Retour sur le cup-produit en cohomologie tordue.

On se donne X un espace top. et $f : X \to B$ $\quad b_0 \in B$

et M un $\mathbb{Z}[\pi]$-module $\quad \pi = \pi_1(B, b_0)$

$$H^*(X, M) = H^*\big(\mathrm{Hom}_\pi(C_*(X,B), M)\big)$$

$$(\sigma, \gamma)$$

Si on a deux $\mathbb{Z}[\pi]$-modules M et N

et $\varphi \in \mathrm{Hom}_\pi(C_p(X,B), M)$ $\quad \psi \in \mathrm{Hom}_\pi(C_q(X,B), N)$

On définit $\varphi \cup \psi \in \mathrm{Hom}_\pi(C_{p+q}(X,B), M \otimes N)$

par la formule habituelle $\quad \varphi \cup \psi(\sigma, \gamma) = \varphi(\sigma|_{[0,\dots,p]}, \gamma) \otimes \psi(\sigma|_{[p,\dots,p+q]}, \gamma)$

$\sigma : \Delta_{p+q} \to X$

Cette opération induit une application

$$H^p(X, M) \times H^q(X, N) \longrightarrow H^{p+q}(X, M \otimes N)$$

on précise $M \otimes N$ désigne le produit tensoriel usuel (pas celui sur $\mathbb{Z}[\pi]$)

et il est vu comme un $\mathbb{Z}[\pi]$-module par l'action diagonale

$$\alpha \cdot x \otimes y = \alpha x \otimes \alpha y.$$

En pratique on va souvent remplacer $M \otimes N$ par un autre système de coefficients P en prenant $M \otimes N \longrightarrow P$ un morphisme de $\mathbb{Z}[\pi]$-module.

<u>Exemple principal.</u> dans la suite spectrale cohomologique de Serre.

$*_1 : E_1^{p,q} \times E_1^{p',q'} \longrightarrow E_1^{p+p',q+q'}$ est un produit vérifiant ...

cela induit $*_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{p',q'} \longrightarrow E_2^{p+p',q+q'}$

et on a vu que $E_2^{p,q} \simeq H^p(B, H^q(F))$

On a $*_2 : H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \to H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$

Proposition : $*_2 = (-1)^{qp'}$ double cup-produit.

double cup : $H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \to H^{p+p'}(B, H^q(F) \otimes H^{q'}(F))$

on a ainsi $H^q(F) \overset{\frown}{\times} H^{q'}(F) \to H^{q+q'}(F)$ cup-prod / fibre.

induit un morph. de $\mathbb{Z}[\pi]$-mod. $H^q(F) \otimes H^{q'}(F) \to H^{q+q'}(F)$

donc $\boxed{H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \to H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))}$

En pratique on se servira presque uniquement du cas $p=0$ ou $q=0$

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & P^\infty(\mathbb{C}) \end{array}$$

La suite sp. de Serre a un terme $E_2^{p,q} = H^p(P^\infty(\mathbb{C}), H^q(S^1))$

$H^0(S^1) \simeq \mathbb{Z} \ni 1$ $\qquad$ $H^1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \ni x$ générateur deg 1

$$\boxed{H^*(S^1) = \mathbb{Z}[x]/(x^2) \simeq \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^p(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x}$$

On a

$$\begin{array}{c|cccc} q=1 & H^0(P^\infty)x & H^1(P^\infty)x & H^2(P^\infty)x & H^3(P^\infty)x \\ \hline q=0 & \boxed{H^0(P^\infty)} \ni 1 & \boxed{H^1(P^\infty)} & H^2(P^\infty) & H^3(P^\infty) \\ \hline E_2 & & (1,0) & & 0 \end{array}$$

$E_2^{p,1} = H^p(P^\infty, H^1(S^1)) = H^p(P^\infty) \otimes H^1(S^1)$

$E_2^{p,0} \xrightarrow{\times x} E_2^{p,1}$ est un isomorphisme.

$H^p(P^\infty, H^0(S^1)) \longrightarrow H^p(P^\infty, H^1(S^1))$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \mathbb{Z}x & 0 & \mathbb{Z}\alpha x & 0 & \mathbb{Z}\alpha^2 x & 0 & \mathbb{Z}\alpha^3 x & 0 \\ \hline \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}\alpha & 0 & \mathbb{Z}\alpha^2 & 0 & \mathbb{Z}\alpha^3 & 0 \end{array}$$

$\alpha = d_2 x$ $\qquad$ $d_2(\alpha x) = d_2\alpha\, x + \alpha\, d_2 x$

$= \alpha\, d_2 x = \alpha^2$ $\qquad$ $(d_2\alpha = 0)$

On trouve au final $H^*(P^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]$ deg $\alpha = 2$.

<u>Groupes SU_n</u> : $H_*(SU_4, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^3 \times S^5, \mathbb{Z})$

On a déduit cela de la suite spect. homologique.

<u>Démontrons que</u> $H^*(SU_n, \mathbb{Z}) \simeq H^*(S^3 \times S^5 \times \cdots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z})$.

Par récurrence sur n : pour $n=2$ $SU_2 \simeq S^3$.

On regarde la fibration
$$\begin{array}{ccc} SU_{n-1} & \hookrightarrow & SU_n \\ & & \downarrow \\ & & S^{2n-1} \end{array}$$

La 2ème page de la suite spectrale cohomologique de Serre est

$$E^2_{p,q} = H^p(S^{2n-1}, H^q(SU_{n-1}))$$ $n \geq 2$ $\pi_1(S^{2n-1}) = 1$ pas de coeffs. tordus

$$= H^p(S^{2n-1}) \otimes H^q(SU_{n-1})$$ par les coeffs universels

$x_n \in H^n(S^n, \mathbb{Z})$ le générateur

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[ddrr, "d^{2n-1}"] & & \vdots \\ H^2(SU_{n-1}) & & H^2(SU_{n-1})x_{2n-1} \\ H^1(SU_{n-1}) & 0 & H^1(SU_{n-1})x_{2n-1} \\ H^0(SU_{n-1}) & & H^0(SU_{n-1})x_{2n-1} \end{tikzcd}$$

$2n-2$

E^2 $p=0$ $p=2n-1$

Rappelons nous que d^{2n-1} est une dérivation $d^{2n-1}(\alpha\beta) = d^{2n-1}\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha\, d^{2n-1}(\beta)$.

Par hypothèse de récurrence $H^*(SU_{n-1})$ est engendrée par des classes de degré $3, 5, \ldots, 2n-3$.

$x_3 \ldots\ldots x_{2n-3}$ $\qquad d^{2n-1}(x_i) = 0$

x_i est de degré i $\qquad d^{2n-1}x_i$ est de degré $i-(2n-2) < 0$

donc $d^{2n-1}(x_i) = 0$ $\forall i$ donc $d^{2n-1} = 0$

$\Rightarrow E^2 = E^3 = \cdots = E^\infty$

donc
$$\begin{aligned} H^*(SU_n) &\simeq H^*(SU_{n-1}) \oplus H^*(SU_{n-1})x_{2n-1} \\ &= H^*(SU_{n-1}) \otimes \left(\overset{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x_{2n-1}}{\mathbb{Z}[x_{2n-1}]/(x_{2n-1}^2)} \right) \\ &= \mathbb{Z}[x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}]/(x_3^2, x_5^2, \ldots, x_{2n-1}^2) \\ &= H^*(S^3 \times S^5 \times \cdots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Exemple : Mq $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Rq : $$\begin{array}{ccc} \pi_3(S^2) & \xrightarrow{\text{suspension}} & \pi_4(S^3) \\ \wr\!\!| & & \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

Exercice (devoir à la maison)

$$\begin{array}{c} P^\infty(\mathbb{C}) \\ \| \\ K(\mathbb{Z},2) \\ \wr\!\!| \\ \Omega K(\mathbb{Z},3) \to P K(\mathbb{Z},3) \\ \downarrow \\ K(\mathbb{Z},3) \end{array}$$

$K(\mathbb{Z},3)$ $\quad \pi_3 = \mathbb{Z} \quad \pi_k = 0 \quad \forall k \neq 3.$

$H^*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) =$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}/2$			
deg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	13

mars

On part de S^3 on veut calculer $\pi = \pi_4(S^3)$

En ajoutant des cellules de dim 6 et plus, on crée un espace Y qui vérifie

$$\begin{array}{lccccccccc} \pi_* Y = & 0 & 0 & \mathbb{Z} & \pi & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \text{degré} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

On observe aussi que l'homologie de Y est la même que celle de S^3 jusqu'en degré 5 inclus. $H_4(Y) = H_5(Y) = 0$.

En particulier $\quad H^3(Y,\mathbb{Z}) \simeq H^3(S^3,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
$$\simeq [Y, K(\mathbb{Z},3)]$$

Au générateur de $H^3(Y,\mathbb{Z})$ correspond une application $f : Y \to K(\mathbb{Z},3)$ quitte à changer Y en un espace qui lui est homotope on peut supposer que Y est une fibration. On note la fibre, F.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \pi_5(Y) \to & \pi_5(K(\mathbb{Z},3)) \to & \pi_4(F) \to & \pi_4(Y) \to & \pi_4(K(\mathbb{Z},3)) \to & \pi_3(F) \to & \pi_3(Y) \to & \pi_3(K(\mathbb{Z},3)) \to \\ 0 & 0 & \pi_4(F) \simeq & \pi & 0 & \overset{!!}{0} & \mathbb{Z} \simeq & \mathbb{Z} \end{array}$$

La suite ex. longue donne $\quad \pi_4(F) = \pi \quad \pi_k(F) = 0 \quad \forall k \neq 4.$

ie $\quad F = K(\pi, 4).$

$$\begin{array}{ccc} K(\pi,4) & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow \\ & & K(\mathbb{Z},3) \end{array}$$

$$\left[\; \begin{array}{ccc} f : X & \to & Y \\ \wr\!\!| & \nearrow_{\text{fib.}} & \\ X' & & \end{array} \right.$$

On regarde la suite spectrale en homologie.

$H^*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\ 0\ 0\ \mathbb{Z}\ 0\ 0\ \mathbb{Z}/2 \cdots$

$H_*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\ 0\ 0\ \mathbb{Z}\ 0\ \mathbb{Z}/2$? par les coeffs. universels

$$E^2_{p,q} = H_p(K(\mathbb{Z},3), H_q(K(\pi,4)))$$

pas de coeffs tordus.

$$\begin{array}{c|cccccc}
4 & \boxed{\pi} & 0 & 0 & \pi & 0 & ? \\
3 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\
q=1 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\
q=0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \boxed{\mathbb{Z}} & \boxed{0} & \boxed{\mathbb{Z}/2} \\
\hline
 & p=0 & & & p=3 & & p=5
\end{array}$$

∂_5

$H_*(K(\pi,4)) = \mathbb{Z}\ 0\ 0\ 0\ \pi$
$\quad 0\ 1\ 2\ 3\ 4$
par Hurewicz.

$\boxed{H_4(K(\mathbb{Z},3),\pi)}$

Cette suite doit converger vers $H_*(Y)$

$H_*(Y) = \mathbb{Z}\ 0\ 0\ \mathbb{Z}\ 0\ 0$?

Comme $H_4(Y) = 0$ le groupe $E^2_{0,4}$ doit disparaître dans $E^\infty_{0,4}$

La seule façon que cela arrive est que ∂_5 soit surjective.

$$E^6 \quad \begin{array}{|cccccc}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \\
\mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \boxed{\operatorname{Ker}\partial_5} \\
\hline
\end{array}$$

$\operatorname{Ker}\partial_5$ contribue à $H_5(Y)$ qui est nul.

or $\partial_6, \partial_7, \ldots$ sont nuls sur $E^6_{0,5}$.

donc $\operatorname{Ker}\partial_5 = 0$ Finalement : $\partial_5 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \pi$ est un isomorphisme.

donc $\boxed{\pi = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

3.5 Classes caractéristiques

On va considérer trois types de fibrés vectoriels sur une base B

① Fibré vectoriel réel de dim k.

② Fibré vectoriel réel orienté de dim k

③ Fibré vectoriel complexe de dim k

Exemples universels. ① $G_k(\mathbb{R}^n) = \{ P \subset \mathbb{R}^n$ P sous-espace vectoriel de dim $k \}$

$E_k(\mathbb{R}^n) = \{ (v, P)$ avec $P \in G_k(\mathbb{R}^n)$ et $v \in P \}$

$$\begin{array}{ccc} E_k(\mathbb{R}^n) & & (v,P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k(\mathbb{R}^n) & & P \end{array}$$

est un fibré vectoriel de dim k sur $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Il y a des inclusions $G_k(\mathbb{R}^n) \subset G_k(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_k(\mathbb{R}^{n+2}) \dots\dots$

on pose $G_k = \varinjlim_{n \to +\infty} G_k(\mathbb{R}^n)$ $\quad \begin{array}{c} E_k \\ \downarrow \\ G_k \end{array}$ fibré de rg k.

$G_k^+ = \varinjlim G_k^+(\mathbb{R}^n) = \{ (P, o)$ $P \subset \mathbb{R}^n$ $\dim P = k$, o orientation de $P \}$ $\quad \begin{array}{c} E_k^+ \\ \downarrow \\ G_k^+ \end{array}$

$G_k^{\mathbb{C}} = \varinjlim G_k^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \{ P \subset \mathbb{C}^n$ $\dim P = k \}$ $\quad \begin{array}{c} E_k^{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ G_k^{\mathbb{C}} \end{array}$

Théorème : Soit B un espace paracompact et $p : E \to B$ un fibré vectoriel réel de dim k. Alors $\exists\, \xi : B \to G_k$ tq $E \simeq \xi^* E_k$. De plus ξ est unique à homotopie près.

Même chose pour G_k^+ et $G_k^{\mathbb{C}}$.

Déf : Une classe caractéristique est un élément $x \in H^p(G_k, \mathbb{Z})$

Si $\underset{\text{fibré de dim } k}{p : E \to B}$ alors $E \simeq \xi^* E_k$

on associe à p la classe $\xi^*(x) \in H^p(B, \mathbb{Z})$.

On obtient une classe de cohomologie qui ne dépend que du fibré E. dite caractéristique naturelle par rapport aux pull-back.

Ex : classes de Stiefel-Whitney, classes de Chern, classes de Pontrjagin

Regardons la cohomologie de $G_k^{\mathbb{C}}$

$G_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ $\qquad H^*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]$ $\quad \deg \alpha = 2$

$\alpha = c_1$ première classe de Chern.

Théorème, $k \geq 1$ $\quad H^*(G_k, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_k]$ où $\deg c_i = 2i$

On munit $\mathbb{C}^{(\infty)}$ d'une structure hermitienne standard.

On pose $U_k^{\mathbb{C}} = \{ (v, V)$ avec $V \in G_k^{\mathbb{C}}$ et $\|v\| = 1 \}$.

L'application
$$\begin{array}{ccc} U_k^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & S^\infty \\ (v, V) & \longmapsto & v \end{array}$$

La fibre de cette application est $\{ V \subset \mathbb{C}^{(\infty)} \ \dim V = k \text{ tq } v \in V \}$

$\{ W \subset \mathbb{C}^{(\infty)}/\mathbb{C}v \ \ \dim W = k-1 \}$.

$G_{k-1}^{\mathbb{C}}$

fibration
$$\begin{array}{ccc} G_{k-1}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & U_k^{\mathbb{C}} \\ & & \downarrow \\ & & S^\infty \end{array}$$

$\Rightarrow \quad G_{k-1}^{\mathbb{C}} \simeq U_k^{\mathbb{C}}$

On regarde l'autre projection
$$\begin{array}{ccc} U_k^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & G_k^{\mathbb{C}} \\ (v, V) & \longmapsto & V \end{array}$$

Sa fibre est $\{ v \in V \} = S^{2k-1}$.

On a donc une fibration
$$\begin{array}{ccc} S^{2k-1} & \hookrightarrow & G_{k-1}^{\mathbb{C}} \\ & & \downarrow \\ & & G_k^{\mathbb{C}} \end{array}$$

La preuve consiste à faire un récurrence et utiliser la suite spectrale cohomologique de Serre.

$$E^2_{p,q} = H^p(G_k^{\mathbb{C}}, H^q(S^{2k-1})) \qquad (\pi_1 G_k^{\mathbb{C}} = 0)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} q = 2k-1 & H^0(G_k^{\mathbb{C}})x_{2k-1} & H^1(G_k^{\mathbb{C}})x_{2k-1} & \cdots & & \\ & 0 & & & 0 & \\ q = 0 & H^0(G_k^{\mathbb{C}}) & \boxed{H^1(G_k^{\mathbb{C}}) \ \cdots} & & H^{2k}(G_k^{\mathbb{C}}) & \\ \hline E^2 & & & & & \end{array}$$

d^{2k}

x_{2k-1} le générateur de $H^{2k-1}(S^{2k-1})$

Seule d^{2k} peut être non triviale.

On a un isomorphisme $H^\ell(G_k^{\mathbb{C}}) \simeq H^\ell(G_{k-1}^{\mathbb{C}}) \quad \forall \ell \leq 2k-1$

Comme d^{2k} est une dérivation toute la différentielle est déterminée par $d^{2k}(x_{2k-1}) \in H^{2k}(G_k^{\mathbb{C}})$

$\shortparallel$

c_k

La diff. $d^{2k} : H^{\ell}(G_k^{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^{\ell+2k}(G_k^{\mathbb{C}})$

est en fait la multiplication par $c_k \in H^{2k}(G_k^{\mathbb{C}})$

il faut analyser la suite $\to \times c_k$ est une injection

et $H^*(G_k^{\mathbb{C}})/(c_k) \simeq H^*(G_{k-1}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{k-1}]$

$\Rightarrow H^*(G_k^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots c_k]$.

- Milnor-Stasheff Classes caractéristiques
- Hatcher Vector bundles and K-theory.