UPMC - MM059 - Examen - 01/03/2013

3 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice 1

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$ et $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\}$. Soit $f : D \to D$ une application continue sans point fixe, c'est-à-dire telle que $f(z) \neq z$ pour tout $z \in D$.

1. En considérant la demi-droite issue de z et passant par $f(z)$, construire une rétraction de l'inclusion $i : S^1 \to D$.
2. Fixons $z_0 \in S^1$. Montrer que l'application $i_* : \pi_1(S^1, z_0) \to \pi_1(D^2, f(z_0))$ est injective.
3. Démontrer le théorème de Brouwer : toute application continue de D dans D a un point fixe.

Exercice 2

Soient X et Y deux espaces topologiques non vides. On définit leur joint $X * Y$ de la manière suivante

$$X * Y = X \times Y \times [0,1]/\sim \quad \text{où}$$

$$(x,y,t) \sim (x',y',t') \leftrightarrow \begin{cases} (x,y,t) = (x',y',t') \text{ ou} \\ t = 0 \text{ et } x = x' \text{ ou} \\ t = 1 \text{ et } y = y'. \end{cases}$$

1. Montrer que $X * Y$ est connexe par arcs.
2. Soit $U = \{(x,y,t) \in X * Y, t < 1\}$ et $V = \{(x,y,t) \in X * Y, t > 0\}$. Montrer que U et V sont des ouverts puis que U, V et $U \cap V$ se rétractent par déformation sur X, Y et $X \times Y$ respectivement.

3. Montrer que pour tout diagramme commutatif de morphismes de groupe

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr, "\phi_1"] & \\ G_1 \times G_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & H \\ & G_2 \arrow[ur, "\phi_2"'] & \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 désignent les deux projections, on a nécessairement $\phi_1 \circ p_1 = \phi_2 \circ p_2 = 1$.
4. En déduire que si X et Y sont connexes par arcs, $X * Y$ est simplement connexe.
5. Montrer que si G agit proprement discontinûment sur deux espaces topologiques non vides X et Y, il agit de même sur $X * Y$ par $g.(x, y, t) = (g.x, g.y, t)$.
6. Montrer que G agit proprement discontinûment sur $E_1 = G * G$ puis $E_2 = E_1 * E_1$. Notons $B = E_2/G$. Calculer son groupe fondamental[1].
7. Identifier E_1, E_2 et B dans le cas où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit B l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Rappelons que l'équation $X^3 + px + q$ admet trois racines distinctes si et seulement si $(p, q) \in B$. Notons

$$A = \{(p, q, x) \in C \times \mathbb{C}, x^3 + px + q = 0\}$$

Soit $\pi : A \to B$ l'application définie par $\pi(p, q, x) = (p, q)$

1. Montrer que π est un revêtement et calculer son degré.
2. Montrer que A, B sont connexes par arcs.
3. Soit $b = (-1, 0) \in B$. Montrer que l'action du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ sur la fibre $\rho^{-1}(b)$ définit un morphisme surjectif de $\pi_1(B, b)$ sur le groupe symétrique S_3.
4. Déterminer si le revêtement $\pi : A \to B$ est galoisien et calculer son groupe d'automorphismes.
5. Notons $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ et $K \subset S^3$ le sous-ensemble défini par
$$K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z| = |w| = 1, z^3 = w^2\}.$$
Montrer que C et $S^3 \setminus K$ sont homotopiquement équivalents.
6. Soit $J \subset S^3$ le cercle défini par $J = \{(z, w) \in S^3, w = 0\}$. Montrer que J et K sont homéomorphes mais que leurs complémentaires $S^3 \setminus J$ et $S^3 \setminus K$ ne le sont pas.

[1] Ainsi, tout groupe est le groupe fondamental d'un espace topologique