Corrigé de la Feuille de TD 3 de Revêtements et Groupe Fondamental
Groupes et Revêtements

Rappelons la définition de revêtement vue en cours (et dans le poly). Un *revêtement* d'un espace topologique B par (un espace topologique) X est la donnée d'une application continue $p : X \to B$ telle que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage U_b de b (dans B), un espace *discret* F_b *non-vide* et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U_b) \to U_b \times F_b$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times F_b \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_b & \end{tikzcd} \tag{1}$$

commutatif (ici π est la projection sur U_b). Les ouverts de la forme U_b s'appelle des *ouverts trivialisants* du revêtement. Une *section locale* est une application continue $s : V \to E$, où V est un ouvert [1] dans B, telle que $p \circ s = id$. L'ensemble $F_b \cong p^{-1}(\{b\})$ s'appelle la *fibre* de b. On prendra garde que l'homéomorphisme ϕ n'est pas unique en général (alors que F_b est unique à bijection près). Très souvent on fera un abus consistant à ne pas écrire l'indice b dans U_b ou F_b...

Exercice 1. (*Quelques propriétés des revêtements*)
Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrer que

1. La projection p est surjective.
2. Si E est compact (resp. connexe, connexe par arcs), alors B est compact (resp. connexe, connexe par arcs).
3. Si B est séparé, alors E est séparé.
4. Si $A \subset B$ est un sous-espace alors $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement.
5. Si B est connexe et si p a une fibre finie alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.
6. Si B est compact, alors E est compact si et seulement si les fibres de p sont finies.
7. Un revêtement est un homéomorphisme local et réciproquement, si E est séparé et si p est un homéomorphisme local tel que les fibres soient finies et de même cardinal alors p est un revêtement.

Solution 1.

1. La surjectivité provient du fait que, dans la définition donnée en cours, on suppose les fibres *non-vides*. En particulier $p^{-1}(\{b\}) \cong F$ est non-vide. Ceci force aussi l'existence de sections locales. En effet, pour tout $b \in B$, U_b voisinage trivialisant et tout point $f \in F_b$, on peut définir une section $s_f : U_b \to E$ par la formule $s_f(x) = \phi^{-1}((x, f))$ qui vérifie $p \circ s_f = id$ puisque le diagramme (**??**) est commutatif.
2. Le seul point délicat est de montrer que E séparé implique que B est séparé. U_x, U_y deux voisinages trivialisants et $e \in p^{-1}(\{x\})$, $f \in p^{-1}(\{y\})$ deux de leurs antécédents. En particulier $e \neq f$ (puisque $p(e) = x \neq y = p(f)$). Comme E est séparé, il en résulte qu'il existe des voisinages ouverts disjoints V_e, V_f de e et f. Quitte à regarder les restrictions $V_e \cap p^{-1}(U_x)$ et $V_f \cap p^{-1}(U_y)$, on peut supposer que V_e, V_f sont dans $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$. Comme la projection $\pi : U_x \times F_x \to U_x$ est ouverte et que ϕ est un homéomorphisme (donc est ouverte), il suit alors que $p(V_e)$ et $p(V_f)$ sont ouverts. Il reste à voir qu'ils sont disjoints ce qui est trivial si les ouverts

[1] ou un voisinage, c'est à dire une partie d'intérieur non-vide

trivialisants U_x et U_y sont disjoints [2]. Sinon, on a deux trivialisations différentes sur l'intersection $U_x \cap U_y$ (donnée par $\phi_x : p^{-1}(U_x \cap U_y) \to U_x \cap U_y \times F$ et $\phi_y : p^{-1}(U_x \cap U_y) \to U_x \cap U_y \times F$) et comme la fibre F est discrète on peut supposer (quitte à restreindre) que $\phi_x(V_e)$ est inclus dans une seule "assiette" $U_x \times \{a\}$ et que $\phi_y(V_f)$ est inclus dans une seule assiette $U_y \times \{b\}$ avec $b \neq a$ puisque $V_e \neq V_f$. Ceci garantit bien que $p(z) \neq p(z')$ si $z \in V_e$, $z' \in V_f$ et donc que les ouverts $p(V_e)$ et $p(V_f)$ séparent x et y.

La compacité de B découle alors de la surjectivité de p et du fait que l'image d'un compact par une application continue à valeur dans un espaces séparé est un compact. Enfin l'image continue d'un connexe (resp. connexe par arcs) est un connexe (resp. connexe par arcs).

3. Montrons maintenant que B séparé implique aussi que E est séparé. En effet, soit $x \neq y$ dans E. Si $p(x) \neq p(y)$ dans B, il existe des voisinages disjoints U_x, U_y de $p(x)$ et $p(y)$. Alors $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$ sont ouverts (par continuité de p), clairement disjoints et séparent donc x et y. Si $p(x) = p(y)$, on considère un ouvert trivialisant U de $p(x)$. Il existe alors $e \neq f$ dans $F = p^{-1}(\{p(x)\})$ tel que $x = \phi^{-1}(x, e)$ et $y = \phi^{-1}(x, f)$. Mais alors $\phi^{-1}(U \times \{e\})$ et $\phi^{-1}(U \times \{f\})$ sont des ouverts [3] disjoints qui séparent x et y.

4. C'est facile en remarquant que si U est un ouvert trivialisant, alors $U \cap A$ est un ouvert de A trivialisant puisque $p^{-1}(U \cap A) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A)$.

5. on considère l'application $c : B \to \mathbb{N}$ qui à un point b associe le cardinal $c(b)$ de la fibre $p^{-1}(b)$. Par définition d'un revêtement, cette application est localement constante (donc continue). En effet, si U_b est un ouvert trivialisant contenant b, c'est aussi un ouvert trivialisant pour tout point $x \in U_b$ et il suit que toutes les fibres $p^{-1}(\{x\})$ sont isomorphes à F_b dans U_b ; en particulier, elles ont le même cardinal. Comme $\mathbb{N}$ est discret et B connexe, le résultat découle.

6. Si E est compact, la pré-image par p de tout point $b \in B$ est fermée [4] dans E donc compact. Comme $p^{-1}(\{b\})$ est discret, il suit qu'il est fini.

   Réciproquement, supposons que les fibres sont finies. Comme B est compact, il est séparé et donc E aussi par la question 3). Par compacité de B, il existe un recouvrement fini de B par des voisinages trivialisants, que l'on peut supposer compact [5] quitte à les restreindre. On note $K_i, \phi_i : p^{-1}(K_i) \to K_i \times F_i$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) un telle famille finie. Comme les fibres F_i sont finies (et discrètes), elles sont compactes et la réunion disjointe $\coprod_{i=1}^m K_i \times F_i$ l'est aussi. Soit alors $q : \coprod_{i=1}^m K_i \times F_i \to E$ l'application définie par $q(x, f) = \phi_i^{-1}(x, f)$ si $(x, f) \in K_i \times F_i$. Il est clair que q est continue et surjective. Comme E est séparé, on en déduit alors qu'il est compact.

7. Qu'un revêtement soit un homéomorphisme local est immédiat d'après la définition. Il suffit de considérer un ouvert trivialisant U_b et la restriction de p à $\phi^{-1}(U_b \times \{f\})$ pour le choix de n'importe quel élément $f \in F_b$. On laisse les détails au lecteur.

   Réciproquement, supposons E séparé et soit n le cardinal des fibres de p. En particulier, on peut identifier $p^{-1}(\{b\})$ avec l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ pour tout $b \in B$. Par énoncé, pour tout $b \in B$ et $e \in p^{-1}(\{b\})$, il existe des voisinages $V_e \subset E$, $U_e \subset B$ de e, b tel que la restriction de p à V_e soit un homéomorphisme $p_{|V_e} : V_e \to U_e$ de V_e sur U_e. On note $e_1, \dots, e_n$ les points de la fibre de b. Comme E est séparé, quitte à restreindre (en prenant les intersections avec des voisinages qui séparent les e_i), on peut supposer les V_{e_i} deux à deux disjoints. Comme une intersection finie d'ouvert est ouverte, $U := \bigcap_{i=1}^n U_{e_i}$ est un ouvert et (la restriction de) p est un homéomorphisme de $V_i := V_{e_i} \cap p^{-1}(U)$ sur U pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit $\psi : U \times \{1, \dots, n\} \to p^{-1}(U)$ l'application induite par les homéomorphismes ${p_{|V_i}}^{-1} : U \times \{i\} \cong U \to V_i$. Par construction cette application est injective (car les V_i sont 2 à 2 disjoints) et un homéomorphisme sur son image (qui est $\coprod V_i$). De plus $p \circ \psi$ coincide avec la projection $U \times \{1, \dots, n\} \to U$. Il reste à voir que

---

2. auquel cas on pouvait conclure tout de suite bien sur...
3. on utilise encore que F est discret
4. car B compact implique que les points sont fermés, comme pour tout espace séparé d'ailleurs
5. on rappelle qu'un espace compact est lcoalement compact, donc tout voisinage contient un voisinage compact. Cf. le cours de topologie générale, ce n'est pas complétement trivial !

ψ est surjective pour conclure que c'est un homéomorphisme et donc que $p : E \to B$ est un revêtement. Mais pour tout $y \in U$, $p^{-1}(\{y\})$ est de cardinal n et $\psi(\{y\} \times \{1, \ldots, n\}) \subset p^{-1}(\{y\})$ fournit n éléments distincts. D'où la surjectivité.

Exercice 2. (**Revêtements sur** $\mathbb{C}$)

1. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Est-il trivial ?
2. Montrer que $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Est-ce un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
3. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $F \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de ses valeurs critiques ($F = \{P(w), P'(w) = 0\}$). Montrer que $P|_{\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.
4. Soit $C_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{tels que } z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\}$ et $P_n = \{X \subset \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathrm{Card}(X) = n\}$. Montrer que l'application $\phi : C_n \to P_n$ définie par $\phi(z_1, \ldots, z_n) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ est un revêtement.

Solution 2.

1. Rappelons que $\exp(x) = \exp(y)$ si et seulement si $x = y + 2i\pi n$. Soit $b \in \mathbb{C}^*$. On choisit une boule (donc connexe) ouverte U contenant b et incluse dans $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite. On a alors une détermination continue Log du logarithme sur cet ouvert. Et de plus (voir la feuille de TD 1), deux déterminations diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$; en particulier. Il suit que l'on a un homéomorphisme $\psi : U \times \mathbb{Z} \to p^{-1}(U)$ donnée par $\psi(u, n) = Log(u) + 2in\pi$. L'application ψ est clairement continue et injective (puisque $u \mapsto Log(u)$ l'est). De plus, elle est surjective par le rappel ci-dessus. Enfin elle a un inverse évident donné par $v \mapsto \left(\exp(v), \frac{1}{2i\pi}\left(v - Log(\exp(v))\right)\right)$. Cette dernière application est bien continue puisque le logarithme l'est. On a bien exhibé un ouvert trivialisant pour tout $b \in \mathbb{C}^*$ et, par conséquent, l'exponentielle est un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.

   Ce revêtement n'est pas trivial, sinon il existerait une section globale de l'exponentielle, donc une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.
2. Le raisonement est identique au précédent. En choisissant une boule connexe où une détermination du logarithme est possible, on peut se ramener à une détermination de la racine carrée. Deux telles déterminations ne peuvent différer que par leur signe, voir la feuille de TD 1, exercice 2. On prouve de même que $z \mapsto p(z) = z^2$ est un revêtement (non-trivial) à 2 feuillets de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$. Ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. En effet, sinon il existerait un voisinage U de 0 tel que $p^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times F$ avec F discret. Mais pour tout point $z \neq 0$ différent de 0, $F \cong p^{-1}(\{z\})$ est de cardinal 2. En revanche $p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ est de cardinal 1, donc F doit aussi être de cardinal ce qui est absurde !
3. Par hypothèse et le théorème d'inversion locale, $P_{|\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)}$ est un homéomorphisme local. De plus, ses fibres sont finies (de cardinal le degré de P, puisque il n'y a pas de racines multiples sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$). Enfin $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$ est le complémentaire d'un nombre fini de points dans $\mathbb{C}$, donc est connexe. Par conséquent, les questions 5 et 7 de l'exercice 1 assure que $P|_{\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.
4. L'ensemble P_n est le quotient de C_n par l'action du groupe symétrique Σ_n (c'est à dire le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments) donnée par $\sigma.(z_1, \ldots, z_n) = \left(z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}\right)$; qui est une action à gauche. L'action de Σ_n sur C_n est libre car les z_i sont tous distincts pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C_n$. L'action est trivialement propre puisque Σ^n est fini. Enfin, C_n est localement compact car c'est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il suit que le quotient $C_n \to C_n/\Sigma_n \cong P_n$ est un revêtement à $n!$ feuilles.

Exercice 3. *(Groupes et revêtements)*

1. Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique connexe G. On suppose que H est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans le centre.
2. Soit G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de l'identité. Déterminer les quotients topologiques G/G_0 pour

- $G = GL(n, \mathbb{R})$
- $G = \{f \in O_3(\mathbb{R}),\ f(\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}) \subset \mathbb{Z} \times \{(0,0)\}\}$
- $G = O(q)$ où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

3. Soit H un sous-groupe discret de G. Montrer que la projection canonique $G \to G\backslash H$ est un revêtement.

4. Montrer qu'il existe un groupe simplement connexe G qui est un revêtement du tore $S^1 \times S^1$.

5. *(Partiel 2009)* Montrer que le tore n'est pas contractile.
Indication : on considérera l'inclusion $i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $i([x]) = [x, 0]$ et la projection $p : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $p([x, y]) = [x]$.

Solution 3. 1. Soit $h \in H$. L'application $g \mapsto ghg^{-1}$ est continue, à valeur dans H car H est distingué. Comme G connexe, GhG^{-1} est un connexe de H qui est discret, donc un singleton. Or pour $g = 1$, $1h1^{-1} = h$, donc ce singleton c'est $\{h\}$. Il suit que pour tout $g \in G$, $ghg^{-1} = h$ et donc h est central. Conlusion : H est inclus dans le centre de G.

2. Rappelons (voir la feuille de TD 1) que G_0 est distingué, en particulier G/G_0 est un groupe.
   - Le déterminant det : $GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue et surjectif. Comme $\mathbb{R}^*$ a 2 composantes connexes, $GL(n, \mathbb{R})$ en a au moins 2 aussi. Pour montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ n'a que 2 composantes connexes, il suffit de voir que $GL(n, \mathbb{R})_+ = \{M,\ \det(M) > 0\}$ est connexe. En effet, $GL(n, \mathbb{R}) \setminus GL(n, \mathbb{R})_+$ est homéomorphe à $GL(n, \mathbb{R})_+$ via la multiplication $GL(n, \mathbb{R})_+ \ni H \mapsto M \cdot H \in GL(n, \mathbb{R}) \setminus GL(n, \mathbb{R})_+$ donnée par toute matrice de déterminant négatif M. La connexité (par arcs) de $GL(n, \mathbb{R})_+$ peut se déduire du fait que $GL(n, \mathbb{R})_+$ est engendré par les transvections et les matrices diagonales (dont le déterminant est strictement positif). On peut ramener toutes ces matrices à l'identité par un chemin continu. D'où $GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})_+ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   - Rappelons que les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée. Il suit alors de $f(\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}) \subset \mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$ que si $f \in G$, alors $f(1,0,0) = \pm 1$. L'application $G \to \{\pm 1\}$ donnée par $f \mapsto f(1,0,0)$ est continue, surjective (c'est facile à vérifier). On a donc au moins 2 composantes connexes. Soit $G_+ = \{f \in G,\ f(1,0,0) = 1\}$; clairement id $\in G_+$. Une matrice de G_+ s'écrit sous la forme d'un bloc $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ où $A \in O_2(\mathbb{R})$, et toute matrice de cette forme est dans G_+ donc G_+ est homéomorphe à $O(2)$. Il suit que G est homéomorphe au produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times O(2)$ a 4 composantes connexes et $G_0 \cong SO(2)$. Finalement $G/G_0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   - Si $M \in O(q)$, alors ${}^tMI_{2,1}M = I_{2,1}$ où $I_{2,1}$ est la matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Il suit en prenant le déterminant que pour tout $g \in G$, $\det(g) = \pm 1$. On note $SO(q) = O(q) \cap SL_3(\mathbb{R})$. Il est clair que $-\mathrm{id}$ est dans $O(q) \backslash SO(q)$. Donc il y au moins 2 composantes connexes dans $O(q)$. De plus, comme $SO(q) \cong O(q) \setminus SO(q)$ (encore par multiplication par une matrice de $O(q) \setminus SO(q)$), il suffit de déterminer les composantes connexes de $SO(q)$. Les éléments de $SO(q)$ préservent l'hyperboloïde à 2 nappes $S = \{(x, y, z),\ q(x, y, z) = -1\}$ par définition. Notons que $(0, 0, 1) \in S$, donc pour tout $g \in SO(q)$, $q(g(0, 0, 1)) = -1$ ce qui force que $g(0, 0, 1) = (x_g, y_g, z_g)$ a une composante z_g non-nulle. L'application $g \mapsto z_g$ est continue puisque la composition d'une application linéaire avec un vecteur est continue. On note $SO(q)_+ = \{g \in SO(q),\ z_g > 0\}$. La matrice bloc $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est dans $SO(q) \setminus SO(q)_+$. On en déduit que $SO(q)$ a au moins 2 composantes connexes ; de plus $SO(q) \cong SO(q) \setminus SO(q)_+$. Montrons que $SO(q)_+$ est connexe (par arcs). Par définition, les rotations d'axe $(0, 0, 1)$ sont dans $SO(q)_+$. Soit $g \in SO(q)_+$; on note encore $g(0, 0, 1) = (x_g, y_g, z_g)$. Quitte à composer g par une rotation d'axe $(0, 0, 1)$ peut supposer que $x_g = 0$. Il suit que $z_g^2 - y_g^2 = 1$ et donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_g = \cosh(t_0)$ et $y_g = \sinh(t_0)$ (cosh et sinh sont le cosinus et le sinus hyperboliques). Par ailleurs quel que soit

$t \in \mathbb{R}$, la matrice $A_t := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix}$ est dans $SO(q)_+$, et de plus $A_t \cdot A_s = A_{t+s}$. Il vient, en composant g par A_{-t_0} que l'on peut ramèner g à une matrice de $SO(q)_+$ satisfaisant $g(0,0,1) = (0,0,1)$ en multipliant g par des rotations et "rotations hyperboliques" c'est à dire des matrices de la forme A_t. Or les rotations peuvent être ramenées après un chemin continu de rotations à l'identité et de même pour les matrices de la forme A_t (il suffit de considérer l'application $(u, A_t) \mapsto A_{ut}$). Donc il suffit de montrer que les matrices de $SO(q)_+$ satisfaisant $g(0,0,1) = (0,0,1)$ sont connexes. Or on vérifie sans mal que ces matrices sont préciséments les roations d'axe $(0,0,1)$, donc forment un espace homéomorphe à $SO(2)$; en particulier connexe. Finalement on a montré qu'il y a 4 composantes connexes (homéomorphes entre elles) et que $O(q)_0 = SO(q)_+$. Enfin on a une suite exacte de groupes données par $SO(q) \hookrightarrow O(q) \overset{\det}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est scindée (car le sous-ensemble $\{\pm \mathrm{id}\}$ est un sous-groupe de $O(q)$). On en déduit que $O(q)/O(q)_0 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

3. Par hypothèse, H est un sous-groupe discret, donc l'unité est isolée dans H. D'où il existe U_e un voisinage de l'identité e dans G tel que $U_e \cap H = \{e\}$. D'après un théorème du cours, $G \to G/H$ est un revêtement.
4. On considère l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$. C'est un revêtement car $\mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ et on peut utiliser la question précédente pour montrer que c'est un revêtement (qui n'est autre que le produit d'exponentielles bien-sûr). De plus $\mathbb{R}^2$ est contractile, donc simplement connexe.
5. Soit $i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'inclusion du tore. On note $p : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'application donnée par $p([x,y]) = [x]$. On vérifie que p et i sont bien définies et continues (en effet, l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée par $(x,y) \mapsto [x]$ est continue et constante sur les orbites de $\mathbb{Z}^2$, donc définit l'application continue p ; on procède de même pour i). Enfin $p \circ i = \mathrm{id}$. Donc l'application $p \circ i$ n'est pas homotope à une application constante. Si le tore était contractile, il existerait une homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ vérifiant $H(0,-) = \mathrm{id}$ et $H(1,-)$ est constante. Alors l'application composée $K : [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $K(t,[x]) = p(H(t, i[x]))$ est continue (par composition d'applications continues) et vérifie $K(0,-) = \mathrm{id}$ et $K(1,-)$ est constante. Ceci est absurde puisque le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas simplement connexe. Par conséquent le tore ne l'est pas non plus, a fortiori n'est pas contractile non-plus.

Exercice 4. *(Bouteille de Klein)* On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x,y) \sim (x+1,y)$ et $(x,y) \sim (-x,y+1)$ et on note K le quotient.

1. Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe de son groupe d'isométries.
2. Montrer que K est compact et connexe et que la projection canonique est un revêtement.
3. Construire un revêtement à deux feuillets : $S^1 \times S^1 \to K$
4. Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$ feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius.

Solution 4. 1. On note t, la translation $t(x,y) = (x+1,y)$ de vecteur horizontal et r, la symétrie-glissée $r(x,y) = (-x,y+1)$ donnée par la composition d'une symétrie d'axe vertical et d'une translation verticale. Il est clair que r,t sont des isométries affines. On note $G = \langle t,h \rangle$ le sous-groupe des isométries engendré par r,t. On remarque que $trt(x,y) = (-x,y+1)$, d'où la relation $trt = r$. De cette relation on déduit que tout élément de G peut s'écrire sous la forme $r^n t^m$. De plus, $r^n t^m(x,y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y+n)$, ce qui prouve facilement que l'écriture $r^n t^m$ est unique. Par conséquent, le groupe G est le groupe $G = \{r^n t^m, n,m \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication $r^n t^m \cdot r^p t^q = r^{n+p} t^{q+(-1)^p m}$ (comme on le vérifie sans peine). Soit K un compact ; alors il existe un carré $[-q,q]^2$ qui contient K. On déduit de l'écriture $r^n t^m(x,y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y+n)$, que si $|n|$ ou $|m|$ sont plus grand que $4q$, $r^n t^m(K) \cap K = \emptyset$. Par conséquent, G agit proprement sur $\mathbb{R}^2$. Il suit aussi que si deux éléments (necéssairement inclus dans un compact) sont dans la même classe d'équivalence, ils se déduisent l'un de l'autre par une suite finie de relations d'équivalence $(x,y) \sim (x+1,y) = t(x,y)$ et $(x,y) \sim (-x,y+1) = r(x,y)$. On a donc bien que K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par G qui est un sous-groupe du groupe des isométries.

2. On a déjà vu que G agit proprement sur l'espace localement compact $\mathbb{R}^2$. L'écriture $r^n t^m(x,y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y+n)$ assure qu'il agit aussi librement ; donc le quotient $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G \cong K$ est un revêtement. Comme $\mathbb{R}^2$ est séparé il suit de la preuve de la question 2 de l'exercice 1 (ou du cours) que K est séparé. On voit facilement (puisque toute orbite a au moins un représentant dans le carré unité) que K est aussi le quotient de $[0,1]^2$ par la relation $t(0,y) \cong (1,y)$ et $r(x,0) \cong (1-x,1)$. Comme $[0,1]^2$ est compact et connexe (par arcs) et K séparé, on en déduit que K est aussi compact et connexe (par arcs).
3. Le sous-groupe $< t, r^2 >$ de G induit un revêtement de K de la forme $\mathbb{R}^2/ < t, r^2 > \to \mathbb{R}^2/G \cong K$. Or $r^2(x,y) = (x, y+2)$ est une translation. Il suit que $\mathbb{R}^2/ < t, r^2 > \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ est un tore. Le revêtement a $[G : \langle t, r^2 \rangle] = 2$ feuillets (d'après le cours).
4. On considère le sous-groupe $\langle r \rangle$ de G. Alors, le quotient $\mathbb{R}^2/\langle r \rangle$ est homéomorphe au ruban de Möbius. La fibre de $[0,0]$ est le sous-groupe $\mathbb{Z} \oplus \{0\} \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Exercice 5. *(Quaternions, rotations et revêtements)*

1. *Généralités sur les quaternions :*
   Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. On note
   $$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que
   – $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$ de base $1, i, j, k$ doublé d'une sous-algèbre.
   – Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
   – L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de H^* qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$ et S^3.
   – $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.
2. *Topologie de SO(3) :* Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x,y,z) = xi + yj + zk$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs.
   Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur, montrer que quq^{-1} est un quaternion pur. Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.
3. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in SO(3)$. En déduire deux applications
   $$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(3)$$
   Montrer que la première est un morphisme de groupe et un revêtement double et que la deuxième est un homéomorphisme.
4. *Topologie de SO(4) :* Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$. En déduire un morphisme de groupe de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$. Montrer que c'est un revêtement double.

Solution 5. On notera 1 la matrice identité de $M_2(\mathbb{C})$.

1. Il est clair que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$ et que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On remarque aussi que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ et $ki = j = -ik$. Il suit que $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$. Enfin, les matrices diagonales $\lambda 1$ commutent avec tout élément de $M_2(\mathbb{C})$ en particulier avec ceux de $\mathbb{H}$. Comme $ij = -ji$, $ik = -ki$, on déduit d'un calcul aisé que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\,1$ est précisément le centre de $\mathbb{H}$.

En revenant à l'écriture matricielle, on voit sans peine que $q\overline{q} = |a|^2+|b|^2 = t^2+x^2+y^2+z^2 = |q|^2$ si $q = t + xi + yj + zk$ et $q\overline{q} > 0$ si $q \neq 0$. Donc $|q|$ s'identifie à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$ via l'isomorphisme $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}\langle 1, i, j, k\rangle$. On en déduit que tout élément q a un inverse $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$. En particulier, $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif (on dit aussi algèbre à divisions). Il est immédiat que $\overline{q} = t - xi - yj - zk$.

On peut aussi remarquer que si $q = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$, alors $\overline{q}$ est la matrice transposée $\overline{q} = {}^t\overline{\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}}$. On en déduit facilement que $|q\,q'| = |q|\,|q'|$. Il suit que la sphère unitée de $\mathbb{H}$ pour la norme $q \mapsto |q|$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$. Par définition il s'agit aussi de S^3 puisque $|q| = 1 \Leftrightarrow t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. L'écriture matricielle l'identifie aussi à $SU(2)$ (c'est à dire les matrices complexes M de déterminant 1 et vérifiant ${}^t\overline{M}\,M = \mathrm{id}$).

2. Rappelons que l'on a identifié $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{R}^4$ muni de la norme euclidienne. En particulier l'orthogonal (pour la norme $q \mapsto |q|$) de $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\,1$ est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$, qui est précisément l'ensemble des quaternions purs. En particulier $|quq^{-1}| = |u|$ et donc l'application $\mathrm{Ad}_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ définie par $\mathrm{Ad}_q(u) = quq^{-1}$ est une isométrie pour la norme (euclidienne) $u \mapsto |u|$, et de plus $\mathrm{Ad}_q(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Ad}_q(\mathbb{R}^\perp) \subset \mathbb{R}^\perp = Q(\mathbb{R}^3)$ les quaternions purs. Par conséquent, l'image d'un quaternion pur par Ad_q est un quaternion pur. Remarquons aussi que si u est un quaternion pur alors $\overline{u} = -u$ et donc $u^2 = -|u|^2$.

3. Comme $\mathbb{R}$ est le centre de $\mathbb{H}$, il est immédiat que $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question 2 que Ad_q est une isométrie. De plus Q identifie les quaternions purs avec $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne. Il suit que ϕ_q est aussi une isométrie de $\mathbb{R}^3$, donc un élément de $O(3)$. Par ailleurs, l'application $u \mapsto \phi_q$ des quaternions purs dans $O(3)$ est continue (puisque la multiplication dans $\mathbb{H}$ est continue), donc son image est connexe (car les quaternions purs forment un sous-espace vectoriel, donc un connexe) dans $O(3)$. Comme $\phi_1(i) = \mathrm{id}$, par connexité, il suit que $\phi_q \in SO(3)$ pour tout $q \in \mathbb{H}^*$.

On a donc obtenu une application ϕ de $SU(2)$ (identifié à la sphère unité de $\mathbb{H}$) dans $SO(3)$. Montrons que ϕ est surjective. Il suffit pour cela de montrer que son image contient tous les renversements, puisque ces derniers engendrent $SO(3)$. Un renversement est complétement déterminé par son axe. Soit alors $p \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul. On identifie p et $Q(p)$. Alors $\phi_p(p) = p$, donc ϕ_p est une isométrie positive qui à une droite fixe, c'est donc une rotation d'axe la droite engendrée par p. Il reste à déterminer son angle. Mais $\phi_p \circ \phi_p = \phi_{p^2} = \phi_{-|p|^2} = \phi_{-1} = \mathrm{id}$ car $p^2 = -|p|^2$ puisque p est un quaternion pur. Donc ϕ_p est d'angle 0 ou π. En prenant un quaternion pur q tel que $pq \neq qp$, on voit que ϕ_p n'est pas l'identité. C'est donc le renversement d'axe engendré par p (c'est à dire la rotation d'axe $\mathbb{R}p$ et dangle π). On a montré que $\phi : Q(\mathbb{R}) \to SO(3)$ est surjective et qu'il en est de même de sa restriction $\phi : SU(2) \to SO(3)$.

Il est immédiat que $\phi_q \circ \phi_{q'} = \phi_{qq'}$, donc $\phi : SU(2) \to SO(3)$ est un morphisme de groupe. Comme le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$, son noyau est réduit à $\{\pm 1\}$, qui est un sous-groupe discret de $SU(2)$. Il suit de l'exercice 3 (ou du cours...) que $\phi : SU(2) \to SO(3)$ est un revêtement à 2 feuillets et que $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm 1\} \cong S^3/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^3$ puisque $SU(2) \cong S^3$ d'après la question 1.

Remarque : le revêtement $\phi : SU(2) \to SO(3)$ n'est pas trivial car il n'existe pas de section (autrement dit la suite exacte $\{\pm 1\} \to SU(2) \to SO(3)$ n'est pas scindée). En effet sinon, il existerait $s : SO(3) \to SU(2)$ tel que pour tout $r \in SO(3)$, $\phi_{s(r)} = r$. Soit p un quaternion pur de $SU(2) \cong S^3$, alors $s(\phi_p) = \pm p$ et donc $(s(\phi_p))^2 = p^2 = -1$ car p est un quaternion pur. Mais ϕ_p est le renversement d'axe $\mathbb{R}p$ (comme on l'a démontré ci-dessus), donc $(\phi_p)^2 = \mathrm{id}$ et donc, comme s est un morphisme de groupes, on a $-1 = (s(\phi_p))^2 = s((\phi_p)^2) = s_{\mathrm{id}} = 1$ ce qui est absurde !

Remarque : Comme S^3 est simplement connexe (voir la feuille de TD 4 ou le cours), on a aussi obtenu que le groupe fondamental de $SO(3)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. On remarque que si q_1 et q_2 sont dans $S^3 \cong SU(2)$, alors $|\phi_{q_1,q_2}(u)| = |u|$, donc ϕ_{q_1,q_2} définit bien une application continue $SU(2) \times SU(2) \to O(4)$, qui est de plus un morphisme de groupes. On montre encore une fois par connexité qu'elle est en fait à valeur dans $SO(4)$. La surjectivité se démontre aussi comme dans la question 3. Il reste à déterminer le noyau de $\phi : SU(2) \times SU(2) \twoheadrightarrow O(4)$. Si $\phi_{q_1,q_2} = \mathrm{id}$, alors $\phi_{q_1,q_2}(q_1) = q_1$ ce qui montre que $q_2 = q_1$. On a donc $\phi_{q_1,q_1} = \mathrm{id}$ ce qui montre que q_1 est central donc, comme $q_1 \in SU(2)$, $q_1 = \{\pm 1\}$. La réciproque est immédiate. D'où $\ker(\phi) = \{\pm(1,1)\}$ est un sous-groupe discret de $SU(2) \times SU(2)$, il suit que $\phi : SU(2) \times SU(2) \twoheadrightarrow SO(4)$ est un revêtement double.

   Remarque : Ce revêtement n'est pas trivial non-plus.