1.2 Théorème d'Hurewicz

Application : calculer $\pi_k(S^n)$ pour $k \leq n$.

$$\pi_k(S^n) = 0 \text{ si } k < n \quad \text{et} \quad \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

Resultat déjà non trivial. Il est presque impossible calculer $\pi_k(X)$ pour $k \geq 2$.
On se ramène toujours à calculer $H_k(X)$

<u>Théorème de comparaison entre H_k et π_k</u>

Soit (X, A, x_0) un triplet. On rappelle que $\pi_n(X, A, x_0)$ est engendré par des

$$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$$

Un tel morphisme induit $f_* : H_n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H_n(X, A, \mathbb{Z})$

le groupe $H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ on note α_n le générateur

$$\text{is } H^0(D^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

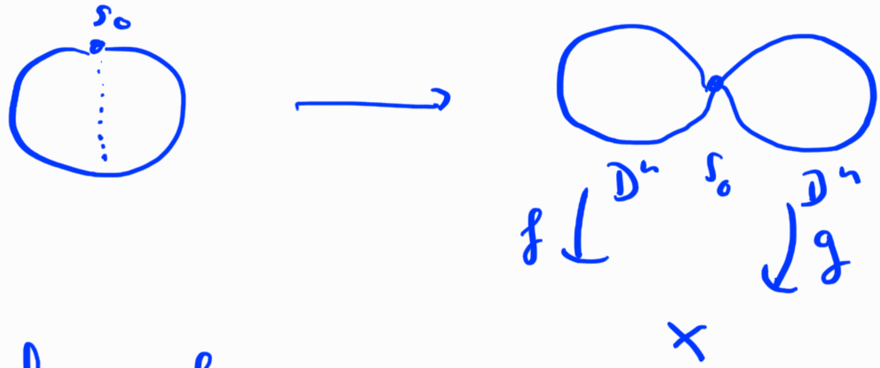
On pose
$$h : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$
$$[f] \longmapsto f_*(\alpha_n).$$

C'est l'application d'Hurewicz, elle est bien définie.

<u>Proposition</u> : h est un morphisme de groupes. pour $n \geq 1$

On se donne $f, g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$

et on rappelle qu'on a $c : D^n \longrightarrow D^n \vee_{s_0} D^n$



<u>def</u>. $fg = f \vee g \circ c$

On constate que $h(fg) = (f \vee g \circ c)_* (\alpha_n)$

$= (f \vee g)_* \circ c_* (\alpha_n)$.

On voudrait calculer $c_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$

(sans entendu, coefficients $= \mathbb{Z}$)

$H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ $\quad$ $H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$

$= H_n(D^n, S^{n-1}) \oplus H_n(D^n, S^{n-1})$

$= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$(f \vee g)_* = f_* \oplus g_*$ dans cette décomposition

On se ramène à démontrer que $c_*(\alpha_n) = \alpha_n + \alpha_n$ dans cette décomposition.

On considère $q_1, q_2 : D^n \vee D^n \to D^n$ qui écrase le deuxième (resp le premier) sur s_0

q_1 :

$q_1 \circ c$:

on constate

que $q_1 \circ c$ est homotope à l'identité.

de même pour $q_2 \circ c$

$$\begin{tikzcd} c_* : \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] \arrow[r, bend left, "id"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

ceci démontre bien que $c_*(x) = (x, x) = x \oplus x$.

fin de la preuve que $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ est bien un morphisme de groupes.

$$h(fg) = (fg)_*(\alpha_n) = (f \vee g \circ c)_* \alpha_n = (f \vee g)_* (c_*(\alpha_n))$$

$$= (f \vee g)_* (\alpha_n \oplus \alpha_n) = f_*(\alpha_n) + g_*(\alpha_n) = h(f) + h(g).$$

Rque : ① $\pi_0(X) = \{$ composantes connexes par arcs $\}$.

② le morphisme d'Hurewicz ne peut pas être un isomorphisme en général.

ex : $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X, \mathbb{Z})$

gp non abélien $\qquad$ gp abélien

thm : si X est connexe par arcs

$$\begin{tikzcd} h : \pi_1(X, x_0) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_1(X, \mathbb{Z}) \\ & \pi_1(X, x_0)^{ab} \arrow[ur, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

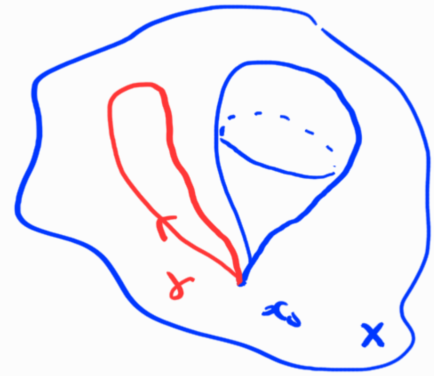
Regardons le cas absolu : $\pi_n(X, x_0)$

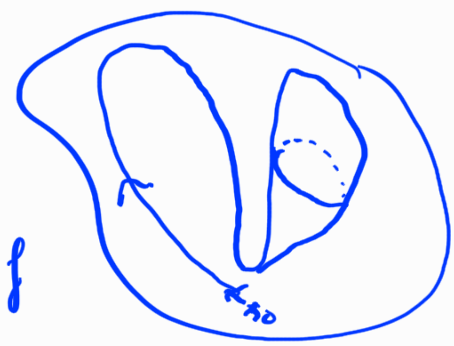
si $n \geq 2$ c'est un groupe abélien. De plus ce groupe admet une action de $\pi_1(X, x_0)$

Soit $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ représentant un élément de $\pi_n(X, x_0)$

et soit $\gamma : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, x_0)$ —— $\pi_1(X, x_0)$

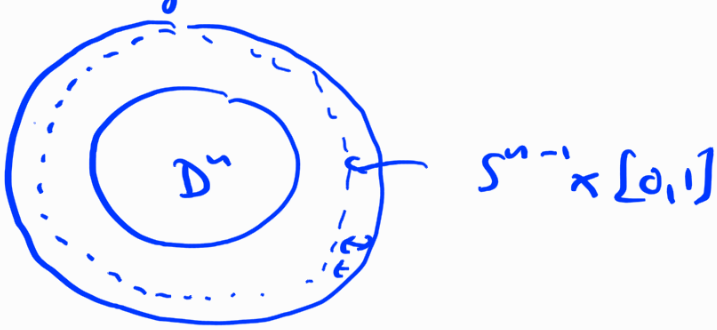
$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{f} & X \\ & & \cup \\ \partial D^2 & \longrightarrow & x_0 \end{array}$$





$\gamma \cdot f$

Plus formellement



$\simeq D^n$

$$\begin{aligned} \gamma \cdot f : \quad D^n \cup S^{n-1} \times [0,1] &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f(x) \\ (y, t) &\longmapsto \gamma(1-t) \end{aligned}$$

vérifications à faire : on a une action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$.

<u>Observation</u> : f et $\gamma \cdot f$ sont des applications $(D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ non homotopes.

$$(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

si on enlève la condition d'envoyer s_0 sur x_0

f et $\gamma \cdot f$: $S^n \to X$ sont homotopes.

ceci implique que $f_*([S^n]) = (\gamma \cdot f)_*([S^n])$

$$\Rightarrow h(f) = h(\gamma \cdot f)$$

Notons $\pi_n'(X, x_0) = \pi_n(X, x_0) / \langle \gamma \cdot f \cdot f^{-1} \rangle$

sous groupe normal engendré par ces éléments $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ $f \in \pi_n(X, x_0)$

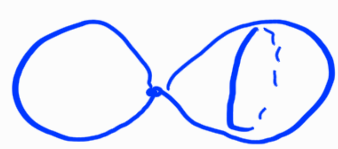
$\pi_n'(X, x_0)$ est le plus grand quotient de $\pi_n(X, x_0)$ sur lequel l'action de $\pi_1(X, x_0)$ devient triviale.

On a montré que

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_0) \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & H_n(X, \mathbb{Z}) \\ & \pi_n'(X, x_0) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

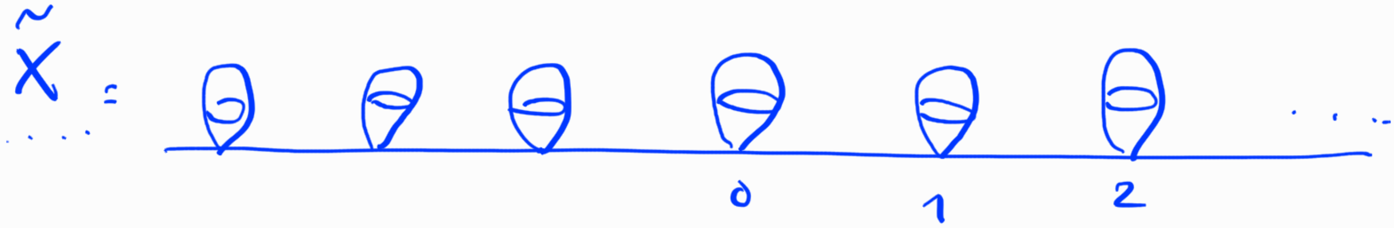
c'est le morphisme $\pi_n'(X, x_0) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$ qui peut éventuellement être un isomorphisme.

<u>Question</u> : trouver X tq π_1 agit sur π_2 non trivialement

<u>ex</u> : $X =$  $= S^1 \vee S^2$

Van Kampen $\Rightarrow$ $\pi_1 X = \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$

$\tilde{X} =$



$$H_2(\tilde{X}) = \cdots \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$$

$$\mathbb{Z} \cdot t^n$$

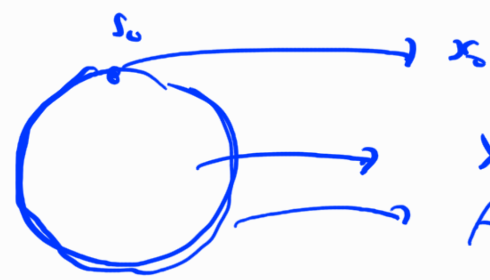
$$\pi_2(X) \simeq \pi_2(\tilde{X}) \simeq \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$$

On $\pi_1(X)$ agit sur $\pi_2(X)$ par $1 \cdot P = tP$ — le générateur agit par multiplication par t.

Retour au cas relatif : On va munir $\pi_n(X, A, x_0)$ d'une action de $\pi_1(A, x_0)$ de la façon suivante.

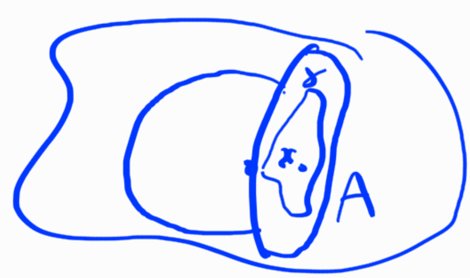
$$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$$

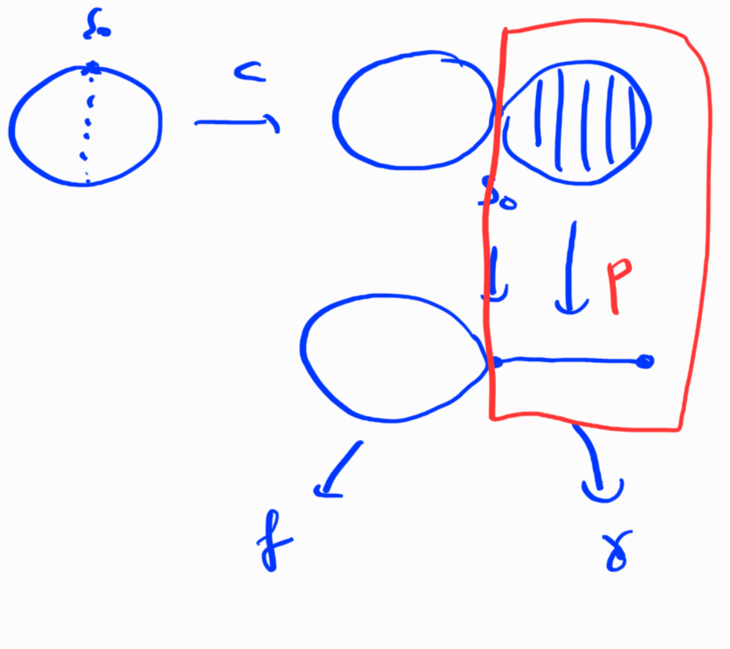
$$\gamma : (D^1, S^0) \to (A, x_0)$$



On définit

$$\gamma \cdot f := f \vee \gamma \circ (\mathrm{Id} \vee p) \circ c$$





où $p : D^n \to D^1$
$s_0 \to s_0$

<u>Vérification</u>: Cela définit bien une action de $\pi_1(A, x_0)$ sur $\pi_n(X, A, x_0)$ et on vérifie aussi que $h(\gamma\cdot f) = h(f)$ pour la même raison.

<u>Conclusion</u>: si on pose $\pi_n'(X, A, x_0) = \pi_n(X,A,x_0) / \langle \gamma\cdot f \cdot f^{-1} \rangle$

L'application d'Hurewicz passe au quotient
$$h : \pi_n'(X, A) \longrightarrow H_n(X, A).$$

$\gamma\cdot f$ et f sont homotopes comme applications $(D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$
$$\Rightarrow (\gamma\cdot f)_*(d_n) = f_*(d_n)$$

<u>Théorème (Hurewicz)</u> Soit (X, A) une paire d'espaces connexes par arcs (X et A) et supposons que (X, A) est $(n-1)$ connexe $\left[\pi_k(X, A, x_0) = 0 \quad \forall k<n\right]$

Alors $H_k(X, A, \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall k<n$ et $\boxed{n \geq 2}$
$$h : \pi_n'(X, A, x_0) \to H_n(X, A) \text{ est un iso de groupe}$$

Rappel de la preuve pour $h : \pi_1'(X, x_0) \xrightarrow{\sim} H_1(X, \mathbb{Z})$

idée $\quad C_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1'(X, x_0)$

$\alpha \in C_1(X, \mathbb{Z}) \quad \alpha = \sum n_i \sigma_i$
$\sigma_i : [0,1] \to X$

on choisit arbitrairement $\forall x \in X$ un lacet γ_x reliant x_0 à x

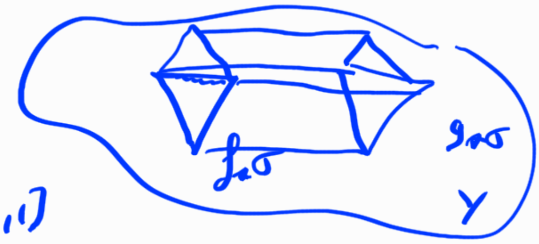
on définit $\varphi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1'(X, x_0)$

$\sigma_i \longrightarrow \gamma_0 \sigma_i \gamma_1^{-1}$

<u>Deuxième rappel</u>: la preuve du fait que deux applications $f, g : X \to Y$ homotopes vérifient $f_* = g_* : H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(Y, \mathbb{Z})$.

Soit $H : X \times [0,1] \to Y$ une homotopie entre f et g.

pour tout simplexe $\sigma : \Delta_n \to X$ on veut comparer $f \circ \sigma$ et $g \circ \sigma$



<u>idée</u>: H définit un prisme de base Δ_n: si on triangule $\Delta_n \times [0,1]$ à l'aide de simplexes Δ_{n+1}, on va exprimer $g_*\sigma - f_*\sigma$ comme une partie du bord du prisme.

<u>Méthode</u>: on note $i_k : \Delta_k \to \Delta_k$ l'application identité

on la voit comme un élément de $C_k(\Delta_k, \mathbb{Z})$

on construit par récurrence une chaîne

$i_1 \times i_k \in C_k(\Delta_1 \times \Delta_k)$ qui vérifie $\partial(i_1 \times i_k) = \partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k$

où $\partial i_1 \times i_k = \{1\} \times i_1 - \{0\} \times i_1$

et $i_1 \times \partial i_k$ est construit par récurrence.

pour $k = 0$ on pose $i_1 \times i_0 = i_1 \in C_1(\Delta_1 \times \Delta_0)$

puis on suppose que $i_1 \times i_{k-1}$ existe bien

on constate que $z = \partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k$ un cycle

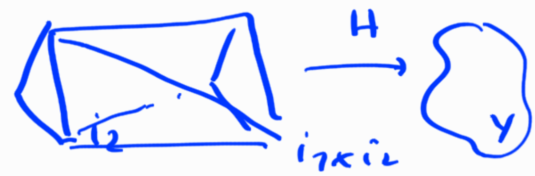
ie $\partial z = 0$, donc définit un élément dans $H_k(\Delta_1 \times \Delta_k)$

On $\Delta_1 \times \Delta_k$ est contractile. donc tout cycle est un bord car $H_k(\Delta_1 \times \Delta_k, \mathbb{Z}) =$ donc $\exists\, y$ tq $\partial y = z$

C'est cet élément y qu'on note $i_1 \times$. fin du lemme.

<u>Conclusion du rappel</u> : $H : X \times [0,1] \to Y$
est une homotopie entre f et g

On définit $K : C_k(X, \mathbb{Z}) \to C_{k+1}(Y, \mathbb{Z})$ par
$K(\sigma) = H_*(i_1 \times i_k)$



on calcule $\partial K(\sigma) + K(\partial \sigma) = \partial H_*(i_1 \times i_k) + H_*(i_1 \times \partial\sigma)$

$\sigma : \Delta_k \to X$ $\qquad = H_*(\partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k) + H_*(i_1 \times \partial \sigma)$

$\Delta_{k+1} \to \Delta_1 \times \Delta_k$ $\qquad = H_*(\partial i_1 \times i_k) - \cancel{H_*(i_1 \times \partial i_k) + H_*(i_1 \times \partial\sigma)}$

$= H_*(\{1\} \times i_k) - H_*(\{0\} \times i_k)$

$= g_*(\sigma) - f_*(\sigma)$

$g_* - f_*$ est homotope à 0 $\Rightarrow$ $g_* = f_*$ en homologie.

$\sigma : \Delta_k \to X$ $\qquad i_1 \times i_k \in C_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$

$H : \Delta_1 \times X \to Y$

$i_1 \times \sigma : \Delta_1 \times \Delta_k \to \Delta_1 \times X \xrightarrow{H} Y$

$K(\sigma) = H_*(i_1 \times \sigma)_*(i_1 \times i_k)$

Avant de faire un autre lemme technique on va remplacer dans h D^n, S^{n-1} par $(\Delta_n, \partial \Delta_n)$
C'est licite car $D^n \simeq \Delta_n$

L'avantage est que $H_*(\Delta_n, \partial\Delta_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par l'élément $i_n : \Delta_n \to \Delta_n$ (identité)

le morphisme d'Hurewicz déf par $f : (\Delta_n, \partial\Delta_n, e_0) \to (X, A, x_0)$

$\to$ $f_*(i_n)$ ie $[f] \in H_n(X, A, \mathbb{Z})$

Notons $C_k^{(n)}(X,A)$ le sous-groupe de $C_k(X,A)$ engendré par les simplexes $\Delta_k \to X$ qui envoient le n-squelette de Δ_k dans A. (modulo $C_k(A)$)

il s'agit bien d'un sous-complexe de $C_k(X,A)$ qui a une homologie notée $H_k^{(n)}(X,A)$

il y a aussi un morphisme $H_k^{(n)}(X,A) \longrightarrow H_k(X,A)$.

<u>Proposition</u> : Si (X,A) est n-connexe alors le morphisme $H_k^{(n)}(X,A) \longrightarrow H_k(X,A)$ est un isomorphisme.

<u>démo</u> : On définit pour tout simplexe $\sigma : \Delta_k \to X$ une application $P(\sigma) : [0,1] \times \Delta_k \to X$ vérifiant

1. $P(\sigma)(0, \cdot) = \sigma$
2. $P(\sigma)(1, \cdot) \in C_k^{(n)}(X,A)$
3. $\sigma \in C_k^{(n)}(X,A)$ alors $P(\sigma)(t, \cdot) = \sigma \quad \forall t \in [0,1]$
4. $P(\sigma) \circ (i_1 \times \partial_k^i) = P(\sigma \circ \partial_k^i)$ où ∂_k^i est la ième face de Δ_k.

compatibilité avec l'application définie sur les faces.

<u>Construction</u> : Si $\sigma \in C_k^{(n)}(X,A)$ alors $P(\sigma)$ est déf par (3)

Pour les autres on construit $P(\sigma)$ par récurrence sur k.

On suppose qu'elle est déjà définie pour tous les simplexes de dim $< k$.

On se donne $\sigma : \Delta_k \to X$

D'après la prop (4), on a déjà construit $P(\sigma)$ sur $\partial \Delta_k$

1er cas : $k \leq n$

$\Delta_k \times \{0\}$

$k = 2$

$P(\sigma)(1, \cdot)$ doit prendre ses valeurs dans A

Or par hypothèse $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ (n-connexité de la paire)

Si on considère $\Delta_k \cup \partial \Delta_k \times [0,1] \longrightarrow X$

simplexe + prisme sur le bord du simplexe

Cela donne $f : (D_k, \partial D_k) \longrightarrow (X, A)$.

D'après le lemme de compression, f est homotope rel. /bord à une application à valeurs dans A.

Cela nous dit qu'on peut trouver $P(\sigma) : [0,1) \times \Delta_k \to X$

tq $P(\sigma)(1, \cdot)$ est à valeurs dans A.

Si $k > n$ on prolonge l'application n'importe comment.

fin de la construction.

On définit $\phi : C_k(X, A) \to C_k^{(n)}(X, A)$

$\sigma \mapsto P(\sigma)(1, \cdot)$

on définit $K : C_k(X, A) \to C_{k+1}(X, A)$

par $K(\sigma) = P(\sigma)(i_1 \times i_k)$

on vérifie bien

$\partial K(\sigma) = \partial P(\sigma)(i_1 \times i_k) = P(\sigma)(\partial i_1 \times i_k - i_1 \times \partial i_k)$

$$= P(\sigma)\left(\partial_1^1 i_1 - \partial_1^0 i_1 - \sum (-1)^j i_1 \times \partial_k^j i_k \right)$$

$$K(\partial\sigma) = \sum (-1)^j K(\partial_k^j \sigma) = \sum (-1)^j P(\partial_k^j \sigma)(i_1 \times i_{k-1})$$

$$\partial K(\sigma) + K(\partial\sigma) = P(\sigma)(\partial_1^1 i_1) - P(\sigma)(\partial_1^0 i_1)$$

$$= \phi(\sigma) - \sigma$$

prouve bien que $H_k^{(n)}(X,A) \to H_k(X,A)$. $\forall k$.

<u>Démo du thm d'Hurewicz</u>.

X, A connexes par arcs $\quad (X,A)$ est $(n-1)$-connexe.

$h : \pi_k'(X,A) \longrightarrow H_k(X,A)$.

$$H_k(X,A) \cong H_k^{(n-1)}(X,A)$$

si $k \leq n-1$ $\quad \sigma \in C_k^{(n-1)}(X,A)$ est une application

$\sigma : \Delta_k \to X$ qui envoie le $(n-1)$ squelette dans A.

donc $\sigma \in C_k(A)$ donc $\sigma = 0$ dans $C_k^{(n-1)}(X,A)$

$\Rightarrow \quad H_k(X,A) = 0 \quad \forall k \leq n-1$.

On veut montrer que $\pi_n'(X,A) \to H_n(X,A)$
est un isomorphisme.

$$H_n(X,A) = H_n^{(n-1)}(X,A)$$

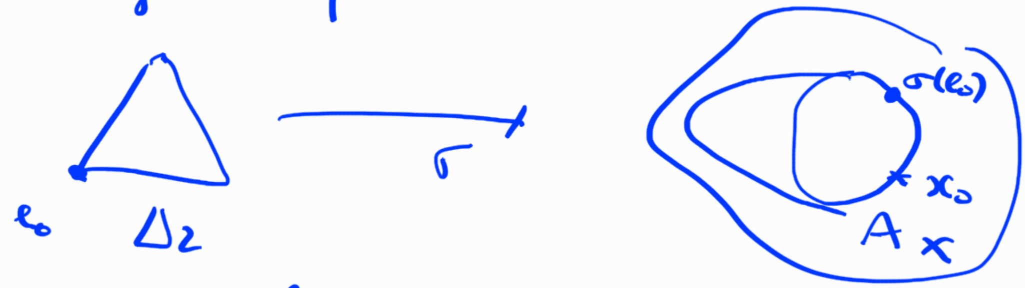
On essaie de construire $\phi : H_n^{(n-1)}(X,A) \longrightarrow \pi_n'(X,A)$
qui réalise l'inverse de h.

complexe $C_*^{(n-1)}(X,A)$: $\quad 0 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n^{(n-1)}(X,A) \leftarrow C_{n+1}^{(n-1)}(X,A)$

un générateur de $C_n^{(n-1)}(X,A)$ est $\sigma : \Delta_n \to X$
$\partial\Delta_n \to A$

c'est presque un élément de $\pi_n(X, A, x_0)$!

il faut régler le point base.



On choisit un lacet reliant x_0 et $\sigma(e_0)$. Cela permet de définir $\phi(\sigma)$.

$\phi(\sigma)$ ne dépend pas de ce choix car ϕ est à valeurs dans $\pi_n'(X, A) = \pi_n(X, A)/_{\gamma \cdot f \sim f}$

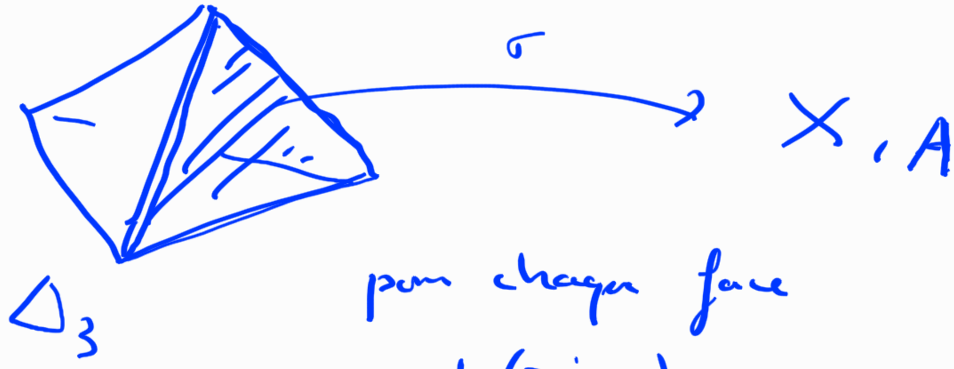
ainsi l'application $\phi : C_n^{(n-1)}(X, A) \to \pi_n'(X, A)$ est bien définie (lemme de h).

il reste à prouver que ϕ est nul sur Im

$\partial : C_{n+1}^{(n-1)}(X, A) \to C_n^{(n-1)}(X, A)$.

soit $\sigma : \Delta_{n+1} \to X$. générateur de $C_{n+1}^{(n-1)}(X, A)$

On veut prouver que $\phi(\partial\sigma) = 0$



pour chaque face

$$\phi(\partial_3^i \sigma) \in \pi_2(X, A)$$

$$\sum (-1)^i \phi(\partial_3^i \sigma) = \sigma|_{\partial\Delta_3}$$

donc est nul dans $\pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(X, A)$

$0 \longrightarrow 0$.

$\phi : H_n^{(n-1)}(X, A) \longrightarrow \pi_n'(X, A)$ bien def et l'inverse de h.

$\Rightarrow$ Bredon Topology & Geometry (hurewicz th.).