap U_j} h_{i,j}$. La relation de cocycle se déduit trivialement de celle de h.
6. Soit α une différentielle quadratique (i.e. un élément de $H^0(X, K^2)$). Elle s'écrit $\alpha = a(z)dz^2$ dans la carte U. D'après ce qui précède, $\alpha\psi_p$ est représenté par le cocycle $\frac{a(z)}{z}dz \in H^1(X, K)$. Si a s'annule en p, la forme se prolonge holomorphiquement à U et sa classe est nulle. La réciproque est évidente. De plus a est nulle en p si et seulement si α est nulle en p.
7. En genre 2, $H^0(X, K)$ est de dimension 2. L'expression $\psi(\alpha, \beta) = \langle \psi, \alpha\beta \rangle$ est manifestement une forme bilinéaire en α et β ainsi on a un morphisme $H^1(X, T) \to \mathrm{Quad}(H^0(X, K))$. Ces deux espaces sont de dimension 3, il suffit donc de montrer que ce morphisme est surjectif. Soit ω_1, ω_2 une base de $H^0(X, K)$. La forme quadratique associée à ψ est déterminée par le triplet $(\langle \psi, \omega_1^2 \rangle, \langle \psi, \omega_1\omega_2 \rangle, \langle \psi, \omega_2^2 \rangle)$. Si le morphisme n'est pas surjectif, c'est qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels qu'on ait $a\langle \psi, \omega_1^2 \rangle + b\langle \psi, \omega_1\omega_2 \rangle + c\langle \psi, \omega_2^2 \rangle = 0$ pour tout ψ. En prenant $\psi = \psi_p$ on a $a\omega_1(p)^2 + b\omega_1(p)\omega_2(p) + c\omega_2(p)^2 = 0$ où ω_1, ω_2 est une base de $H^0(X, K)$.

   En notant $f = \omega_2/\omega_1$, on trouve $a + bf + cf^2 = 0$ ce qui force f a être constante. Impossible puisque ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendantes.

Exercice 3 :

1. On choisit une coordonnée locale z autour de x et on écrit $f(z) = z^n f'(z)$ et $g(z) = z^m g'(z)$ avec f' et g' des fonctions holomorphes ne s'annulant pas en 0. On aura alors $k_x(f) = n$ et $k_x(g) = m$ ainsi que $\frac{f^m}{g^n} = \frac{f'^m}{g'^n}$. Cette dernière fonction est holomorphe en 0 et ne s'annule pas ainsi le symbole est bien défini.
2. On a $k_x(gh) = k_x(g)k_x(h)$ ainsi la première propriété s'en suit directement alors que la deuxième est évidente. Montrons la troisième. On a la dichotomie suivante : si f s'annule en x, $1 - f$ vaut 1 ainsi $k_x(1 - f) = 0$ et

$\{f, 1-f\}_x = 1$. Si $1-f$ s'annule, alors on se ramène au cas précédent par symétrie. Si ni f ni $1-f$ ne s'annule alors $k_x(f) = k_x(1-f) = 0$ et on a $\{f, 1-f\}_x = 1$, enfin si f (et donc $1-f$) a un pôle disons d'ordre N, on peut trouver une coordonnée locale où elle s'écrit $f(z) = z^{-N}$. On a alors $k_x(f) = k_x(1-f) = -N$ et $\{f, 1-f\}_x = (-1)^N \lim_{z\to 0}(\frac{z^{-N}}{1-z^{-N}})^{-N} = 1$.

3. On a $\frac{df}{f} = \frac{d|f|}{|f|} + i d\arg f$ et donc $d\eta = \mathrm{Im}\, \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$. La forme $\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$ est proportionnelle à $dz \wedge dz$ donc nulle sur X. Ainsi η est fermée.

4. Dans une coordonnée locale z centrée en $x \in S$ on a $f(z) = az^n f'(z)$ et $g(z) = bz^m g'(z)$ avec f' et g' holomorphes et valant 1 en 0. Avec ces notations, on aura $\log|\{f, g\}_x| = \log|\frac{a^m}{b^n}| = m\log|a| - n\log|b|$. En notant $z = \rho e^{i\theta}$, on voit que $d\arg g = md\theta + o(\rho)$, de même pour $d\arg f$ de sorte que $\eta(f, g) = m\log|a|d\theta - n\log|b|d\theta + o(\rho)$, le résultat s'en suit par intégration de θ.

5. On remarque juste que le produit est fini puisque $\{f, g\}_x = 1$ si $x \notin S$. Soit $(D_s)_{s\in S}$ une famille de disques disjoints centrés en $s \in S$. Notons $P = X \setminus \bigcup_{s\in S} D_s$. On aura $0 = \int_P d\eta(f, g) = \int_{\partial P} \eta(f, g) = -\sum_s 2\pi \log|\{f, g\}s|$ ce qui prouve l'assertion.

6. On commence par vérifier que la courbe X d'équation projective $xy + xz + yz - z^2$ est lisse. En effet, un point critique correspond aux équations $y+z = x+z = x+y-2z = 0$ d'où on tire $x = y = z = 0$. La courbe est de genre 0 et la coordonnée x réalise un biholomorphisme avec $\hat{\mathbb{C}}$, on pose alors $f = x$ et $g = y = \frac{1-x}{1+x}$. Le symbole $\{x, y\}$ ne peut être différent de 1 qu'aux points $0, 1, -1, \infty$ et on calcule directement que ses valeurs respectives sont $1, 1, -1, -1$. Ces nombres étant de module 1, l'intégrale de η le long de courbes encerclant $0, 1, -1, \infty$ est nulle. Ces courbes engendrant le groupe $H_1(X \setminus \{0, 1, -1, \infty\}, \mathbb{R})$ les périodes de η sont donc nulles et cette dernière est exacte.