2. Homologie à coeffs tordus (obstruction)

def préliminaire : X délaçable avec pt base x_0.

Soit M un groupe abélien muni d'une action de $\pi = \pi_1(X, x_0)$. On définit $H_*(X, M) / H^*(X, M)$

$\tilde{X}$ rev. universel muni d'une action libre de π_1 de sorte que $X = \tilde{X}/\pi$

$$C_*(X, M) = C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \underset{\pi}{\otimes} M$$

complexe des chaînes singulières

M est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module à gauche, $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ est un complexe de $\mathbb{Z}[\pi]$-modules, $\underset{\pi}{\otimes}$ est le produit tensoriel des $\mathbb{Z}[\pi]$-modules.

ie $\quad C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes M \big/ _{\sigma \otimes m \sim \gamma\sigma \otimes \gamma m}$

Exemple ① M est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module trivial

$\gamma . m = m \ \forall \gamma$

$$C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \underset{\pi}{\otimes} M = C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes M \big/ _{\sigma \otimes m \sim \gamma\sigma \otimes m}$$

or $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})_\pi = C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) /_{\sigma \sim \gamma\sigma} = C_*(X, \mathbb{Z})$

donc $C_*(X, M) \simeq C_*(X) \otimes M$. homologie à coeffs non tordus.

② $M = \mathbb{Z}[\pi]$ "représentation régulière à gauche" module sur lui-même par multiplication à gauche.

alors $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}[\pi]) = C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \underset{\pi}{\otimes} \mathbb{Z}[\pi] \overset{\phi}{\simeq} C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$

$$\sigma \otimes \alpha \sim \gamma\sigma \otimes \gamma\alpha \sim \alpha^{-1}\sigma \otimes 1$$

$\sigma \to \tilde{X}$, $\alpha \in \pi$

$\sigma \otimes \alpha \longrightarrow \alpha^{-1}\sigma$ réalise l'isomorphisme ϕ.

En conséquence $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi]) = H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$

③ Si on se donne $H < \pi$ un sous-groupe

on peut considérer $\Pi = \mathbb{Z}[\pi/H]$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module

$$C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}[\pi/H]) = C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \underset{\pi}{\otimes} \mathbb{Z}[\pi/H]$$

$\sigma \otimes \alpha$ où $\sigma : \Delta_n \to \tilde{X}$

où on identifie $\sigma \otimes \alpha$ avec $\alpha^{-1}\sigma$ si $\alpha \in H$

$$= C_*(\tilde{X}/H, \mathbb{Z})$$

Soit $Y \longrightarrow X$ le rev. de groupe H.

$$H_*(X, \mathbb{Z}[\pi/H]) = H_*(Y, \mathbb{Z})$$

manière de calculer l'homologie d'un revêtement.

[Théorie des noeuds $K =$  $\subset \mathbb{R}^3$

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

donc on a un morphisme $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$

On peut prendre $\Pi = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

c'est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module en posant $\gamma \cdot x = t^{\varphi(\gamma)} x$

$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ est le module d'Alexander

permet de définir le polynôme d'Alexander]

⚠ $H^*(X, \mathbb{Z}[\pi]) \neq H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ [support compact]

<u>Exemple</u>: Si M est une variété différentiable compacte sans bord de dim n. $H_n(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si M est or.
$= 0$ sinon.

En général $\exists\, \varphi : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$ défini par $\varphi(\gamma) = 1$ ssi l'orientation de M n'a pas changé le long de γ.

On va noter $\tilde{\mathbb{Z}}$ le groupe $\mathbb{Z}$ vu comme $\mathbb{Z}[\pi]$-module par $\gamma . x = \varphi(\gamma) x$

<u>Exercice</u>: $H_n(M, \tilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}$ le générateur est la "classe fondamentale" tordue.

2.2 La définition générale

Un des problèmes rencontrés est l'importance du point base : $H_*(X, M)$ M est un $\pi_1(X, x_0)$-module. on a besoin de choisir un point base dans X.
Si on a $A \subset X$ $H_*(A, M) \to H_*(X, M)$
il faudrait que $x_0 \in A$?
Il y a une solution qui consiste à déconnecter X et π_0
La solution consiste à remplacer X par un espace B délaçable muni d'un point base b_0. On pose $\pi = \pi_1(B, b_0)$ et M est $\mathbb{Z}[\pi]$-module,

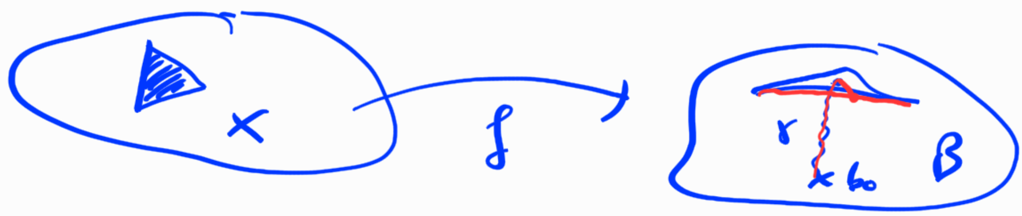
et on se donne $f : X \to B$.

<u>Nouvelle définition</u> : $C_n(X,B)$ est par définition le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les couples $(\sigma,[\gamma])$

où $\sigma : \Delta_n \to X$ et $\gamma : [0,1] \to B$

$\gamma(0) = b_0 \qquad \gamma(1) = f(c_n)$

où c_n est le barycentre de Δ_n. La notation $[\gamma]$ signifie la classe d'homotopie à extrémités fixées, appelé marquage.



$\pi_1(B,b_0) = \pi$

$\circlearrowright M$

"le marquage permet de relever $f(\Delta_n)$ au revêtement universel de B"

$C_n(X,B)$ est le groupe abélien engendré par les simplexes dans X dont on a relevé l'image dans $\tilde{B}$

$\tilde{B}$

$B = S^1$

C'est un complexe : $C_n(X,B) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X,B)$

$$(\sigma,[\gamma]) \longmapsto \sum (-1)^i (\sigma \circ \partial_i, \gamma\gamma_i)$$

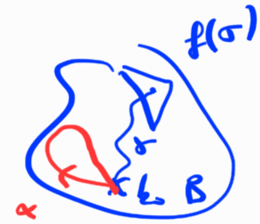
où γ_i est l'image par f d'un chemin qui relie le barycentre de Δ_n au barycentre de sa i-ème face

On a toujours $\partial \circ \partial = 0$.

Quand on a un $\mathbb{Z}[\pi]$-module M, on va poser

$$H_*(X,M) = H_*\left(C_*(X,B) \underset{\pi}{\otimes} M \right)$$

où π agit sur $C_*(X,B)$ par $\alpha\cdot(\sigma,[\gamma]) = (\sigma, \alpha[\gamma])$



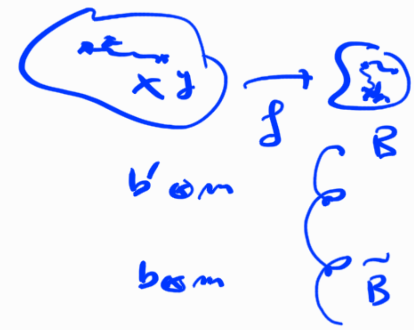
De même $H^*(X,\Pi) = H^*\left(\mathrm{Hom}_\pi(C_*(X,B),\Pi)\right)$

<u>Exercice</u> ① si on pose $X = B$ et $f = \mathrm{id}$, on retrouve la définition précédente.

② $H_0(X,\Pi) = C_0(X,B)\otimes\Pi/\sim$
$= \Pi_\pi = \Pi/f(\alpha)m \sim m$

$H^0(X,\Pi) = \{m \in \Pi \,/\, f(\alpha)m = m \quad \forall \alpha\in\pi_1(X)\}$

Si X est connexe par arcs.



On peut montrer que cette homologie vérifie beaucoup des propriétés de l'homologie standard.

Si $X \xrightarrow{f} B$ $\quad \Pi$ un $\mathbb{Z}[\pi]$-module

Si $A \subset X$ $\quad f|_A : A \to B$ permet de considérer

$C_*(A,B)\otimes_\pi \Pi$ comme sous-complexe de $C_*(X,B)\otimes_\pi \Pi$

on peut considérer le complexe quotient $C_*(X,A,B)\otimes_\pi \Pi$

dont l'homologie est notée $H_*(X,A,\Pi)$.

Par construction, il y a une suite exacte longue associée.

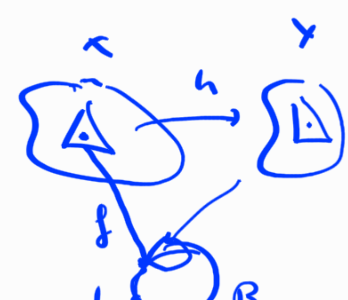
<u>Fonctorialité</u> : Si on a $f: X \to B$ et $g: Y \to B$

alors toute application $h: X \to Y$ induit un

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

morphisme fonctoriel $H_*(X,\Pi) \xrightarrow{h_*} H_*(Y,\Pi)$.

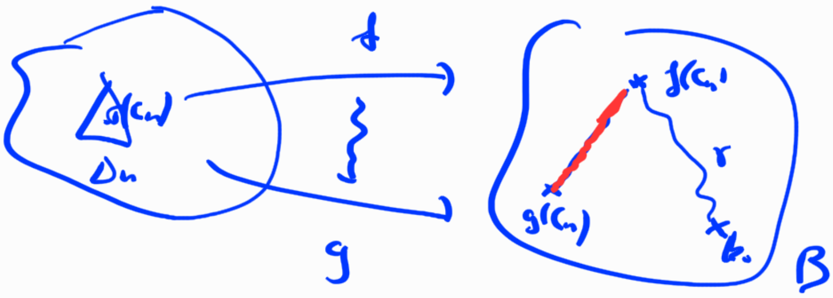
$$(\sigma,[\gamma]) \longmapsto (h\circ\sigma,[\gamma])$$



Heureusement, l'homologie tordue $H_*(X,\Pi)$ ne dépend que de f à homotopie près

__Lemme :__ Si $f, g : X \to B$ reliées par une homotopie $H : X \times [0,1] \to B$, alors

$$C_*(X,B)^{(g)} \longrightarrow C_*(X,B)^{(f)}$$
$$(\sigma, [\gamma]) \longmapsto (\sigma, [\gamma H(\sigma(c_n), \cdot)])$$



est un isomorphisme de complexes de chaîne

__Ref.__ - Hatcher Algebraic topology (local coefficients)
- Homotopy theory (Whitehead)

__Proposition :__
- invariance par homotopie
- excision
- Mayer-Vietoris

ont des versions à coefficients tordus similaires.

$A \subset X \xrightarrow{f} B$

on a $Z \subset A$ tq $\overline{Z} \subset \mathring{A}$

$$C_*(X/Z, A/Z, B) \longrightarrow C_*(X, A, B)$$
$$(\sigma, [\gamma]) \longmapsto (\sigma, [\gamma]).$$
$$\sigma : \Delta_n \to X/Z \qquad \gamma : b_0 \to f(\sigma(c_n))$$

induit un isomorphisme en homologie tordue.

__2.3 Changements de coefficients__

Si on a M et N deux $\mathbb{Z}[\pi]$-modules et $\varphi : M \to N$ un morphisme de $\mathbb{Z}(\pi)$-modules. Alors φ induit une application

$$C_*(X,B) \underset{\pi}{\otimes} M \longrightarrow C_*(X,B) \underset{\pi}{\otimes} N$$
$$(\sigma, [\gamma]) \otimes m \longmapsto (\sigma, [\gamma]) \otimes f(m)$$

induit un morphisme $\varphi_* : H_*(X, M) \to H_*(X, N)$
$(H^*(X, M) \to H^*(X, N))$

Cas particulier de cette observation : si Π a une structure de A-module où A est un anneau qui commute avec l'action de π (on dit que Π est un $\mathbb{Z}[\pi]$-A-bimodule) alors $H_*(X,\Pi)$ hérite d'une structure de A-module.

<u>Deux exemples</u> : • si Π est un k-espace vectoriel alors $H_*(X,\Pi)$ aussi

• $\Pi = \mathbb{Z}[\pi]$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-$\mathbb{Z}[\pi]$-bimodule

donc $H_*(X,\mathbb{Z}[\pi])$ est $\mathbb{Z}[\pi]$-module à droite.

cf def précédente $H_*(X,\mathbb{Z}[\pi]) = H_*(\tilde{X},\mathbb{Z})$

comme π agit sur $\tilde{X}$ on définit $\alpha . x = \alpha_*(x)$

pour $\alpha \in \pi$ et $x \in H_*(\tilde{X},\mathbb{Z})$

<u>Question</u> : y-a-t-il une formule de coefficients universels

[peut on calculer $H_*(X,\Pi)$ à partir de $H_*(X,\mathbb{Z}[\pi])$ et de Π ?

Π : $\mathbb{Z}[\pi]$-module

<u>Réponse</u> il existe un algorithme permettant éventuellement de déterminer $H_*(X,\Pi)$ à partir de $H_*(X,\mathbb{Z}[\pi])$ et de Π

C'est une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^p(H_q(X,\mathbb{Z}[\pi]),\Pi) \Rightarrow H_{p+q}(X,\Pi)$$

on verra ça dans la 3ème partie du cours.

2.4 Calcul de l'homologie à coeffs tordus à l'aide des cellules

important en pratique : pour calculer

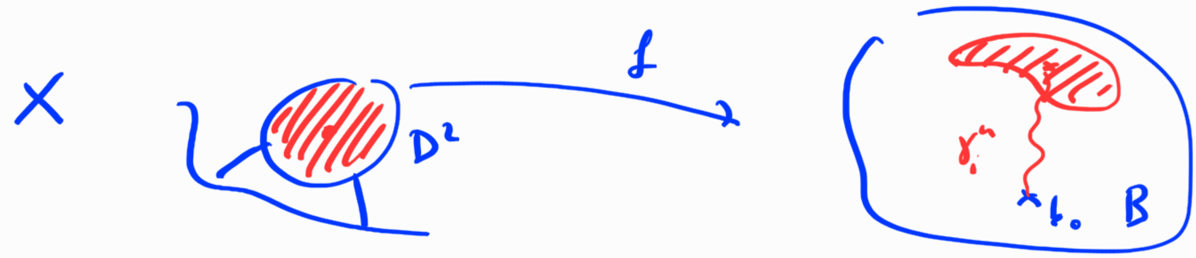
en théorie : pour la théorie de l'obstruction

On se donne un CW-complexe X une application $f : X \to B$

et un système de coefficient Π ($\mathbb{Z}[\pi]$-module). $b_0 \in B$, $\pi = \pi_1(B,b_0)$

On se donne $e_i^n : D^n \to X$ la famille des cellules de X de dim n.

Un marquage de e_i^n est la donnée d'une classe d'homotopie à extrémités fixées d'application $\gamma_i^n : [0,1] \to B$ reliant b_0 à $f(e_i^n(c_n))$ où c_n est le centre de D^n.

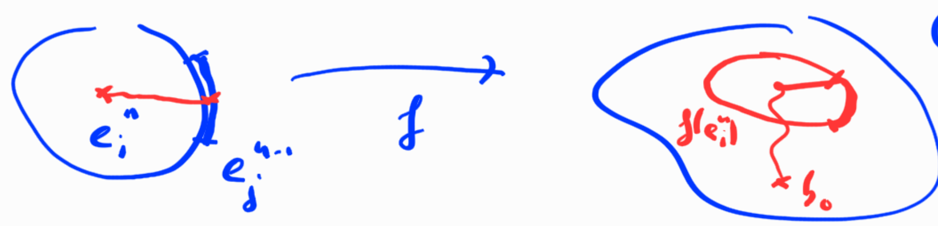


On observe que l'ensemble des marquage d'une cellule e_i^n est un espace homogène sous l'action de π (π agit sur l'ensemble des marquages $\alpha \cdot \gamma_i^n = \alpha\gamma_i^n$ de façon libre et transitive)

On note $C_n^{cell}(X,B)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les cellules marquées de dim n de X.

L'observation précédente montre que $C_n^{cell}(X,B)$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre engendré les cellules de X avec un marquage fixé.

La différentielle $C_n^{cell}(X,B) \longrightarrow C_{n-1}^{cell}(X,B)$ c'est la même que celle définie dans le cadre de l'homologie cellulaire standard en ajoutant le marquage comme ci-dessous



(en prolongeant le marquage de e_i^n avec l'image par f d'un chemin reliant le centre de e_i au centre de e_j^{n-1}).

Ex : c'est bien un complexe ...

Proposition : L'homologie du complexe $C_*^{cell}(X,B) \otimes_\pi M$ est canoniquement isomorphe à $H_*(X,M)$. Idem pour la cohomologie.

démo (à compléter)

On note $X^0, X^1, \dots, X^n$ les squelettes de X de dim n. de sorte que $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$.

On commence par considérer $H_*(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi])$ (homologie singulière)

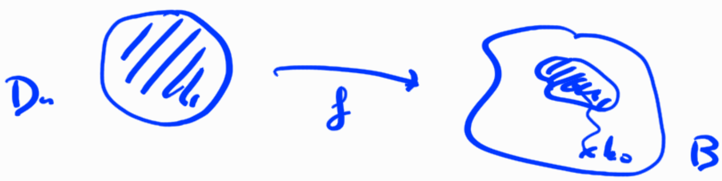
$f: X \to B \qquad \Pi = \mathbb{Z}[\pi]$.

Notons $(e_i^n)_{i\in I_n}$ l'ensemble des cellules de dim n de X

La propriété d'excision dit que

$$H_*(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi]) = H_*\Big(\bigsqcup_{i\in I_n}(D_i^n, \partial D_i^n), \mathbb{Z}[\pi]\Big)$$

$$= \bigoplus_{i\in I_n} H_*(D_i^n, \partial D_i^n, \mathbb{Z}[\pi])$$



$$= \bigoplus_{i\in I_n} \bigoplus_{\gamma_i \text{ marquages de } e_i^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}}{H_*(D_i^n, \partial D_i^n, \mathbb{Z})}$$

or $H_*(D^n, \partial D^n, \mathbb{Z}) = H^{n-*}(D^n, \mathbb{Z}) = H^{n-*}(\cdot, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ pour $* = n$

$= 0$ sinon

$$\boxed{H_k(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi]) = C_n^{cell}(X, B)} \text{ comme } \mathbb{Z}[\pi]\text{-module}$$

si $k = n$ $\qquad \simeq \mathbb{Z}[\pi]^{(I_n)}$

$$\begin{tikzcd}
\partial : C_{n+1}^{cell}(X, B) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & C_n^{cell}(X, B) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n, \mathbb{Z}[\pi]) \arrow[r, "\partial"'] & H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi])
\end{tikzcd}$$

c'est l'application "connection" dans la suite d'homologie relative du triplet $X^{n-1} \subset X^n \subset X^{n+1}$

$$H_{n+1}(X^n, X^{n-1}, \mathbb{Z}[\pi]) \to H_{n+1}(X^{n+1}, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi]) \to \boxed{\begin{array}{c} H_{n+1}(X^{n+1}; X^n; \mathbb{Z}[\pi]) \\ \partial = \downarrow \text{connexion} \\ H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}[\pi]) \end{array}}$$

homologie cellulaire.

fin de l'argument avec suites spectrales