Corrigé de la Feuille de TD 4 de Revêtements et Groupe Fondamental
Groupes et Revêtements

Exercice 1. (**Homotopie libre**)
Soit X un espace topologique connexe par arcs non vide et x un point de X. On appelle lacet basé en x une application continue $f : [0,1] \to X$ vérifiant $f(0) = f(1) = x$ et lacet libre une application f vérifiant seulement $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0, f_1 sont dits homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $H(t,0) = f_0(t)$, $H(t,1) = f_1(t)$ et $H(0,t) = H(1,t)$.

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X,x)$.

Solution 1. Notons $\mathcal{C}(X) = \{f : [0,1] \to X, f(0) = f(1) = x\}$ et $\mathcal{L}(x) = \{f : [0,1] \to X, f(0) = f(1)\}$. On note $\Phi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{L}(X)$ l'application identité. Si $f, g \in \mathcal{C}(X)$ sont homotopes, la même homotopie montre que $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ sont homotopes. Ainsi Φ passe au quotient en une application $\Phi : \pi_1(X,x) \to \mathcal{L}(X)/\sim$. Considérons deux lacets conjugués dans $\pi_1(X,x)$ c'est-à-dire de la forme $\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}$ avec $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X)$. On pose alors

- $H(t,s) = \alpha(3t+s)$ si $s \geq 1 - 3t$
- $H(t,s) = \beta(\frac{s+3t-1}{2s+1})$
- $H(t,s) = \alpha(3 - 3t + s)$

Cette formule correspond à considérer la famille de chemins $\alpha_s\beta\alpha_s^{-1}$ où α_s est le chemin α parcouru de s à 1. Ceci prouve que l'application $\Phi : \pi_1(X,x)/\sim \to \mathcal{L}(X)$ est bien définie.

Réciproquement, on définit $\Psi : \mathcal{L}(X) \to \pi_1(X,x)/\sim$ de la façon suivante. Prenons $f \in \mathcal{L}(X)$. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = f(0) = f(1)$. On pose alors $\Psi(f) = \gamma f \gamma^{-1}$ ce qui signifie

- $\Psi(f)(t) = \gamma(3t)$ si $t \leq 1/3$
- $\Psi(f)(t) = f(3t)$ si $1/3 \leq t \leq 2/3$
- $\Psi(f)(t) = \gamma(3 - 3t)$ si $t \geq 2/3$.

On remarque que la classe de ce chemin ne dépend pas du choix de γ. En effet si δ est un autre chemin, $\delta f \delta^{-1} \sim \delta\gamma^{-1}\gamma f \gamma^{-1}\gamma\delta^{-1} = \alpha\Psi(f)\alpha^{-1}$ avec $\alpha = \delta\gamma^{-1}$. Il nous reste à montrer que si f_0 et f_1 sont librement homotopes, $\Psi(f_0)$ et $\Psi(f_1)$ sont homotopes. Pour cela on se donne une homotopie libre $H : [0,1]^2 \to X$ et un arc γ reliant x à $H(0,0)$. Pour tout s, on considère le chemin γ_s construit en concaténant

- $\gamma(t)$ pour t entre 0 et 1
- $H(0,u)$ pour u entre 0 et s
- $H(t,s)$ pour t entre 0 et 1
- $H(0,u)$ pour u entre s et 0
- $\gamma(t)$ pour t de 1 à 0.

On montre facilement que la famille de chemins γ_s est une homotopie, ainsi Ψ est bien définie et il est clair que c'est l'inverse de Φ.

Exercice 2. (**relèvement**)
Soit S^3 la sphère vue comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ formé des couples (u,v) vérifiant $|u|^2 + |v|^2 = 1$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. L'application $\mathbb{Z}/3 \times S^3 \to S^3$ définie par $[m].(u,v) = (j^m u, j^m v)$ définit une action continue du groupe $\mathbb{Z}/3$ sur l'espace topologique S^3. On note X le quotient de cette action.

1. Quel est le groupe fondamental de X ?

2. On considère le revêtement $p : S^3 \to P^3(\mathbb{R})$ où $P^3(\mathbb{R})$ est l'espace projectif réel, obtenu comme quotient de S^3 par l'identification $x \sim -x$.
   Montrer que toute application $f : X \to P^3(\mathbb{R})$ se relève à S^3 c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{f} : X \to S^3$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$.

Solution 2. 1. Montrons plus généralement que tout groupe fini G agissant sur X séparé de façon continue (pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est continue) et libre (pour tous $g \in G$ et $x \in X$ $gx = x$ implique que $g = 1$) est proprement discontinue.

En effet, soit $x \in X$. Pour tout $g \neq e$, $gx \neq x$ et par séparation, il existe U_g, V_g deux ouverts disjoints de X contenant respectivement x et gx. Posons $U = \bigcap_{g \neq e}(U_g \cap g^{-1}V_g)$. L'ensemble U est ouvert comme intersection finie d'ouverts et contient x. De plus $U \subset U_g$ et $gU \subset V_g$. Ainsi $U \cap gU = \emptyset$ pour tout $g \neq e$. Ceci prouve que l'action est proprement discontinue.

Dans le cas de l'exercice, le groupe $\mathbb{Z}/3$ agit bien continûment et si $m.(u,v) = (u,v)$ alors $j^m u = u$ et $j^m v = v$. Comme $|u|^2 + |v|^2 = 1$, soit u soit v est non nul donc $j^m = 1$ et $m = 0$ mod 3. Ainsi l'action est libre puis proprement discontinue. Comme S^3 est simplement connexe (cf cours) et que la projection $S^3 \to X$ est un revêtement, S^3 est le revêtement universel de X et $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/3$.

2. On dispose du critère suivant de relèvement où $p : E \to B$ est un revêtement et $f : X \to B$ est une application continue avec E et X connexes par arcs, X admettant un revêtement universel. Alors f se relève à E ssi $f_*\pi_1(X) \subset p_*\pi_1(E)$.
   En effet, si f se relève, i. e. il existe $\tilde{f} : X \to E$ avec $f = p \circ \tilde{f}$ alors $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ ce qui prouve l'inclusion. Réciproquement, notons $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel. Le théorème de relèvement implique que l'application $f \circ \pi$ se relève à E en une application g. De plus, pour tout $\gamma \in \pi_1(X)$ et $x \in \tilde{X}$, $g(\gamma.x) = g(x)$ car le chemin γ se relève dans E dans un chemin de mêmes extrémités. Ainsi g est $\pi_1(X)$-invariante et passe au quotient en une application $X \to E$ qui relève f par construction.
   Dans le cas de l'exercice on a $f : X \to P^3(\mathbb{R})$ et $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(P^3(\mathbb{R}))$. Or $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/3$ et $\pi_1(P^3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2$ et il n'y a pas de morphisme non trivial de $\mathbb{Z}/3$ dans $\mathbb{Z}/2$. Ainsi le critère de relèvement s'applique et f se relève à S^3.

Exercice 3. (**Points tripodaux**) Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe une base orthonormée directe u, v, w de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = f(v) = f(w)$ (propriété notée R dans la suite).

1. Soit $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $q(x) = x^3$. Montrer que c'est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphisme.
2. Soit e_0, e_1, e_2 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C \in SO(3)$ l'élément défini par $Ce_i = e_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{Z}/3$. On note Γ le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par C, X le quotient $SO(3)/\Gamma$ et $p : SO(3) \to X$ la projection canonique. Montrer que p est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphismes.
3. Montrer que X est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/6$.
4. Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue, $j = e^{2i\pi/3}$ et définissons $g : SO(3) \to \mathbb{C}$ par $g(A) = f(Ae_0) + j^2 f(Ae_1) + jf(Ae_2)$. Vérifier que l'on a $g(AC) = jg(A)$ et que $g(A) = 0$ ssi $f(Ae_0) = f(Ae_1) = f(Ae_2)$.
5. Supposons que R n'est pas vérifiée. On a alors $g : SO(3) \to \mathbb{C}^*$. Montrer qu'on peut trouver $h, l : X \to \mathbb{C}^*$ qui font commuter le diagramme suivant et conclure.

$$\begin{tikzcd} SO(3) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "l"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Solution 3. 1. Soit $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ un automorphisme de revêtement. Cela implique que $q \circ \phi = q$ ou encore $\phi(z)^3 = z^3$. On l'écrit $(\phi(z)/z)^3 = 1$. Comme ϕ est continu $\phi(z)/z$ est constant et égal à une racine cubique de l'unité, $1, j$ ou j^2. On en déduit que $\mathrm{Aut}(q) = \mathbb{Z}/3$ et que ce revêtement est galoisien puisqu'il agit transitivement sur $q^{-1}(1) = \{1, j, j^2\}$.

2. Le groupe Γ engendré par C est isomorphe à $\mathbb{Z}/3$ via l'application $m \mapsto C^m$ (car $C^3 = e$). C'est un sous-groupe fini donc discret de $SO(3)$. Ainsi la projection canonique $p : SO(3) \to X$ est un revêtement galoisien de groupe C. L'action de $m \in \mathbb{Z}/3$ sur une matrice A est donnée par $m.A = AC^m$.

3. Le groupe $SO(3)$ est connexe par arcs (cf TD 3) donc X est connexe par arcs comme image de $SO(3)$ par p. La suite exacte associée au revêtement p est

$$1 \to \pi_1(SO(3), 1) \to \pi_1(X, [e]) \to \mathbb{Z}/3 \to 1.$$

Or $\pi_1(SO(3), 1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons $G = \pi_1(X, [e])$: c'est un groupe à 6 éléments, prenons un élément $g \in G$ d'image $1 \in \mathbb{Z}/3$. L'élément g^3 est envoyé sur 0, il est donc dans le sous-groupe $\mathbb{Z}/2$. Si cet élément est égal à 1, alors g est d'ordre 6 et $G = \mathbb{Z}/6$. Sinon, g engendre un sous-groupe de G d'ordre 3 noté H. Si $a \in \mathbb{Z}_2$ est le générateur et $b \in H$, $bab^{-1} \in \mathbb{Z}/2$ et est aussi un générateur de $\mathbb{Z}/2$, ainsi $bab^{-1} = a$. Ceci prouve que les sous-groupes $\mathbb{Z}/2$ et H commutent, puis que G est isomorphe au produit $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/6$.

4. On calcule $g(AC) = f(ACe_0) + j^2 f(ACe_1) + jf(ACe_2) = f(Ae_1) + j^2 f(Ae_2) + jf(Ae_0) = jg(A)$. Si $g(A) = 0$ alors comme la seule relation linéaire réelle entre $1, j$ et j^2 est $1 + j + j^2 = 0$, on en déduit que tous les coefficients $f(Ae_0), f(Ae_1)$ et $f(Ae_2)$ sont égaux.

5. On vérifie que $q(g(AC)) = q(jg(A)) = g(A)$. Ainsi $q \circ g$ passe au quotient en une application $h : SO(3)/\Gamma \to \mathbb{C}^*$. L'application induite $h_* : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbb{C}^*)$ est un morphisme entre $\mathbb{Z}/6$ et $\mathbb{Z}$ donc nécessairement trivial. Le critère de relèvement (cf exercice précédent) implique que h se relève en une application, notée l. Cela implique que g est invariante par l'action de Γ, en clair $g(AC) = g(A)$. Or $g(AC) = jg(A)$ donc $g(A) = 0$ ce qui est impossible.

Exercice 4. (Grille et bouquet de cercles)
On note $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ le revêtement définit par $p(x, y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$. On note $A = S^1 \times \{1\}$, $B = \{1\} \times S^1$ et $X = A \cup B$. On note $A' = X \setminus \{(1, -1)\}$ et $B' = X \setminus \{(-1, 1)\}$. Enfin on note $\alpha(t) = (e^{2i\pi t}, 1)$ et $\beta(t) = (1, e^{2i\pi t})$ deux lacets de X.

1. Montrer que A et B sont des rétracts par déformation de A' et B' respectivement.
2. Montrer que $A' \cap B'$ est contractile.
3. Montrer que $\pi_1(X, (1, 1))$ est engendré par $[\alpha]$ et $[\beta]$.

On note E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) tels qu'on ait $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$. On note encore $p : E \to X$ l'application induite par p et par $i : X \to S^1 \times S^1$ l'inclusion.

1. Montrer que $p : E \to X$ est un revêtement galoisien et déterminer son groupe d'automorphismes.
2. Montrer qu'il existe une suite exacte de la forme suivante :

$$1 \longrightarrow \pi_1(E, (0, 0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, (1, 1)) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

3. Montrer que la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(E, (0, 0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, (1, 1)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \longrightarrow 1$$

4. Notons C le carré de sommets $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ et $(0, 1)$ et notons $j : C \to E$ l'inclusion. Calculer $\pi_1(C, (0, 0)$ et décrire un de ses générateurs.
5. Décrire l'image de ce générateur par l'application $(p \circ j)_* : \pi_1(C, (0, 0)) \to \pi_1(X, (1, 1))$.

6. Montrer qu'il existe une rétraction de E sur C et que du coup, l'homéomorphisme j_* est injectif.
7. En déduire que $\pi_1(X,(1,1))$ n'est pas commutatif.

Solution 4. 1. Tout élément de A' s'écrit de manière unique $(z, e^{i\theta})$ avec $z \in S^1$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. On pose alors $H((z, e^{i\theta}), t) = (z, e^{it\theta})$. Cela définit une rétraction par déformation de A' sur A. On procède de même pour B'.

2. Tout élément de $A' \cap B'$ s'écrit de manière unique $(e^{i\theta}, e^{i\phi})$ pour $\theta, \phi \in]-\pi, \pi[$. On pose $H((e^{i\theta}, e^{i\phi}), t) = (e^{it\theta}, e^{it\phi})$. Cela montre que $A' \cap B'$ est contractile.
3. D'après le théorème de Van Kampen appliqué à la décomposition $X = A' \cup B'$, $\pi_1(X)$ est engendré par les images de $\pi_1(A')$ et de $\pi_1(B')$ via leur inclusion dans X. D'après la question précédente, l'inclusion $\pi_1(A) \to \pi_1(A')$ est un isomorphisme et $\pi_1(A)$ est engendré par α. En raisonnant de même pour B on prouve que α et β engendrent $\pi_1(X)$.

1. Le groupe $\mathbb{Z}^2$ agit par translation sur $\mathbb{R}^2$ et préserve E. C'est donc un sous-groupe du groupe d'automorphisme du revêtement de p. Comme il agit transitivement et que E est connexe, tout automorphisme est de cette forme. En particulier, le revêtement $p : E \to X$ est galoisien.
2. La suite en question est donnée dans le cours. Le morphisme ρ est celui qui représente l'action de $\pi_1(X)$ par relèvement sur E.
3. L'inclusion $i : X \to S^1 \times S^1$ permet d'identifier le revêtement E au tiré en arrière du revêtement universel $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$. Comme les groupes d'automorphismes de ces deux revêtements sont isomorphes, on en déduit que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "i_*"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

   Cela nous permet de remplacer $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $\pi_1(S^1 \times S^1)$ dans la suite précédente.
4. Le carré C est homéomorphe à un cercle. On peut définir un homéomorphisme ϕ de C sur S^1 en envoyant $(t,0)$ sur $e^{i\pi t/2}$, $(1,t)$ sur $ie^{i\pi t/2}$, $(t,1)$ sur $-e^{-i\pi t/2}$ et $(0,t)$ sur $e^{-i\pi t/2}$. Le générateur de $\pi_1(C,(0,0))$ est alors donné par $\phi^{-1} : S^1 \to C$.
5. Un calcul direct montre que $p \circ \phi^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.
6. Pour $(x,y) \in E$, on définit $r(x,y)$ comme l'unique point d'intersection de C avec le segment reliant (x,y) à $(1/2,1/2)$. Il est clair que c'est une application continue de E dans C et qu'elle est égale à l'identité de C. On en déduit que $(r \circ j)_* = r_* \circ j_* = \mathrm{Id}$: ainsi j_* est injectif.
7. On a vu que $j_* : \pi_1(C) \to \pi_1(X)$ est un morphisme injectif envoyant le générateur de $\pi_1(C) \simeq \mathbb{Z}$ sur le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Cet élément est donc non nul, ce qui est impossible si $\pi_1(X)$ est commutatif.

Exercice 5. (**Groupe fondamental des groupes topologiques)**) Soit G un groupe topologique connexe par arcs, α et β deux lacets dans G basés en e. On note $\alpha\beta$ le lacet défini par $\alpha\beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$.

1. Montrer que $\alpha * \beta, \beta * \alpha$ et $\alpha\beta$ sont homotopes. En déduire que $\pi_1(G,e)$ est commutatif.
2. Soit $p : G' \to G$ un revêtement avec G' connexe par arcs et soit $e' \in G'$ un point vérifiant $p(e') = e$. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur G' telle que e' soit l'élément neutre et telle que p soit un morphisme de groupe.
3. Monter que le noyau de p est un sous-groupe discret et central de G' (contenu dans le centre). Montrer que $p : G' \to G$ est galoisien.
4. Soit a et b deux éléments de G qui commutent ($ab = ba$). Donnons nous deux chemins α et β dans G vérifiant $\alpha(0) = \beta(0) = e$, $\alpha(1) = a$ et $\beta(1) = b$. On définit $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$. Montrer que la classe de γ dans $\pi_1(G,e)$ ne dépend que de a et b.

5. Expliciter cette classe si $G = SO(3)$, $a = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ et $b = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.

Solution 5. 1. On définit $F : [0,1]^2 \to G$ par $F(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$ et on observe que $\alpha\beta$ est égal à $F|_D$ où D est la diagonale de $[0,1]^2$, $\alpha * \beta$ est égal à $F|_{C_1}$ où C_1 est le chemin formé des deux segments $[0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1]$ et $\beta * \alpha = F|_{C_2}$ où $C_2 = \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}$. Or les chemins C_1, C_2 et D sont homotopes à extrémités fixées, donc leur image par F aussi. On en déduit l'égalité demandée qui implique aussi puisque $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$ que $\pi_1(G, e)$ est commutatif.

2. Soit $g_1, g_2 \in G'$ deux éléments et γ_1, γ_2 deux chemins reliant respectivement e' à g_1 et g_2. Si la structure multiplicative existe sur G', elle est-telle que le lacet $\gamma_1\gamma_2$ se projette sur le lacet $p(\gamma_1)p(\gamma_2)$. Cela nous permet de définir le produit de g_1 et g_2 comme le relevé dans G' de l'arc $p(\gamma_1)p(\gamma_2)$ issu de e'. En particulier cela prouve que la structure est unique.

   Pour montrer l'existence de la structure, il faut prouver que l'élément g_1g_2 ainsi défini ne dépend pas du choix de γ_1 et γ_2. Si en remplaçant γ_1 par γ_1' on trouvait deux relevés différents, on pourrait ramener continûment g_2 en e' en suivant γ_2 ce qui nous donnerait deux relevés différents. Mais ceci est absurde puisque par construction, γ_1 et γ_1' ont les mêmes extrémités. En raisonnant de même sur γ_2, on montre que le produit g_1g_2 ne dépend pas des choix et que la structure est bien définie. Il faut encore montrer que cela définit bien une structure de groupe, mais cela est laissé au lecteur.

3. Le noyau de p est la fibre de $1 \in G$. C'est donc discret car p est un revêtement. Il est de plus distingué comme noyau d'un morphisme. D'après le TD3, ex. 3, il est central. Pour tout $h \in \ker p$, l'application $g \mapsto hg$ est un automorphisme de revêtement qui envoie 1 sur h. Donc $\ker p$ agit transitivement sur la fibre de 1 et le revêtement est galoisien.

4. Considérons un autre chemin α' reliant e et a et notons γ' le chemin construit avec α'. On a alors $\gamma\gamma'^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} * \beta\alpha'\beta^{-1}\alpha'^{-1} \sim \alpha\beta\alpha^{-1}\alpha'\beta^{-1}\alpha'^{-1}$ d'après la question 1. En remplaçant β par $\beta_s(t) = \beta(st)$ on construit une homotopie entre $\gamma\gamma'^{-1}$ et 1.

5. On pose $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $\beta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, \pi]$.

   Soit $p : SU(2) \to SO(3)$ le revêtement universel construit dans le TD3. On a $\alpha(t) = p(\exp(it/2))$ et $\beta(t) = p(\exp(kt/2))$. Ainsi, un relevé du chemin $\gamma(t)$ dans $SU(2)$ est donné par $\tilde{\gamma}(t) = e^{it/2}e^{kt/2}e^{-it/2}e^{-kt/2}$. On calcule $\tilde{\gamma}(\pi) = iki^{-1}k^{-1} = -1$. Or -1 est l'élément non trivial de $\ker p$. On en déduit que la classe de γ est le générateur de $\pi_1(SO(3), 1) = \mathbb{Z}/2$.