GROUPE FONDAMENTAL ET REVÊTEMENTS

par

N. Bergeron

Table des matières

Le groupe fondamental est introduit pour la première fois, par Poincaré, dans une note aux comptes rendus de l'Académie des sciences en 1892. Le manuscrit que Poincaré envoie à l'Académie est reproduit à la fin de ces notes, j'y ferais référence régulièrement dans de ce cours en tachant de suivre la progression de Poincaré. Dans ces notes j'ai recopié de nombreux passages du livre des Douady [**1**] ainsi que d'un cours de Pansu disponible sur sa page personnelle. D'autres bonnes références sont les livres de Hatcher [**3**] (disponible gratuitement sur internet) et le livre de Massey [**4**].

1. Introduction

Pour des raisons d'origine essentiellement pratique les mathématiciens ont très vite essayer d'évaluer les intégrales définies du genre

$$f(x) = \int F(x,y)dx$$

où F est une fraction rationnelle et y et x sont liées par une relation algébrique

$$P(x,y) = 0, \qquad P \text{ polynôme.}$$

Exemple 1. — 1. L'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

permet de calculer la longueur d'une arc de cercle ; une primitive est la fonction arcsin.

2. L'intégrale

$$\int \frac{dx}{x}$$

a pour primitive le logarithme.

3. Enfin les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+px+q}},$$

dites **elliptiques**, sont à l'origine de tout un pan des mathématiques modernes. Elles interviennent naturellement en physique *via* l'étude du pendule ou encore plus simplement le calcul de la longueur d'arc d'une ellipse (voir [**5**]).

Plusieurs difficultés se présentent dès que l'on tente de donner un sens à ces intégrales lorsque x et y sont des nombres complexes. La première est la présence dans l'intégrand d'indéderminations : y n'est pas une fonction x. La seconde, liée à la première, est que l'intégrale dépend du chemin d'intégration choisi, puisque l'intégrand peut avoir des pôles. La conclusion est qu'il faut se résigner à considérer f comme une "fonction multiforme" . En clair, cela signifie que chaque point x a plusieurs images, toutes notées $f(x)$. Tout ceci est évidemment un peut gênant ! La théorie des revêtements va nous permettre de considérer f comme une vraie fonction, il suffira de changer l'espace de départ en "passant à un revêtement". C'est l'objet de ce chapitre ; dans une première section nous commençons par consérer le cas du deuxième exemple ci-dessous, à savoir celui du logarithme.

L'idée sous-jacente est de prolonger les fonctions du type f le long de chemins. On va essentiellement placer le problème au niveau de fonctions continues et faire un usage répété des deux lemmes suivant.

Lemme 2. — *Soient X et Y deux espaces topologiques, soient A et B des fermés de X tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \to Y$ une application telle que $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues. Alors f est continue.*

Démonstration. — Soit $F \subset Y$ un fermé. La préimage $f_{|A}^{-1}(F)$ est un fermé de A, donc un fermé de X. De même $f_{|B}^{-1}(F)$ est un fermé de X. Alors

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f_{|A}^{-1}(F) \cup f_{|B}^{-1}(F)$$

est fermé. □

Lemme 3. — *Soit X un espace métrique compact. Soient U_i, $i \in I$, une famille d'ouverts qui recouvrent X. Alors il existe un rayon $r > 0$ (appelé* nombre de Lebesgue *du recouvrement) tel que toute boule de rayon r dans X soit entièrement contenue dans l'un des U_i.*

Démonstration. — Par compacité, on peut supposer l'ensemble I fini. Soit, pour $x \in X$,

$$d(x) = \max\{d(x, X - U_i) \ : \ i \in I\}.$$

Alors d est continue et strictement positive. Elle est donc bornée inférieurement par un $r > 0$. Si $x \in X$, comme $r \leq d(x)$, il existe $i \in I$ tel que $d(x, X - U_i) \geq r$, ce qui signifie que $B(x, r) \subset U_i$. □

2. Logarithme complexe et théorème de relèvement

2.1. Détermination principale du logarithme. — Notons Log la **détermination principale du logarithme**, c'est-à-dire la fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant $\mathbb{R}_-$. On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de $\mathbb{R}_-$ sont distinctes entraîne que la fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Remarque 4. — Cela entraîne que la courbe $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire sous la forme $e^{i\theta(t)}$ avec $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique.

Démonstration. — Sinon la fonction $L : z = re^{it} \mapsto \log(r) + i\theta(t)$ serait continue sur $\mathbb{C}^*$ et telle que $e^{L(z)} = z$. Et le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentiellen entraînerait que L est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction. □

FIG. 1. Deux exemples de relèvements. (Images extraites d'une vidéo produite par l'université de Hanovre - Groupe de Topologie - 2004)

2.2. Le théorème de relèvement. — On note

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*.$$

Théorème 5. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $u : I \to \mathbb{S}^1$ une application continue. Il existe alors une fonction continue $\theta : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$u(t) = e^{i\theta(t)}. \tag{1}$$

De plus θ est essentiellement unique : deux fonctions continues verifiant (1) diffèrent d'une constante, un multiplie de 2π.

Démonstration. — L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$ nécessairement constante.

Montrons l'existence. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Notons C_K le groupe multiplicatifs des fonctions continues de K dans $\mathbb{S}^1$ que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme. Soit E_K le sous-groupe de C_K constitué d'exponentielles de fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$. Nous allons plus généralement montré [(1)] que $E_K = C_K$ lorsque K est étoilé. Le théorème s'obtient alors en prenant $K = I$.

Lemme 6. — *Le sous-groupe E_K coïncide avec la composante connexe de la fonction constante égale à 1 (c'est-à-dire l'élément neutre) dans C_K.*

Démonstration. — Montrons d'abord que E_K est ouvert dans C_K. Soit $f = \exp(g)$ dans E_K, avec $g : K \to \mathbb{C}$ continue. Si $\tilde{f} \in C_K$ est suffisamment proche de f, on a

$$||\tilde{f}/f - 1|| < 1.$$

Alors la fonction $h = \mathrm{Log}(\tilde{f}/f)$ est bien définie et continue de K dans $\mathbb{C}$ et

$$\tilde{f} = \exp(h)f = \exp(h+g) \in E_K.$$

Dans tout groupe topologique G, un sous-groupe ouvert H est également fermé : G est réunion de classes disjointes gH homéomorphes à H et donc $G - H$ est ouvert.

Le sous-groupe E_K de C_K est donc une réunion de composantes connexes de C_K. Mais il contient clairement la fonction constante égale à 1 et est connexe puisque l'application $t \in [0,1] \mapsto \exp(tg)$ est un chemin reliant 1 à $\exp(g)$ dans E_K. $\square$

Supposons maintenant K étoilé par exemple autour du point $0 \in \mathbb{C}$, et considérons une fonction $f \in C_K$. Pour tout $t \in [0,1]$, notons

$$f_t : K \to \mathbb{S}^1, \quad z \mapsto f(tz).$$

Alors $t \in [0,1] \mapsto f_t$ est un chemin reliant f à la fonction constante égale à $f(0)$ dans C_K. La connexité de $\mathbb{S}^1$ garantit par ailleurs qu'il existe un chemin de $\mathbb{S}^1$ reliant $f(0)$ à 1. Le groupe C_K est donc connexe et il découle du lemme 6 que $E_K = C_K$ ce que l'on voulait démontrer. $\square$

***Corollaire 7* (Brouwer en dimension 2).** — *Toute application continue du disque unité*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$$

dans lui-même admet (au moins) un point fixe.

Démonstration. — Commençons par déduire du théorème 5 (en fait de sa démonstration) le lemme suivant, plus connu sous le nom de “lemme de non rétraction de Brouwer”.

Lemme 8. — *Il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$ dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ soit l'identité.*

---

(1) En suivant une jolie démonstration trouvée dans **[2]**.

Démonstration. — Supposons par l'absurde qu'il existe une application continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$ dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ est l'identité. Alors $f \in C_{\mathbb{D}} = E_{\mathbb{D}}$, d'après la démonstration du théorème 5. Et donc $f = \exp(g)$, où g est une application continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$. Prenant $z \in \mathbb{S}^1$, on aurait :

$$\exp(g(z) - g(-z)) = f(z)/f(-z) = -1.$$

Mais il découlerait alors de l'unicité dans le théorème 5, l'existence d'un entier k tel que

$$\forall z \in \mathbb{S}^1, \quad g(z) - g(-z) = (2k+1)i\pi.$$

Ce qui est manifestement impossible (prendre par exemple $z = 1$ et $z = -1$). $\square$

Le corollaire 7 découle du lemme 8. Supposons en effet par l'absurde qu'il existe une application continue $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sans point fixe. Pour $z \in \mathbb{D}$, notons $f(z) \in \mathbb{S}^1$ celui des deux points appartenant à la droite passant par z et $g(z)$ qui est le plus proche de z. Alors $f : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$ est une application continue qui vaut l'identité en restriction à $\mathbb{S}^1$, en contradiction avec le lemme 8. $\square$

2.3. Degré et indice. — Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ une application 2π-périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une relèvement de u (donné par le théorème 5). Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de u, donc il existe un entier n tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$. D'après la remarque 4 l'entier n n'est pas nécessairement nul.

Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application continue, soit θ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle **degré** de f l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$. Il découle immédiatement de l'unicité dans le théorème 5 que le degré de dépend pas du choix du relevé θ.

Exemple 9. — Le degré de l'application $z \mapsto z^n$ est n.

Conservons les notations de la démonstration du théorème 5 et notons en particulier $C_{\mathbb{S}^1}$ le groupe topologique constitué des applications continues de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$.

Proposition 10. — *Si deux applications continues f et $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sont suffisamment voisines, elles ont même degré.*

En fait, l'application $\deg : C_{\mathbb{S}^1} \to \mathbb{Z}$ *est un morphisme continu et surjectif de noyau* $E_{\mathbb{S}^1}$.

Démonstration. — Montrons d'abord la première assertion. Supposons pour cela que $|f - g| < 2$ et fixons $\theta_f, \theta_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des relèvements de f et g tels que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t > 0 \ : \ |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi\}$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - f(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| \quad &\leq \quad |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g))| \\ &\leq \quad |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$.

L'application $\deg : C_{\mathbb{S}^1} \to \mathbb{Z}$ est donc continue. On vérifie facilement que c'est un morphisme en remarquant que $\theta_f + \theta_g$ est un relèvement de fg. La surjectivité découle de l'exemple 9.

Puisque la fonction constante égale à 1 est de degré zéro, que $E_{\mathbb{S}^1}$ est connexe et que deg est continue, le noyau de deg contient $E_{\mathbb{S}^1}$. Réciproquement, la condition $\deg(f) = 0$ entraîne la 2π-périodicité de tout relèvement de f. Fixons θ_f un tel relèvement, on peut alors l'écrire $\theta_f(t) = g(e^{it})$ d'où l'on déduit que $f = \exp(g)$. $\square$

Proposition 11. — *Soit $r : C_{\mathbb{D}} \to C_{\mathbb{S}^1}$ le morphisme qui à $f \in C_{\mathbb{D}}$ associe sa restriction à $\mathbb{S}^1$. Alors*

$$r(C_{\mathbb{D}}) = E_{\mathbb{S}^1}.$$

Démonstration. — On a $C_{\mathbb{D}} = E_{\mathbb{D}}$ donc $r(C_{\mathbb{D}}) \subset E_{\mathbb{S}^1}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $f = \exp(g) \in E_{\mathbb{S}^1}$ avec $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ continue. On prolonge g continûment à tout le disque $\mathbb{D}$ par :

$$\tilde{g}(z) = \begin{cases} |z| g\left(\frac{z}{|z|}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

L'application $\tilde{f} = \exp(\tilde{g}) \in C_{\mathbb{D}}$ prolonge f et la proposition s'ensuit. $\square$

La notion de degré permet de définir l'indice d'une courbe dans le plan autour d'un point p qu'elle évite. Soit $c : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ une courbe dans le plan qui évite un point p. On appelle **indice** de c par rapport à p le degré de l'application $u \mapsto \frac{c(u)-p}{|c(u)-p|}$.

L'indice de c par rapport à p compte le nombre de tours que c fait autour de p. On peut le calculer en coupant c par une demi-droite bien choisie : on compte le nombre de fois que c coupe la demi-droite dans le sens trigonométrique, moins le nombre de fois que c coupe la demi-droite dans l'autre sens.

2.4. Homotopies. — Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues f_0 et f_1 de X dans Y sont dites **homotopes** s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to Y$ telle que $F(0,x) = f_0(x)$ et $F(1,x) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. On écrit alors $f_0 \simeq f_1$. La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $C(X,Y)$ des applications continues de X dans Y (pour la transitivité, utiliser le lemme 2).

Une application continue $f : X \to Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. On dit alors que X et Y ont même **type d'homotopie**.

Un espace X est dit **contractile** s'il a le type d'homotopie d'un point, c'est-à-dire si $X \neq \emptyset$ et si l'application Id_X est homotope à une application constante.

Exemple 12. — L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile.

Démonstration. — Soient $f : \mathbb{R}^n \to *$ l'application constante et $g : * \to \mathbb{R}^n$ l'application dont l'image est 0. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_*$ et $f \circ g$ est la fonction nulle, homotope à l'identité par $F(s, x) = sx$. □

Exemple 13. — Soient X, Y deux espaces topologiques. Si X a même type d'homotopie que X', alors $X \times Y$ a même type d'homotopie que $X' \times Y$. En particulier, $\mathbb{C} - \{0\}$ a même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}^1$.

Proposition 14. — *Deux applications continues homotopes de $\mathbb{S}^1$ dans lui-même ont même degré.*

Démonstration. — Notons f_0 et f_1 ces deux applications. Si $F : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est une homotopie de f_0 à f_1, alors, par uniforme continuité, il existe un entier N tel que les lacets $\gamma_j(t) = F(j/N, t)$ satisfassent $|\gamma_j - \gamma_{j+1}| < 2$. La proposition 10 implique alors que $\deg(\gamma_j) = \deg(\gamma_{j+1})$ pour tout j, donc $\deg(f_0) = \deg(f_1)$. □

En guise d'application démontrons le théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 15. — *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré non nul, possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré d qui ne s'annule pas. Il ne coûte rien de supposer que le coefficient dominant de f vaut 1. Considérons l'application $]0,1[\to \mathbb{S}^1$ définie par

$$g(s,u) = \frac{f(u(1-s)/s)}{|f(u(1-s)/s)|}.$$

Lorsque s tend vers 0, $g(s,u)$ tend vers u^d. Lorsque s tend vers 1, $g(s,u)$ tend vers $f(0)/|f(0)|$. Par conséquent, g se prolonge en une application continue $G : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, qui est une homotopie entre la constante $f(0)/|f(0)|$ et l'application $u \mapsto u^d$. L'invariance homotopique du degré implique donc que $d = 0$. □

Soient X un espace topologique et A une partie de X. Une **rétraction** de X sur A est une application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x$ pour $x \in A$. L'application $r : X \to A$ est appelée une **rétraction par déformation** si de plus $i \circ r : X \to X$, où $i : A \to X$ est l'injection canonique, est homotope à Id_X. On dit que A est un **rétracte par déformation** de X s'il existe une rétraction par déformation $X \to A$. Cela entraîne que X et A ont le même type d'homotopie.

Exemple 16. — La sphère $\mathbb{S}^n$ est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Démonstration. — Poser

$$F(t,x) = \frac{x}{t|x| + 1 - t}.$$

□

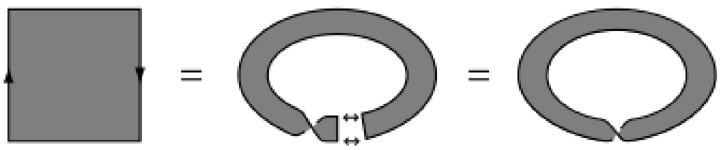

FIG. 2. La bande de Möbius

Proposition 17. — *Soit $p \in \mathbb{R}^2$. Soit $D \subset \mathbf{P}^2\mathbb{R}$ la droite à l'infini. Alors D est un rétracte par déformation de $\mathbf{P}^2\mathbb{R} - \{p\}$.*

Démonstration. — Soit $\pi : \mathbf{P}^2\mathbb{R} - \{p\} \to D$ la projection de centre p sur D. Alors π est une rétraction. Chaque fibre $\pi^{-1}(q)$, $q \in D$, est une droite projective avec un point marqué (q) et un point retiré (p), elle possède donc une structure canonique de droite vectorielle. On peut donc multiplier un point $r \in \pi^{-1}(q)$ par $s \in \mathbb{R}$. L'application $F(s, r) = sr$ définit une homotopie de $i \circ \pi$ à l'identité.

Concrètement, si $p = [0 : 0 : 1]$ et $r = [x_0 : x_1 : x_2]$, $\pi(r) = [x_0 : x_1 : 0]$ et on pose $F(t, r) = [x_0 : x_1 : tx_2]$. □

Corollaire 18. — *Le complémentaire d'un disque dans $\mathbf{P}^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à un disque. En fait, il n'a pas le même type d'homotopie.*

Exemple 19. — Soit M la bande de Möbius. Rappelons que c'est l'espace topologique obtenu à partir de $[0, 1]^2$ en identifiant $(0, y)$ avec $(1, 1 - y)$ pour tout $y \in [0, 1]$, voir figure 2. Le cercle $\mathbb{S}^1$ se plonge dans M *via* l'application $i : e^{2i\pi x} \mapsto (x, \frac{1}{2})$. Et l'application $r : M \to i(\mathbb{S}^1)$, $(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{2})$ est une rétraction par déformation (voir figure 3).

Démonstration. — Poser

$$F(t, (x, y)) = (x, (1 - t)/2 + ty).$$

□

Exemple 20. — L'espace $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ a même type d'homotopie que la réunion du cercle de rayon 2 centré en 0 et de l'intervalle $[-2, 2]$ de l'axe réel.

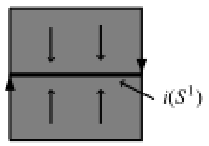

FIG. 3. Rétraction

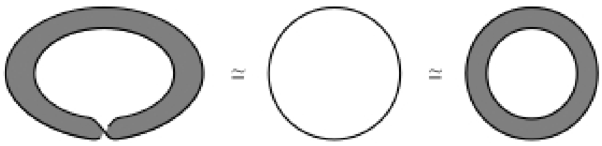

FIG. 4. Espaces homotopiquement équivalents

2.5. Une source d'exemple : les graphes. — On appelle **graphe** un espace topologique G obtenu à partir d'un ensemble G^1 réunion dénombrable disjointe de copies de l'intervalle $[0,1]$ en identifiant des extrémités. Le graphe G est **fini** si G^1 est une réunion fini de copies de l'intervalle $[0,1]$. On appelle **arête** chaque élément de G^1. Une arête à deux extrémités éventuellement confondues dans G, les éléments de l'ensemble G^0 de points du graphe ainsi obtenus sont appelés les **sommets** de G.

Proposition 21. — *Soient G un graphe fini et a une arête de G. On suppose que les extrémités de a sont distinctes dans G. Soit G' le graphe obtenu en* **écrasant** *a, i.e. en identifiant tous les points de a. Alors G et G' ont même type d'homotopie.*

Démonstration. — Notons $q : G \to G'$ le passage au quotient. Il s'agit de montrer que q est une équivalence d'homotopie. Nous allons déduire ce résultat du lemme général suivant.

Lemme 22. — *Soit A un sous-graphe de G. L'espace topologique $G \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ est un rétracte par déformation de $G \times [0,1]$.*

Démonstration. — Soient $e \in G^1$ et ∂e l'ensemble de ses extrémités. Identifiant e à l'intervalle $[0,1]$, la projection radiale à partir du point $(0,2) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ induit une rétraction $r : e \times [0,1] \to e \times \{0\} \cup \partial e \times [0,1]$. Et l'homotopie $F(x,t) = tr(x) + (1-t)x$ implique que r est une rétraction par déformation. Celle-ci induit une rétraction par déformation de $G^1 \times [0,1]$ sur $G^1 \times \{0\} \cup (G^0 \cup A^1) \times [0,1]$ puisque $G^1 \times [0,1]$ est obtenu à partir de $G^1 \times \{0\} \cup (G^0 \cup A^1) \times [0,1]$ en attachant des copies de $e \times [0,1]$ le long de $G^1 \times \{0\} \cup \partial e \times [0,1]$. De manière immédiate, on a une rétraction par déformation de $G^0 \times [0,1]$ sur $G^0 \times \{0\} \cup A^0 \times [0,1]$. La composée de ces deux rétractions induit une rétraction par déformation de $G \times [0,1]$ sur $G \times \{0\} \cup A \times [0,1]$. □

Il découle en particulier du lemme 22 que si $f_0 : G \to G$ est une application continue, alors toute homotopie $f_t : A \to G$ de $f_0|_A$ s'étend en une homotopie $f_t : G \to G$ de f_0.

On applique cette remarque au sous-graphe A constitué de la seule arête a (et de ses deux extrémités). Puisque A est contractile il existe une homotopie entre l'injection $A \to G$ et l'application constante égale à l'un quelconque des points de A qui réalise la contraction de A en ce point. Soit $f_t : G \to G$ une extension de cette homotopie, avec $f_0 = \mathrm{Id}_G$. Puisque $f_t(A) \subset A$ pour tout t, l'application $q \circ f_t : G \to G'$ envoie A sur un point et se factorise donc en une application composée $G \xrightarrow{q} G' \to G'$. Notons $\bar{f}_t : G' \to G'$ la dernière application. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_t} & G \\ q\downarrow & & \downarrow q \\ G' & \xrightarrow{\bar{f}_t} & G' \end{array}$$

est commutatif. Puisque $f_1(A)$ est égal à un point, le point sur lequel on a contracté A, l'application f_1 induit une application $g : G' \to G$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G \\ q\downarrow & \overset{g}{\nearrow} & \downarrow q \\ G' & \xrightarrow{\bar{f}_1} & G' \end{array}$$

soit commutatif. On a en particulier

$$g \circ q = f_1 \simeq f_0 = \mathrm{Id}_G \quad \text{et} \quad q \circ g = \bar{f}_1 \simeq \bar{f}_0 = \mathrm{Id}_{G'}.$$

□

Corollaire 23. — *Tout graphe fini connexe a même type d'homotopie qu'un graphe n'ayant qu'un sommet auquel sont attachées un nombre fini de boucles.*

Démonstration. — On écrase l'une après l'autre toutes les arêtes dont les extrémités sont distinctes. À la fin, il ne reste que des boucles attachées au même sommet. □

3. Revêtements

La notion de revêtement permet d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

3.1. Définitions et exemples. — Soit B un espace topologique. On appelle **revêtement** de B un espace topologique X muni d'une application continue $p : X \to B$ telle que pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b dans B, un espace discret F

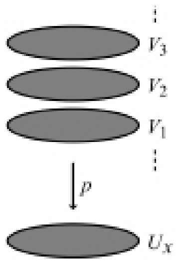

FIG. 5. Une pile d'assiettes

non vide et un homéomorphisme φ de $p^{-1}(U)$ sur $U \times F$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times F \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

soit commutatif.

La condition peut encore s'exprimer ainsi (voir figure 5, un revêtement est localement une "pile d'assiettes" au-dessus du voisinage d'un point) : *Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b dans B et un espace discret F tels que*

1. *$p^{-1}(U)$ est réunion disjointe d'ouverts $V_i \subset X$ pour i dans F,*
2. *pour chaque $i \in F$, la restriction $p_{|V_i} : V_i \to U$ est un homéomorphisme.*

On appelle B la **base** et X l'**espace total** du revêtement. Le voisinage U est un **voisinage trivialisant**. On dit que X est un revêtement **trivial** de B si B est un ouvert trivialisant.

Remarque 24. — 1. On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : X \times X' \to B \times B'$.

2. Si la base B est connexe, les **fibres** $p^{-1}(b)$, $b \in B$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini). Lorsque ce cardinal est fini, on l'appelle le **degré** du revêtement.
3. Si $p : X \to B$ est un revêtement et $B' \subset B$, alors $p_{|p^{-1}(B')} : p^{-1}(B') \to B'$ est un revêtement.

Exemple 25. — 1. L'espace $\mathbb{R}$ muni de l'application $t \mapsto e^{it}$ est un revêtement de $\mathbb{S}^1$ (voir figure 6).

2. De même $\mathbb{C}$ muni de $z \mapsto e^z$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$.
3. L'espace $\mathbb{S}^1$ muni de l'application $z \mapsto z^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, est un revêtement de degré d de $\mathbb{S}^1$ (voir figure 6). De même, $\mathbb{C}^*$ muni de $z \mapsto z^d$ est un revêtement de degré d.

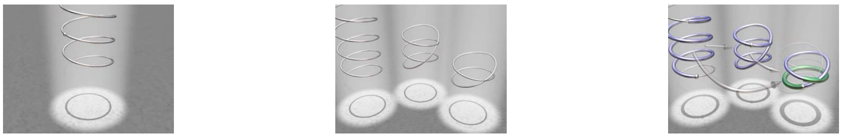

FIG. 6. Revêtements du cercle. (Images extraites d'une vidéo produite par l'université de Hanovre - Groupe de Topologie - 2004)

4. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur $\mathbb{S}^1$.

Démonstration du point 4. — Soient ε un réel strictement positif strictement plus petit que π et

$$U = \{z \in \mathbb{S}^1 \ : \ |\arg(z) - \pi| < \varepsilon\}.$$

Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles $V_1 =]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[$ et $V_2 =]3\pi - \varepsilon, 3\pi[$. Il est vrai que $p_{|V_1} : V_1 \to U$ est un homéomorphisme mais $p_{|V_2} : V_2 \to U$ ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant. $\square$

Exemple 26. — Soit $\mathbb{C}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré $\leq d$. Soit B un sous-ensemble de polynômes $P \in \mathbb{C}_d[X]$ ayant d racines distinctes que l'on munit de la topologie induite. Alors le sous-espace X de $B \times \mathbb{C}$ formé des couples (P, z) tels que $P(z) = 0$, muni de la projection $\pi : (P, z) \mapsto P$, est un revêtement de degré d de B.

Démonstration. — Soit $P_0 \in B$; les racines de P sont simples et, d'après le théorèmes des fonctions implicites, pour chaque racine z_i de P_0, il existe un voisinage U_i de P_0 dans $\mathbb{C}_d[X]$ et un voisinage V_i de z_i dans $\mathbb{C}$ tels que

$$G_i = \{(P, z) \in U_i \times V_i \ : \ P(z) = 0\}$$

soit le graphe d'une application continue de U_i dans V_i. On peut supposer les V_i disjoints, et les U_i tous égaux à un voisinage U de P_0. Alors $\pi^{-1}(U)$ contient la réunion des G_i qui sont disjoints. Comme tout $P \in U$ a au plus d racines, on a $\pi^{-1}(U) = \cup_i G_i$. Donc U est un ouvert trivialisant de π et π est un revêtement. $\square$

Proposition 27. — *Soit $p : X \to B$ un homéomorphisme local surjectif, avec X compact. Alors p est un revêtement.*

Démonstration. — Soit $b \in B$. Alors $p^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini. Soit W_i un voisinage ouvert de x_i tel que $p_{|W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant x. Quitte à les rétrécire, on peut supposer les W_i deux à deux disjoints. Soit $(y_k) \subset X$ une suite telle que $p(y_k)$ tend vers b. Toute sous-suite convergente de (y_k) converge vers un point de $p^{-1}(b)$. Par conséquent, pour k assez grand, $y_k \in \bigcup_i W_u$. On conclut qu'il existe un voisinage ouvert U de b, contenu dans $\bigcap_i U_i$, tel que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Posons $V_i = (p_{|W_i})^{-1}(U)$. Alors pour tout i, l'application $p_{|V_i} : V_i \to U$ est un homéomorphisme. Par construction, $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des ouverts V_i. □

Remarque 28. — Soient X et B deux espaces topologiques séparés et $p : X \to B$ un homéomorphisme local surjectif. Il n'est pas vrai en général que p est un revêtement ; la démonstration de la proposition 27 implique cependant que c'est vrai si p est à fibres finies.

Exemple 29. — L'ensemble $\mathbf{P}^n\mathbb{R}$ des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ s'identifie au quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par l'action de $\mathbb{R}^*$, ou encore de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'action de $\{+1, -1\}$. On munit $\mathbf{P}^n\mathbb{R}$ de la topologie quotient (les deux topologies quotient coïncident). L'application $f : \mathbb{S}^n \to \mathbf{P}^n\mathbb{R}$ qui à un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe la droite vectoriel qu'il engendre est un revêtement.

Démonstration. — Soit $p \in \mathbf{P}^n\mathbb{R}$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \cdots : 0 : 1]$. Si $q \in \mathbf{P}^n\mathbb{R}$ est proche de p, il admet des coordonnées homogènes de la forme $[x_0 : \cdots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}}(x_0, \dots, x_n)$$

est l'unique vecteur unitaire sur la droite q dont la dernière coordonnée est strictement positive. Il dépend continûment de q. Il y a deux telles applications réciproques locales de f, donc f est un revêtement. □

Théorème 30. — *Soit X un espace topologique et G un groupe opérant sur X façon que, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ soit continue. On fait l'hypothèse suivante :*

(L) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $g \neq e$ dans G, $gU \cap U = \emptyset$.

Alors X est un revêtement de $G\backslash X$.

Démonstration. — Notons $p : X \to G\backslash X$ l'application quotient. L'ensemble $B := G\backslash X$ est naturellement muni de la topologie quotient pour laquelle un ensemble $V \subset B$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(V)$ est ouvert dans X. L'application p est alors continue ; elle est de plus ouverte, car le saturé $G \cdot U$ de tout ouvert U de X, est encore ouvert.

Soit $x \in X$ et U un voisinage de x comme dans l'hypothèse (L). Alors $V = p(U)$ est ouvert dans B et l'hypothèse $gU \cap U = \emptyset$ entraîne que p induit une bijection de U sur V. Cette bijection est continue et ouverte, donc est un homéomorphisme. De plus,

$$p^{-1}(V) = G \cdot U = \bigcup_{g \in G} gU$$

où la réunion est disjointe. Et, pour tout $g \in G$, la restriction de p à gU est composée de $g^{-1} : gU \to U$ et de $p : U \to V$, donc est un homéomorphisme de gU sur V. La préimage $p^{-1}(V)$ est donc homéomorphe au produit $V \times G$, où G est muni de la topologie discrète, de telle manière que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU & \longrightarrow & V \times F \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & V & \end{array}$$

soit commutatif. Puisque p est surjective, ceci implique que $p : X \to B$ est un revêtement. □

Remarque 31. — Les hypothèses du théorème sont satisfaites si X est un espace **localement compact** (*i.e.* un espace séparé dont tout point admet un voisinage compact) et G un groupe qui agit continûment sur X ainsi que :

1. **librement**, *i.e.* si $x \in X$ et $g \neq 1$, alors $gx \neq x$; et
2. **proprement**, *i.e.* si $K \subset X$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.

On en déduit que, sous ces hypothèses, $p : X \to G\backslash X$ est un revêtement. De plus, sous ces hypothèses, l'espace $B = G\backslash X$ est séparé.

Démonstration. — Vérifions l'hypothèse (L). Soit $x \in X$. Soit V un voisinage compact de x. Comme X est séparé et comme l'intersection de V et de l'orbite de x est un ensemble fini, les points de $G \cdot x \cap V = \{x = g_0 x, g_1 x, \ldots, g_n x\}$ admettent des voisinages U_i deux à deux disjoints dans V. Alors $U = \cap_i g_i^{-1}(U_i)$ est un voisinage de x dont les translatés par des éléments de G sont deux à deux disjoints.

Montrons que $B = G\backslash X$ est séparé. Soient x_1 et x_2 dans X tels que $p(x_1) \neq p(x_2)$. Soit V_1 (resp. V_2) un voisinage compact de x_1 (resp. x_2) tel que les translatés de V_1 (resp. V_2) par des éléments de G soient deux à deux disjoints. Comme X est séparé et comme l'intersection de V_2 et de l'orbite de x_1 est un ensemble fini de points tous distincts de x_2, on peut supposer que $G \cdot x_1 \cap V_2 = \emptyset$. Notons alors $V = V_1 \cup V_2$. Puisque V est compact il n'existe qu'un ensemble fini $\{g_0 = 1, g_1, \ldots, g_n\}$ d'éléments g dans G tels que $V \cap gV_2 \neq \emptyset$. Alors $V_1' = V_1 - \cap_{i=0}^n g_i V_2$ est un voisinage de x_1 qui ne rencontre aucun translaté de V_2. On a donc $G \cdot V_1' \cap G \cdot V_2 = \emptyset$ et les voisinages $p(V_1')$ de $p(x_1)$ et $p(V_2)$ de $p(x_2)$ sont disjoints. □

Exemple 32. — 1. L'application $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à deux éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$..

2. Soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1\}$ le groupe cyclique à n éléments, agissant par multiplication sur $\mathbb{S}^1$. Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n$, $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.
3. Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de 2π. Alors G agit librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.
4. Le premier exemple admet la généralisation suivante. Notons $\mathbb{G}_p(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathbb{R}^n$ (**grassmannienne**), et $\tilde{\mathbb{G}}_p(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p *orientés.* On munit $\mathbb{G}_p(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}_p(\mathbb{R}^n)$) de la topologie obtenue en le considérant comme quotient de la **variété de Stiefel** $\mathbb{V}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{np}$ formé des familles orthonormales $(x_1, \ldots, x_p)$ dans $\mathbb{R}^n$ par l'action du groupe $O(p)$ (resp. $SO(p)$). Alors $\tilde{\mathbb{G}}_p(\mathbb{R}^n)$ est un revêtement de degré 2 de $\mathbb{G}_p(\mathbb{R}^n)$, non trivial si $1 \leq p \leq n-1$.

3.2. Morphismes de revêtements. — Soient $p : X \to B$ et $p' : X' \to B$ deux revêtements de même base. On appelle **morphisme** (de revêtement) de X vers X' une application continue $f : X \to X'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, *i.e.* $p' \circ f = p$. Si f est une bijection, on parle d'**isomorphisme** (de revêtement).

Remarque 33. — 1. Si X' est connexe, un morphisme injectif est automatiquement un isomorphisme, lequel est automatiquement un homéomorphisme.

2. Un revêtement est trivial si et seulement s'il est isomorphe au revêtement trivial $B \times F \mapsto B$ (avec F ensemble discret non vide) obtenu en projetant sur le premier facteur. Un tel isomorphisme est appelé une **trivialisation**.
3. Dans le dernier cas si F a plus d'un élément, $B \times F$ n'est jamais connexe. Un revêtement $p : X \to B$ avec X connexe n'est trivial que si c'est un homéomorphisme.

Exemple 34. — Soir $G \subset \mathbb{R}^n$ le groupe engendré par n translations linéairement indépendantes. Le revêtement associé est isomorphe au produit de n copies du revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

Démonstration. — Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $G = \mathbb{Z}^n$ est l'ensemble des translations par les vecteurs à coordonnées entières. $\square$

Une **section** de p est une application continue $s : B \to X$ telle que $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Une **section au-dessus de** $B' \subset B$ est une section de $p_{|p^{-1}(B')}$, *i.e.* définie seulement au-dessus de B'. Une **section locale** en b est une section définie sur un voisinage de b.

Remarque 35. — Une section s au-dessus de B' est automatiquement un homéomorphisme de B' sur $s(B')$. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point b, exactement autant que d'images réciproques de b. Si B est connexe, deux section qui coïncident en un point sont égales.

3.3. Simple connexité. — On dit qu'un espace X est **simplement connexe** si $X \neq \emptyset$ et si tout revêtement de X est trivial.

Remarque 36. — Tout espace simplement connexe est connexe.

Démonstration. — En effet si X n'est pas connexe on peut former un revêtement trivial sur chaque composante connexe mais dont les fibres n'ont pas toutes le même cardinal. □

Exemple 37. — Tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ est simplement connexe.

Démonstration. — Soit $p : X \to [a, b]$ un revêtement d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit (U_i) un recouvrement ouvert de $[a, b]$ par des ouverts trivialisants. D'après le lemme 3, il existe une suite finie croissante $(t_0, \dots, t_n)$ avec $t_0 = a$, $t_n = b$ telle que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \exists i \text{ tel que } [t_{k-1}, t_k] \subset U_i.$$

On voit par récurrence sur k en appliquant le lemme suivant que X est un revêtement trivial. □

Lemme 38. — *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a < b < c$ et $p : X \to [a, c]$ un revêtement. Si p est trivial au-dessus de $[a, b]$ et de $[b, c]$, alors p est un revêtement trivial.*

Démonstration. — Soient $\tau_1 : p^{-1}([a, b]) \to [a, b] \times F_1$ et $\tau_2 : p^{-1}([b, c]) \to [b, c] \times F_2$ des trivialisations. On définit un homéomorphisme $\gamma : F_1 \to F_2$ par $(b, \gamma(y)) = \tau_2(\tau_1^{-1}(b, y))$. En posant

$$\tau(x) = \begin{cases} (\mathrm{Id} \times \gamma)(\tau_1(x)) & \text{si } x \in p^{-1}([a, b]) \\ \tau_2(x) & \text{si } x \in p^{-1}([b, c]), \end{cases}$$

on obtient une bijection $X \to [a, c] \times F_2$. Il résulte du lemme 2 appliqué à τ et τ^{-1} que τ est un homéomorphisme, donc une trivialisation. □

On dit qu'un espace X est **localement simplement connexe** si tout point de X possède une base de voisinages simplement connexes.

Les résultats du paragraphe suivant permettront d'exhiber de nombreux espaces (localement) simplement connexes. Avant cela, remarquons que si X est un revêtement de B et Y un revêtement de X, l'espace Y n'est pas nécessairement un revêtement de X (voir T.D. pour un exemple). La proposition qui suit donne deux critères pour qu'il en soit ainsi.

Proposition 39. — 1. *Si $p : X \to B$ est un revêtement fini, tout revêtement de X est un revêtement de B.*

2. *Si B est localement simplement connexe, tout revêtement d'un revêtement de B est un revêtement de B.*

Démonstration. — Soit $b \in B$ et U un voisinage trivialisant de b. Notons $(U_t)_{t\in F}$ les ouverts de X tels que $p^{-1}(U)$ soit réunion disjointe des ouverts U_t et $p_{|U_t}; U_t \to U$ soit un homéomorphisme. Notons x_t la préimage de b dans U_t.

Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement. Pour tout $t \in F$, fixons $V_t \subset U_t$ un voisinage trivialisant de x_t.

Si U est simplement connexe, alors on peut prendre $V_t = U_t$ et U est un voisinage de b au-dessus duquel $\pi \circ p$ est un revêtement trivial.

Si F est fini, l'intersection $\cap_{t\in F} p(V_t)$ est un voisinage de b au-dessus duquel $\pi \circ p$ est un revêtement trivial. □

3.4. Théorèmes de relèvements. — Soit $p : X \to B$ un revêtement. Soit $f : E \to B$ une application continue. Un **relèvement** de f à X est une application $\tilde{f} : E \to X$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $e_0 \in E$, $b_0 \in B$, et un relèvement $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ dans X, on parle de **relèvement d'origine** x_0.

Lemme 40. — *Lorsque E est connexe, quand f admet un relèvement d'origine x_0, il est unique.*

Démonstration. — Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements d'origine x_0. Alors

$$\{e \in E \ : \ \tilde{f}(e) = \tilde{f}'(e)\}$$

est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(e)$, p est un homéomorphisme, donc pour e' proche de e, l'équation $p(x) = f(e')$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(e)$, c'est $\tilde{f}(e') = \tilde{f}'(e)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est E, donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. □

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel.

Proposition 41. — *Soit $p : X \to B$ un revêtement. Tout application continue $f : [0,1] \to B$ admet un relèvement. Si on fixe $b_0 \in B$ et un relèvement $x_0 \in X$ de b_0, il existe un unique relèvement $\tilde{f}$ d'origine x_0.*

Démonstration. — Notons

$$f^*X = \{(t,x) \in [0,1] \times X \ : \ f(t) = p(x)\}.$$

Muni de la topologie quotient, c'est un espace topologique et la première projection $f^*X \to [0,1]$ est un revêtement. La préimage d'un point $t \in [0,1]$ s'identifie à la préimage $p^{-1}(f(t))$.

Puisque $[0,1]$ est simplement connexe, le revêtement f^*X est trivial, donc il existe une section (et une seule) de f^*X passant par le point $(0, x_0)$. À cette (unique) section correspond un (unique) relèvement $\tilde{f}$ d'origine x_0. □

On appelle **chemin** dans B toute application continue $f : [0,1] \to B$. Un **lacet** est un chemin c dont les deux extrémités $c(0)$ et $c(1)$ sont confondues.

Remarque 42. — La construction de f^*X, utilisée dans la démonstration de la proposition 41, est générale : Soient B et E deux espaces topologiques, $p : X \to B$ un revêtement et $f : E \to B$ une application continue. L'espace topologique

$$E \times_B X = \{(e,x) \in E \times X \ : \ f(e) = p(x)\}$$

est appelé **produit fibré** de E et de X. Muni de la première projection, il forme un revêtement de E que l'on note f^*X. La fibre de f^*X au-dessus d'un point $e \in E$ s'identifie à la fibre de X au-dessus du point $f(e)$.

Au vu de la remarque précédente la démonstration de la proposition 41 implique la proposition suivante.

Proposition 43. — *Soient $p : X \to B$ un revêtement, $b_0 \in B$ un point base, $x_0 \in X$ un relèvement de b_0. Soit E un espace simplement connexe, avec point base e_0. Toute application continue $f : E \to B$ envoyant e_0 en b_0 possède un (unique) relèvement à X d'origine x_0.*

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

Proposition 44. — *Soient B et B' deux espace topologiques, $p : X \to B$ un revêtement et $h : [0,1] \times B' \to B$ une homotopie entre deux applications f et $g : B' \to B$. Fixons des points bases $b_0 \in B$, $b'_0 \in B'$ et un relèvement $x_0 \in X$ de b_0. Si f possède un relèvement d'origine x_0, il en est de même de h, et par conséquent de g.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, pour chaque $b' \in B'$, le chemin $c_{b'} : t \mapsto h(t, b')$ possède un unique relèvement $\tilde{c}_{b'}$ d'origine $\tilde{f}(b')$. On pose $\tilde{h}(t, b') = \tilde{c}_{b'}(t)$. Pour montrer que $\tilde{h}$ est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, *i.e.* que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin $c_{b'}$, c'est utiliser la simple connexité de $[0,1]$ et donc faire appel à un nombre fini de sections locales définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $c_{b'}([0,1])$. Les mêmes sections locales permettent de relever $c_{b''}$ pour b'' proche de b'. □

Corollaire 45. — *Tout espace contractile est simplement connexe.*

Démonstration. — On applique la proposition 44 avec $B' = B$, f l'application constante égale à b_0 et $g = \mathrm{Id}_B$. On en déduit que tout revêtement de B admet une section globale et donc que B est simplement connexe. $\square$

Corollaire 46. — *Soient c_1 et c_2 deux chemins dans B de mêmes extrémités b et b'. Soit $x_0 \in X$ un relèvement de b_0. Soient $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ les relèvement de c_1 et c_2 d'origine x_0. Si c_1 et c_2 sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{c}_1(1) = \tilde{c}_2(1)$. En particulier, si c est un lacet homotope à une constante, $\tilde{c}$ est un lacet.*

Démonstration. — Par hypothèse, l'homotopie h de c_1 à c_2 vérifie $h(t,1) = b'$ pour tout t. Son relèvement $\tilde{h}$ vérifie donc $\tilde{h}(t,1) \in p^{-1}(b')$ pour tout t. Comme $p^{-1}(b')$ est discret, $\tilde{h}(t,1)$ ne dépend pas de t, donc $\tilde{c}_1(1) = \tilde{h}(0,1) = \tilde{h}(1,1) = \tilde{c}_2(1)$. $\square$

Un espace topologique X est **localement connexe** (resp. **par arcs**) si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).

Proposition 47. — *Soit $p : X \to B$ un revêtement. Supposons B localement connexe par arcs. Soit X' une composante connexe de X. Alors $p_{|X'} : X' \to B$ est un revêtement.*

Démonstration. — Soient $b \in B$ et U un voisinage trivialisant de b. Il existe alors des sections s_i au-dessus de U telles que $p^{-1}(U)$ soit réunion disjointe des $s_i(U)$. Quitte à rétrécir U, on peut le supposer connexe. Alors les $s_i(U)$ sont connexes, donc chacun est ou bien contenu dans ou bien disjoint de X'. Par conséquent,

$$p_{|X'}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap X' = \bigcup_{\{i \,:\, s_i(U) \subset X'\}} s_i(U).$$

$\square$

Le corollaire 46 implique la généralisation suivante du corollaire 45.

Proposition 48. — *Soit B un espace localement connexe et* **simplement connexe par arcs**, *i.e. connexe par arcs et tel que tout lacet dans B soit homotope à une constante. Alors, B est simplement connexe.*

Démonstration. — D'après la proposition 47, il suffit de montrer que tout revêtement connexe de B est trivial. Soient $p : X \to B$ un revêtement connexe, $b \in B$, x et $x' \in p^{-1}(b)$. Comme X est localement connexe par arcs et connexe, il est connexe par arcs, donc il existe un chemin c de x à x'. C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ c$. Par hypothèse γ est homotope à une constante dans B et d'après le corollaire 46 c est un lacet. Par suite $x = x'$ et X est de degré 1 donc trivial. $\square$

Exemple 49. — La sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n est simplement connexe dès que $n \geq 2$, (voir figure 7).

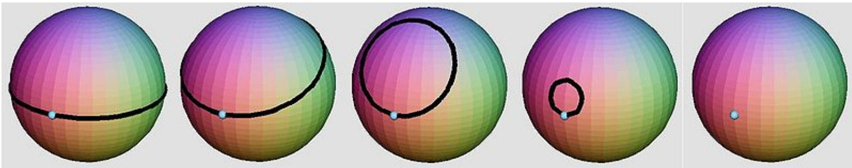

FIG. 7. La sphère est simplement connexe. (Figure provenant de Wikipedia)

Démonstration. — Montrons que la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe par arcs dès que $n \geq 2$. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ un lacet.

Supposons pour commencer que c évite au moins un point $u \in \mathbb{S}^n$. Comme $\mathbb{S}^n - \{u\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, le lacet c est homotope à une constante dans $\mathbb{S}^n - \{u\}$, et *a fortiori* dans $\mathbb{S}^n$.

Pour se ramener au cas ci-dessus, on montre que c est homotope à un lacet qui évite un point. Notons p la projection radiale $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^n$. Montrons que c est homotope à une ligne brisée, *i.e.* un lacet $\beta = p \circ \alpha$ où $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ est affine par morceaux. Par continuité uniforme, il existe un entier N tel que si $|t - t'| \leq 1/N$, $|c(t) - c(t')| < 1/2$. Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application continue qui coïncide avec c aux multiples de $1/N$ et est affine entre deux multiples consécutifs. Soit $F(s,t) = (1-s)c(t) + s\alpha(t)$ l'homotopie affine de c à α. Pour chaque $j = 1, \ldots, N$, la boule de rayon $1/2$ centrée en $c(j/N)$ contient $c\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]\right) \cup \alpha\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]\right)$ donc elle contient aussi $F\left([0,1] \times \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]\right)$. Autrement dit, l'image de F ne contient pas 0. L'application $G = p \circ F$ est donc une homotopie de c à $\beta = p \circ \alpha$ dans $\mathbb{S}^n$. L'image de β est contenue dans une réunion finie de grands cercles, donc si $n \geq 2$, elle ne recouvre pas la sphère. $\square$

Remarque 50. — La réciproque à la proposition 48 est fausse en général, voir [**6**, p. 129].

Une deuxième démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss. — Cette fois *via* la théorie des revêtements.

Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré d et soit F une primitive de f (c'est-à-dire un polynôme tel que $F' = f$). On suppose que f ne s'annule en aucun point.

Lemme 51. — *L'application $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un revêtement de degré $d+1$.*

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{C}$. La fibre $F^{-1}(z)$ est discrète puisque F' ne s'annule en aucun point. Elle est également compacte puisque, F étant un polynême de degré $d + 1 \neq 0$,

$$|F(w)| \to +\infty, \qquad \text{lorsque } |w| \to +\infty.$$

La fibre $F^{-1}(z)$ est donc finie. Puisque F' ne s'annule en aucun point, F est un homéomorphisme local. Et par connexité de $\mathbb{C}$, le cardinal des fibres est constant donc égale à $d+1$. Il découle enfin de la remarque 28 que F est un revêtement. $\square$

Le plan complexe $\mathbb{C}$ étant contractile il est simplement connexe. La conclusion du lemme 51 n'est donc possible que si $d = 0$.

4. Revêtements universels

On va voir qu'un espace topologique "raisonnable" B admet un revêtement connexe plus grand que tous les autres (les autres en sont des quotients), c'est celui qui est simplement connexes. C'est aussi un espace sur lequel toutes les fonctions multiformes évoquées au début de ce chapitre deviennent de "vrai" fonctions (uniformes).

À titre d'exemple la proposition suivante classifie les revêtements du cercle.

Proposition 52. — *Tout revêtement connexe du cercle est isomorphe ou bien au revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, ou bien à l'un (et un seul) des revêtements $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$.*

Démonstration. — Soit $p : E \to \mathbb{S}^1$ un revêtement. L'application exponentielle $t \mapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$ admet un relèvement $f : \mathbb{R} \to E$. Alors f est un morphisme de revêtements.

Si f est injective, f est un isomorphisme, c'est fini. Supposons f non injective. Si $t < t' \in \mathbb{R}$ et $f(t) = f(t')$, alors $e^{it} = e^{it'}$ donc $t - t'$ est un multiple entier strictement positif de 2π. Soit $2\pi n$ le plus petit multiple rencontré, c'est-à-dire tel qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $f(t_0 + 2\pi n) = f(t_0)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons $c_s = p \circ f_{|[s,s+2\pi n]}$. C'est un lacet dans $\mathbb{S}^1$. Comme tous les c_s sont homotopes et puisque c_{t_0} admet un relèvement à E, il en est de même de c_s. Comme le relèvement $\tilde{c}_{t_0}$ est un lacet, il en est de même de $\tilde{c}_s$. Autrement dit, $f(s + 2\pi n) = f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par conséquent, f passe au quotient en $g : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \to E$ qui est un morphisme de revêtements injectif, donc un isomorphisme.

Le degré permet de distinguer les revêtements $z \mapsto z^n$ entre eux. En effet, si $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ et $p' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sont des revêtements et $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homéomorphisme tel que $p' \circ h = p$, alors

$$\deg(p) = \deg(h)\deg(p') = \pm\deg(p').$$

$\square$

4.1. Définitions et premières propriétés. — Soit (B, b_0) un **espace pointé**, *i.e.* un espace topologique B muni d'un point $b_0 \in B$ appelé **point base**, que nous supposerons connexe. On appelle **revêtement pointé** de (B, b_0) un revêtement $p : X \to B$ muni d'un point $x_0 \in X$ tel que $p(x_0) = b_0$.

On appelle **revêtement pointé universel** de (B, b_0) tout revêtement pointé (E, e_0) vérifiant la propriété (dite universelle) suivante :

$$\begin{aligned} &\forall p : X \to B \text{ revêtement}, \quad \forall x \in p^{-1}(b_0), \\ &\exists f : E \to X \text{ morphisme unique tel que } f(e_0) = x. \end{aligned} \tag{2}$$

Remarque 53. — 1. Lorsque X est connexe, $f : E \to X$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement X comme à un revêtement intermédiaire entre B et E.

2. Il découle de (2) que deux revêtements pointés universels de (B, b_0) sont isomorphes de manière unique.

Exemple 54. — Les revêtements finis du cercle $z \mapsto z^n$, $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.

Nous supposerons dorénavant B localement connexe.

Proposition 55. — *Pour qu'un revêtement pointé $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ soit universel, il faut et il suffit que E soit connexe et que pour tout revêtement X de B, le revêtement p^*X soit trivial.*

Démonstration. — Supposons que (E, e_0) soit un revêtement pointé universel. Montrons d'abord que E est connexe. Soit F un ouvert fermé de E contenant e_0. Alors l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{cclc} E & \to & B \times \{0, 1\} & \\ e & \mapsto & (p(e), 0) & \text{si } e \in F \\ e & \mapsto & (p(e), 1) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

est un morphisme de revêtements qui envoie e_0 sur $(b_0, 0)$. D'après la propriété universelle elle coïncide donc avec le morphisme $E \to B \times \{0, 1\}$ qui à $e \in E$ associe $(p(e), 0)$. Donc $F = E$ et E est connexe.

Soit maintenant X un revêtement de B, montrons que p^*X est trivial. Soit $x \in X$ au-dessus de b_0. D'après la propriété universelle de E, il existe un morphisme de revêtements $f : E \to X$ tel que $f(e_0) = x$. Alors l'application $e \mapsto (e, f(e))$ définit une secton globale de p^*X passant par (e_0, x). Le revêtement p^*X est donc trivial.

Pour conclure montrons la réciproque. Soient $\pi : X \to B$ un revêtement et $x \in \pi^{-1}(b_0)$. Puisque p^*X est trivial, par (e_0, x) il passe une section $E \to p^*X$, et une seule puisque E est connexe. À cette section correspond un unique morphisme de revêtements $f : E \to X$ tel que $f(e_0) = x$. □

Corollaire 56. — *Soient $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ un revêtement pointé universel, $b \in B$ et $e \in p^{-1}(b)$. Alors (E, e) est un revêtement pointé universel de (B, b).*

On dira que E est un **revêtement universel** de B s'il existe un point $b \in B$ et un point $e \in E$ au-dessus de b tels que (E, e) soit un revêtement pointé universel de (B, b). Deux revêtements universels de B sont isomorphes, mais pas de manière unique. Il n'y a même pas de façon naturelle de choisir un isomorphisme, de sorte qu'on ne peut pas identifier tous les revêtements de B entre eux. Il faut pour cela choisir des points bases. Par abus de langage on parle néanmoins couramment "du" revêtement universel de B. Nous concluons par un second corollaire de la proposition 55.

Corollaire 57. — *Tout revêtement simplement connexe est universel.*

4.2. Construction du revêtement universel. — Dans ce paragraphe nous donnons deux démonstration du théorème clef suivant. La première générale, et dans l'esprit de la Note de Poincaré, explique pourquoi il est naturel de croire en l'existence d'un revêtement universel. La seconde, constructive, fonctionne sous l'hypothèse plus restrictive que l'espace est localement simplement par arcs mais permet de construire le revêtement universel.

Théorème 58. — *Tout espace connexe, localement simplement connexe admet un revêtement simplement connexe et donc universel.*

Première démonstration. — Soient B un espace connexe, localement simplement connexe, et b un point base dans B. Considérons une famille de revêtements pointés

$$(p_\lambda : (X_\lambda, x_\lambda) \to (B, b))_{\lambda \in \Lambda}.$$

Pour toute paire (X_λ, X_μ) de tels revêtements, on peut former le produit fibré

$$p_\lambda^* X_\mu = X_\lambda \times_B X_\mu = p_\mu^* X_\lambda.$$

La composante connexe du point base (x_λ, x_μ) dans le produit fibré $X_\lambda \times_B X_\mu$ est un revêtement pointé $(X_{\lambda\mu}, x_{\lambda\mu})$ de (X_λ, x_λ) et de (X_μ, x_μ).

$$\begin{tikzcd} & X_{\lambda\mu} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_\lambda \arrow[dr] & & X_\mu \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Puisque B est localement simplement connexe, on peut alors former la limite projective selon un ensemble de revêtements pointés connexes de (B, b) représentant toutes les classes d'isomorphismes de revêtements pointés connexes de (B, b). La composante connexe de la limite des points bases est un revêtement pointé (E, e) de (B, b) et il découle de la propriété universelle (2) que (E, e) est un revêtement pointé universel de (B, b).

Pour conclure montrons que E est simplement connexe. Soit (Y, y) un revêtement connexe pointé de (E, e). L'espace Y est un revêtement de B donc il existe un morphisme de revêtements pointés de (E, e) vers (Y, y) et la projection $Y \to E$ est un isomorphisme. Par suite tout revêtement connexe est trivial et tout revêtement, somme de revêtements connexes, est trivial. $\square$

Deuxième démonstration. — Soient B un espace connexe, localement simplement connexe par arcs, et b_0 un point base dans B. Soit C_{b_0} l'espace des chemins d'origine b_0 dans B, muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est un espace topologique contractile [(2)]. On note

$$\tilde{p} : C_{b_0} \to B, \quad c \mapsto c(1).$$

Soit $b \in B$ et soient c_0 et c_1 deux chemins de b_0 à b. Une **homotopie à extrémités fixées** de c_0 à c_1 est une famille $(h_s)_{s\in[0,1]}$ de chemins de b_0 à b, telle que $h_0 = c_0$, $h_1 = c_1$ et que l'application $(s,t) \mapsto h_s(t)$ de $[0,1]^2$ dans B soit continue. On dit alors que c_0 et c_1 sont homotopes à extrémités fixées ou comme chemins, ce que l'on note $c_0 \sim c_1$.

Lemme 59. — *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — Soient (h_s) et (h'_s) deux homotopies à extrémités fixées avec $h_1 = h'_0$. Alors

$$H(s,t) = \begin{cases} h_{2s}(t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h'_{2s-1}(t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

est une homotopie à extrémités fixées de h_0 à h'_1. □

On note

$$E = C_{b_0}/\sim$$

l'espace quotient de C_{b_0} par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Il est connexe par arc. L'application $\tilde{p}$ passe au quotient en une application continue $p : E \to B$, $[c] \mapsto c(1)$.

L'application p est un revêtement. — Soient $b \in B$ et U un voisinage simplement connexe par arcs de b. Le voisinage U est en particulier connexe par arcs. Notons Λ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins reliant b_0 à b. Fixons un représentant c_λ de chaque classe. Pour chaque $b' \in U$, fixons un chemin $\gamma_{b'}$ reliant b à b' dans U. On peut faire suivre le chemin c_λ par $\gamma_{b'}$, après renormalisation on obtient un chemin de b_0 à b' :

$$(c_\lambda \cdot \gamma_{b'})(t) = \begin{cases} c_\lambda(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_{b'}(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Le chemin ainsi obtenu est la **juxtaposition** de c_λ et $\gamma_{b'}$. Notons s_λ l'application de U dans E définie par

$$s_\lambda(b') = [c_\lambda \cdot \gamma_{b'}].$$

L'application s_λ est clairement injective. Montrons qu'elle est continue. Soit V un voisinage connexe par arcs de b' dans U. Pour chaque $b'' \in V$, fixons un chemin $\gamma_{b',b''}$ reliant b' à b'' dans V'. Notons $\gamma_{b''}^{-1}$ le chemin, reliant b'' à b, obtenu en parcourant

[(2)] Poser $c_s(t) = c(st)$ définit une rétraction par déformation jusqu'au chemin constant.

$\gamma_{b''}$ dans le sens inverse. Comme le lacet $\gamma_{b'} \cdot \gamma_{b',b''} \cdot \gamma_{b''}^{-1}$, entièrement contenu dans U, est homotope à une constante dans B. On a alors

$$s_\lambda(b'') = [c_\lambda \cdot \gamma_{b''}] = [c_\lambda \cdot \gamma_{b'} \cdot \gamma_{b',b''}].$$

À condition de paramétrer le produit de façon que le troisième facteur, $\gamma_{b',b''}$, soit paramétré par un petit voisinage de 1, on réalise ainsi les $s_\lambda(b'')$, $b'' \in V'$, par des chemins uniformément proches de $c_\lambda \cdot \gamma_{b'}$ qui réalise $s_\lambda(b')$. Cela prouve que s_λ est continue en b'.

Enfin, pour tout chemin c de b_0 à un point b' de U, le chemin $c \cdot \gamma_{b'}^{-1}$ est homotope à l'un des c_λ, donc $[c] = s_\lambda(b')$. On conclut que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda(U),$$

où la réunion est disjointe.

L'espace E est simplement connexe (par arcs). — Soit σ un lacet dans E. Alors $\alpha = p \circ \sigma$ est un lacet dans B. Pour chaque $t \in [0,1]$, $\sigma(t)$ est (la classe homotopie d')un chemin de x_0 à $\alpha(t)$. Pour t petiti, le lacet $\sigma(t)^{-1} \cdot \alpha_{|[0,t]}$ est homotope à une constante. Par continuité (à homotopie près), cette propriété persiste pour tout t. Par conséquent, le lacet $\sigma(1)$ est homotope à α. Autrement dit, puisque σ est un lacet, α est homotope à une constante. Par relèvement des homotopies on en déduit que σ est également homotope à une constante. □

Remarque 60. — Par uncité du revêtement universel, lorsque B est localement simplement connexe par arcs (par exemple lorsque B est localement contractile) on a B simplement connexe si et seulement si B est simplement connexe par arcs. Dans ce cas on se permet de confondre les deux notions.

Exemple 61. — Soit B le graphe obtenu en reliant deux cercles disjoints par un segment. Alors le revêtement universel de B est un arbre infini de valence 3.

5. Théorie de Galois

5.1. Revêtements galoisiens. — Un revêtement $p : X \to B$ est dit **galoisien** si le groupe $\mathrm{Aut}_B(X)$ des automorphismes de X opère transitivement sur chaque fibre de X.

Remarque 62. — Si X est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre.

Démonstration. — L'ensemble des $b \in B$ tels que $\mathrm{Aut}_B(X)$ agisse transitivement sur $p^{-1}(b)$ est une réunion d'ouverts trivialisants, donc est ouvert et fermé. □

Si $p : X \to B$ est galoisien, le groupe $\mathrm{Aut}_B(X)$ est appelé **groupe de Galois** de X.

Exemple 63. — Les revêtements triviaux, le revêtement universel sont galoisiens.

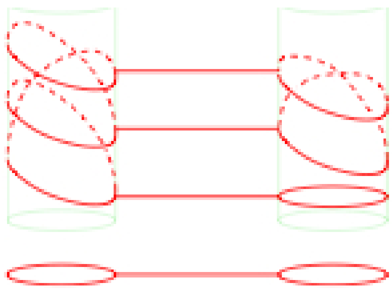

FIG. 8. Un revêtement non galoisien

Démonstration. — Soient $p : E \to B$ le revêtement universel de B et $b \in B$. Étant donné deux éléments $e, e' \in p^{-1}(b)$, il existe un unique isomorphisme de revêtement $f : E \to E$ tel que $f(e) = e'$. $\square$

Remarque 64. — Dans l'exemple du revêtement universel, l'action du groupe de Galois est **simplement transitive** sur les fibre, *i.e.* transitive et libre.

Exemple 65. — Sous les hypothèses du théorème 30, si X est connexe, X est un revêtement galoisien de $G\backslash X$.

Les revêtements de l'exemple 32 sont donc tous galoisiens.

Démonstration. — Tout élément de G définit un automorphisme de X comme revêtement de $G\backslash X$, et G opère transitivement sur les fibres de $X \to G\backslash X$ par définition. $\square$

Exemple 66. — Le revêtement représenté dans la figure 8 n'est pas galoisien.

5.2. Le groupe fondamental comme groupe de Galois. — Soient B un espace connexe et localement simplement connexe et $p : E \to B$ un revêtement universel. On appelle **groupe fondamental** de B le groupe $\mathrm{Aut}_B(E)$; on le note G. Le groupe fondamental opère de façon simplement transitive sur chaque fibre.

Remarque 67. — Attention : le revêtement universel E n'est pas uniquement déterminé. Le groupe fondamental G n'est donc pas uniquement déterminé par B, seule sa classe d'isomorphisme l'est.

Ceci n'est pas sans poser problème et sera résolu par l'introduction d'un point base et la considération de lacets. En attendant nous suivons la première approche de Poincaré.

5.3. Le théorème de Galois pour les revêtements. — Soit B un espace connexe et localement simplement connexe. Dans ce paragraphe on fixe un revêtement universel $p : E \to B$. Le groupe $G = \mathrm{Aut}_B(E)$ est alors bien défini (mais dépend aussi de E !).

Lemme 68. — *Soit H un sous-groupe de G. Notons $X = H\backslash E$ l'espace quotient. Alors, la projection p passe au quotient en un revêtement $p_H : X \to B$.*

Démonstration. — L'application p passe au quotient par définition même des automorphismes de revêtement. Si $b \in B$, soit U un voisinage trivialisant de b dans B, *i.e.* il existe des sections locales s_λ au-dessus de U, indexées par les éléments de $\Lambda = p^{-1}(b)$, telles que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda(U).$$

Le groupe G agit simplement transitivement sur Λ, soit $M \subset \Lambda$ un sous-ensemble qui contient exactement un représentant de chaque orbite de H. Alors, pour chaque $\mu \in M$, l'ouvert

$$V_\mu = \bigcup_{h \in H} s_{h\mu}(U)$$

coupe chaque orbite de H en un point et un seul. Cela définit une section $s'_\mu : U \to X$ de p_H au-dessus de U et

$$p_H^{-1}(U) = \bigcup_{\mu \in M} V_\mu$$

(réunion disjointe), donc p_H est un revêtement. □

Remarque 69. —
1. Si l'on suppose de plus que B est séparé, alors X est automatiquement séparé puisque c'est un revêtement de B.
2. Il résulte de la démonstration du lemme 68 que la projection canonique $\xi : E \to H\backslash E$ est un morphisme de revêtement.

Puisque E est un revêtement universel de B, le produit fibré $E \times_B X$ est un revêtement trivial de E. Plus précisemment, l'application

$$\varepsilon : E \times (G/H) \to E \times_B X, \quad (t, gH) \mapsto (t, \xi(g^{-1} \cdot e)) \tag{3}$$

est un isomorphisme de revêtements de E qui vérifie

$$\varepsilon(g_1 \cdot t, g_1 gH) = g_1 \cdot \varepsilon(t, gH). \tag{4}$$

Ici G opère diagonalement (à gauche) sur le produit $E \times (G/H)$ et opère sur $E \times_B X$ *via* son action sur E. L'application (3) passe au quotient sous l'action de G pour donner un isomorphisme

$$G\backslash(E \times (G/H)) \xrightarrow{\simeq} X$$

de revêtements de B.

Étant donné deux sous-groupes H et K dans G on peut donc former deux revêtements $X = H\backslash E$ et $Y = K\backslash E$ de B. À tout morphisme de revêtements $f : X \to Y$, il correspond un morphisme de revêtements de E :

$$p^*f : p^*X = E \times_B X \to p^*Y = E \times_B Y$$

qui vérifie

$$p^*f(g \cdot (t,x)) = g \cdot p^*f(t,x). \tag{5}$$

Composé au but et à la source par les isomorphismes (3) le morphisme p^*f induit un morphisme canonique entre les revêtements triviaux $E \times (G/H)$ et $E \times (G/K)$ de E. Notons f_* l'application induite entre G/H et G/K. Il découle de (4) et (5) que l'application f_* appartient à $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$ l'ensemble des applications φ de G/H dans G/K compatibles avec l'opération de G, *i.e.* telles que

$$\varphi(g \cdot s) = g \cdot \varphi(s) \quad (g \in G,\ s \in G/H).$$

Théorème 70. — 1. *Tout revêtement connexe de B est isomorphe à un quotient $H\backslash E$ du revêtement universel E par un sous-groupe H de $G = \mathrm{Aut}_B(E)$.*

2. *Le revêtement $X = H\backslash E$ est galoisien si et seulement si H est distingué dans G. Le groupe de Galois du revêtement est alors isomorphe au groupe quotient G/H.*
3. *Deux revêtements $H\backslash E$ et $K\backslash E$ sont isomorphes si et seulement si les groupes H et K sont conjugués dans G.*
4. *L'application qui à un morphisme de revêtements $f : H\backslash E \to K\backslash E$ fait correspondre $f_* \in \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$ est bijective.*

Démonstration. — 1. Soit X un revêtement connexe de B. Puisque E est un revêtement universel de B, le produit fibré $E \times_B X$ est un revêtement trivial de E. Une section $E \to E \times_B X$ de ce revêtement correspond à la donnée d'un morphisme $f : E \to X$ de revêtements de B. [3] Notons $S(X)$ l'ensemble de ces morphismes. Le groupe G opère par $(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$ sur $S(X)$. Montrons que cette action est transitive. Choisissons $b_0 \in B$, $t_0 \in p^{-1}(b_0)$ et $f_0, f_1 : E \to X$ deux morphismes de revêtement. Puisque X est connexe le morphisme f_0 est surjectif, il existe donc $t \in p^{-1}(b_0)$ tel que $f_0(t) = f_1(t_0)$. Puisque G agit transitivement sur les fibres de E, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot t = t_0$, et les morphismes f_1 et $f_0 \circ g^{-1}$, qui coïncident en t_0, sont égaux (propriété universelle (2)). Fixons $f_0 \in S(X)$ un point base et notons H le stabilisateur de f_0 dans G. Alors $S(X)$ est en bijection avec G/H. Et le lemme suivant implique le premier point du théorème 70.

---

[3] On reconstruit la section à partir de f par la formule :

$$t \in E \mapsto (t, f(t)) \in E \times_B X.$$

Lemme 71. — *Le revêtement X est isomorphe au quotient $H\backslash E$.*

Démonstration. — L'application

$$\varepsilon_X : E \times S(X) \to E \times_B X, \quad (t, f) \mapsto (t, f(t))$$

est un isomorphisme de revêtements de E qui vérifie :

$$\varepsilon_X(g \cdot t, f \circ g^{-1}) = g \cdot \varepsilon(t, f),$$

où G opère sur $E \times_B X$ *via* son action sur E.

D'un côté $E \times S(X)$ est isomorphe au revêtement trivial $E \times (G/H)$ de G de façon compatible avec les actions de G et

$$G\backslash(E \times (G/H)) \cong H\backslash E.$$

De l'autre côté les fibres de $E \times_B X \to X$ sont les mêmes que les fibres de $E \to B$, donc G opère transitivement dessus. Donc

$$G\backslash(E \times_B X) \cong X.$$

□

Nous allons déduire les points 2 et 3 du point 4. Commençons donc par démontrer ce dernier. L'injectivité de l'application $f \mapsto f_*$ résulte de la définition. Montrons la surjectivité. Soient $X = H\backslash E$ et $Y = K\backslash E$. À un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$ il correspond un morphisme $\varphi_* : E \times (G/H) \to E \times (G/K)$ défini par $\varphi_*(t, g) = (t, \varphi(g))$. Le morphisme φ_* est compatible avec les actions diagonales de G au but et à la source. *Via* les isomorphismes (3) on peut transporter φ_* en un morphisme $\varphi_! : E \times_B X \to E \times_B Y$ compatible avec les actions de G sur E. On en déduit finalement une application continue f de $X = G\backslash(E \times_B X)$ dans $Y = G\backslash(E \times_B Y)$ et $f \in \mathrm{Hom}_B(X, Y)$. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \times (G/H) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & E \times (G/K) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
E \times_B X \arrow[r, "\varphi_!"] \arrow[d] & E \times_B Y \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

implique alors que $f_* = \varphi$ et donc que l'application $f \mapsto f_*$ est surjective.

3. Si $f : H\backslash E \to K\backslash E$ est un isomorphisme de revêtements de B, alors $f_* \in \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$ est bijective, $f_* \circ (f^{-1})_* = \mathrm{Id}_{G/K}$ et $(f^{-1})_* \circ f_* = \mathrm{Id}_{G/H}$. Soit $g_0 \in G$ tel que $f_*(H) = g_0K$. Pour tout $h \in H$, on a alors

$$hg_0K = hf_*(H) = f_*(hH) = f_*(H) = g_0K$$

soit $H \subset g_0Kg_0^{-1}$. Finalement en remplaçant f_* par $(f^{-1})_*$ on obtient $H = g_0Kg_0^{-1}$. La réciproque est immédiate.

2. Notons ξ la projection canonique $E \to X$; c'est un morphisme de revêtement. Il définit donc un point base dans $S(X)$ et une identification canonique entre G/H

et $S(X)$ donnée par $gH \mapsto \xi \circ g^{-1}$. Le groupe G opère naturellement sur G/H et le stabilisateur de $gH \in G/H$ est gHg^{-1}. D'un autre côté, le groupe $\mathrm{Aut}_B(X)$ opère naturellement sur G/H *via* son action $(g, f) \mapsto g \circ f$ sur $S(X)$. Et le revêtement X est galoisien si et seulement si $\mathrm{Aut}_B(X)$ opère transitivement sur $S(X)$ (un élément de $S(X)$ est un relèvement de p à X). Les actions de G et $\mathrm{Aut}_B(X)$ commutent. Donc si $\mathrm{Aut}_B(X)$ opère transitivement sur $S(X)$ les stabilisateurs dans G de tous les points de $S(X) = G/H$ sont égaux, et H est distingué.

Réciproquement, si H est distingué, l'action (à gauche) de G sur E descend en une action de G agit (par automorphismes de revêtement) sur $X = H\backslash E$. Cette action est transitive sur chaque fibre avec pour stabilisateur H. On a donc $\mathrm{Aut}_B(X) = G/H$. $\square$

Exemple 72. — 1. Il y a autant de revêtements du cercle, à isomorphisme près, que de sous-groupes dans $\mathbb{Z}$.

2. Tout revêtement à deux feuillets est galoisiens.

3. Le revêtement de l'exemple 66, à trois feuillets, n'est pas galoisien.

Remarque 73. — Si $X \to B$ est le revêtement connexe associé à un sous-groupe H de G, la démonstration du théorème 70 implique que

$$\mathrm{Aut}_B(X) \cong N_G(H)/H,$$

où $N_G(H)$ le **normalisateur** de H dans G est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g^{-1}Hg \subset H$.

5.4. L'exemple donné par Poincaré. — Dans la Note reproduite au début de cours, Poincaré considère l'exemple suivant. Soit A une matrice dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. La matrice A agit linéairement sur $\mathbb{Z}^2$ en préservant le résaux $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ elle passe donc au quotient en un homéomorphisme

$$h_A : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

Le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une surface appelée **tore** ; elle est homéomorphe au produit de deux cercles $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Notons-la T. Son revêtement universel est $\mathbb{R}^2$ et son groupe fondamental est $\mathbb{Z}^2$. La figure suivante illustre la manière dont le plan $\mathbb{R}^2$ revêt la surface T.

À partir du tore T et de l'homéomorphisme h_A on peut former une variété de dimension 3 compacte sans bord par **suspension** :

$$V = (T \times [0, 1])/(x, 0) \sim (h_A(x), 1)$$

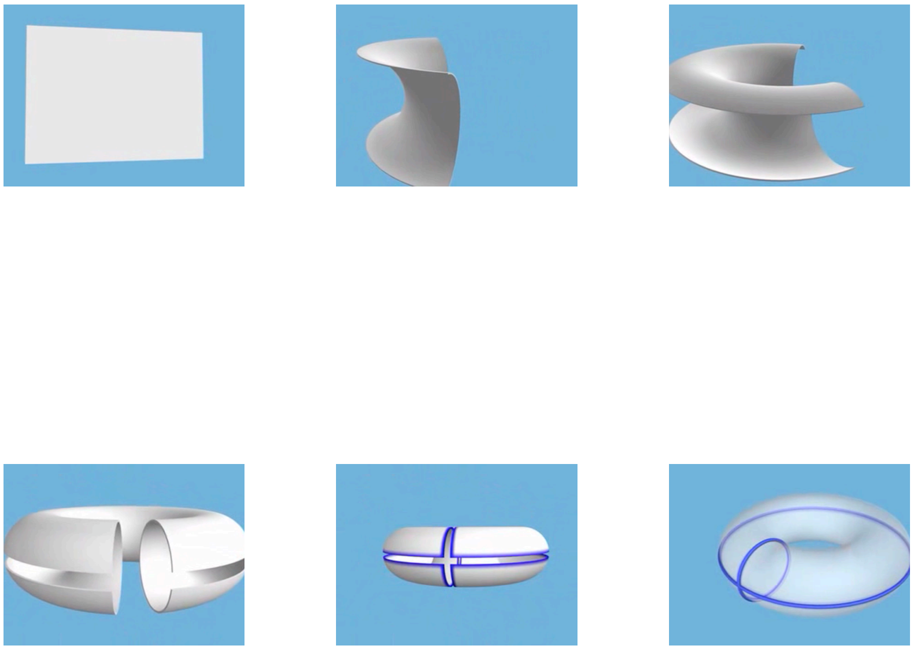

FIG. 9. La tore revêtu par le plan. (Images extraites d'une vidéo produite par l'université de Hanovre - Groupe de Topologie - 2004)

muni de la topologie quotient. (Voir figure 10 pour des images de la suspension d'un tore privé d'un point par l'homomorphisme h_A associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.)$$

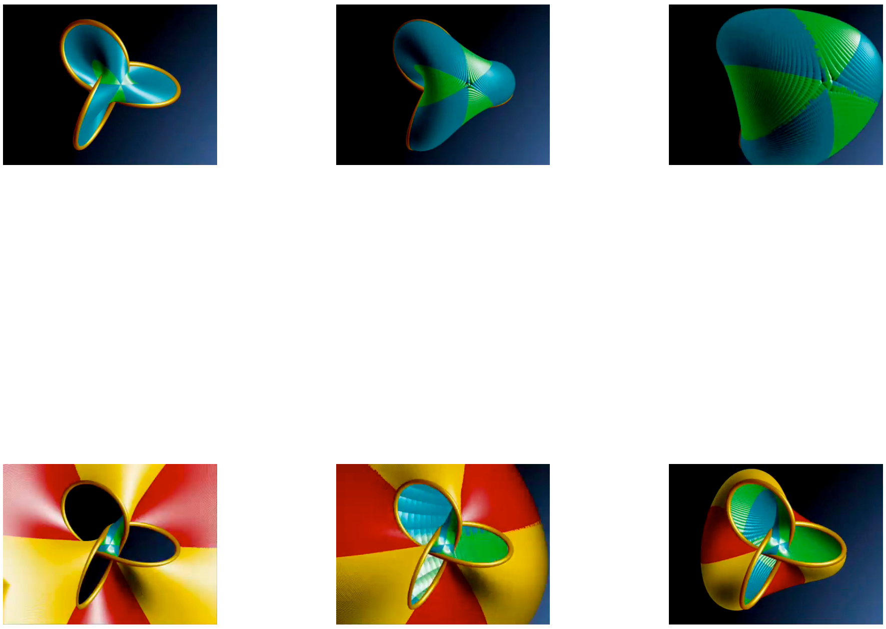

Fig. 10. Suspension du tore privé d'un point et noeud de trèfle. (Images tirés d'un film d'Étienne Ghys et Jos Leys)

Proposition 74. — *Le groupe fondamental de V est isomorphe au sous-groupe des transformations linéaires affines* $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^3$ *de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par les transformations*

$$X \mapsto S_1 : X+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 : X \mapsto X+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad S_3 : X \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $X \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration. — Notons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ engendré par S_1, S_2 et S_3. Le sous-ensemble $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ est laissé invariant par S_1 et S_2 alors que

$$S_3^k(\mathbb{R}^2 \times [0,1]) = \mathbb{R}^2 \times [k,k+1] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Un élément de G qui laisse stable $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ est donc un produit de $S_3^k S_i S_3^{-k}$ avec $i = 1, 2$ et $k \in \mathbb{Z}$. Mais un calcul simple montre que

$$S_3^k S_1 S_3^{-k}(X) = X + \begin{pmatrix} A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_3^k S_2 S_3^{-k}(X) = X + \begin{pmatrix} A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il résulte donc du fait que A est à coefficients entiers que

$$\forall g \in G - \{e\}, \quad g(]0,1[^3) \cap]0,1[^3 = \emptyset. \tag{6}$$

Il est par ailleurs immédiat que

$$\bigcup_{g \in G} g([0,1]^3) = \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

On dit que le cube $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ est un **domaine fondamental** pour l'action de G sur $\mathbb{R}^3$. Il résulte de l'existence de ce domaine fondamental que le groupe G agit sur l'espace (localement compact) et simplement connexe $\mathbb{R}^3$. On obtient donc un revêtement universel

$$\mathbb{R}^3 \to G \backslash \mathbb{R}^3$$

de groupe de Galois G. Remarquons enfin que si $g \in G$ vérifie

$$g([0,1]^3) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset,$$

alors

$$g = S_1^{\pm 1},\ S_2^{\pm 1},\ (S_1 S_2)^{\pm 1},\ (S_1 S_2^{-1})^{\pm 1} \text{ ou } S_3^{\pm}.$$

Le quotient $G \backslash \mathbb{R}^3$ s'identifie donc à la variété V. □

Lemme 75. — *Deux groupes G_1 et G_2 associés, comme ci-dessus, à deux matrices A_1 et A_2 dans* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ *sont isomorphes si et seulement si la matrice A_1 est conjuguée à A_2 ou A_2^{-1} dans* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Démonstration. — La conjugaison par une matrice de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ correspond à un changement de base à coefficients entiers dans les deux premières coordonnées. Les deux groupes fondamentaux sont immédiatement isomorphes.

Réciproquement, notons S_1^i, S_2^i et S_3^i les générateurs de G_i. Le sous-groupe Λ_i engendré par S_1^i et S_2^i dans G_i est un sous-groupe abélien libre de rang 2 distingué maximal. Un isomorphisme $f : G_1 \to G_2$ vérifie donc $f(\Lambda_1) = \Lambda_2$. Identifions, *via* les générateurs S_1^2 et S_2^2, le groupe Λ_2 à $\mathbb{Z}^2$. Il existe alors une matrice $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $f(S_1^1) = P S_2^1$ et $f(S_2^1) = P S_2^2$. Puisque les quotients G_i / Λ_i sont monogènes engendrés par l'image de S_3^i, on peut supposer que $f(S_3^1)^{\pm} = S_3^2$. Mais l'action (par conjugaison) de S_3^2 sur Λ_2 est codée par la matrice A_2 alors l'action de $f(S_3^1)$ est codée par la matrice $P^{-1} A_1 P$. □

Exemple 76. — Les variétés V_1 et V_2 associées aux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas homéomorphes. Elles possèdent néanmoins les même nombres de Betti.

Démonstration. — Les variétés V_1 et V_2 n'ont pas le même groupe fondamental. Pour ceux qui connaissant l'homologie, c'est un exercice de vérifier que ces deux variétés ont les même nombres de Betti. □

Le groupe fondamental est donc un invariant topologique fin. Poincaré affirme même (trop vite) que deux variétés compactes ayant le même groupe fondamental sont homéomorphes. Ce résultat est faux en général :

Exemple 77. — Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{C}^2$ *via*

$$\zeta \cdot (z_1, z_2) = (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

où $\zeta = e^{2i\pi/p}$. Chacune de ces action induit une action propre et libre sur la sphère

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

On appelle **espaces lenticulaires** $L(p, q)$ les espaces quotients correspondant. Chaque espace $L_{p,q}$ a donc pour groupe fondamental $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En 1935 Reidemeister montrera pourtant que

$$L(p, q) \text{ est homéomorphe à } L(p, q') \Leftrightarrow q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod p.$$

Poincaré affaiblira par la suite son affirmation en proposant l'énoncé suivant démontré en 2003 par Perelman.

Théorème 78. — *Toute variété de dimension* 3 *compacte et simplement connexe est homéomorphe à la sphère* $\mathbb{S}^3$.

La conjecture suivante due à Borel est encore largement ouverte et est peut-être ce qui se rapproche le plus de l'affirmation initiale de Poincaré.

Conjecture 79. — *Soient V_1 et V_2 deux variétés compactes dont les revêtements universels sont contractiles. Si V_1 et V_2 ont des groupes fondamentaux isomorphes alors V_1 et V_2 sont homéomorphes.*

6. Lacets

Dans cette section nous décrivons le groupe fondamental comme groupe de lacets. C'est un deuxième point de vue, également introduit par Poincaré, plus propre au calcul.

6.1. Définition. — Soit (B, b_0) un espace pointé. On appelle **lacet** dans (B, b_0) un chemin dans B de b_0 à b_0.

Théorème 80. — *L'ensemble $\pi_1(B, b_0)$ des classes d'homotopie de lacets est un groupe pour la loi de juxtaposition.*

Démonstration. —

1. Les relations $\alpha \sim \alpha'$ et $\beta \sim \beta'$ entraînent $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$.

   En effet, soit F (resp. G) une homotopie de α à α' (resp. de β à β'). Alors H définie par
$$\begin{cases} H(s,t) = F(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s,t) = G(s, 2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
   est une homotopie de $\alpha \cdot \beta$ à $\alpha' \cdot \beta'$.

2. On a $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

   En effet, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \circ \phi$ où ϕ est une application de $[0, 1]$ dans lui-même, homotope à l'identité.

3. Soit b_0 le lacet constant basé en b_0. Alors $\alpha \cdot b_0 \sim b_0 \cdot \alpha \sim \alpha$.

   Idem.

4. On a $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim \alpha^{-1} \cdot \alpha \sim b_0$.

   En effet, l'application H définie par
$$\begin{cases} H(s,t) = \alpha(2ts) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(s,t) = \alpha^{-1}(1 - (2-2t)s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
   est une homotopie du lacet constant à $\alpha \cdot \alpha^{-1}$.

□

On appelle $\pi_1(B, b_0)$ le **groupe de Poincaré** de (B, b_0).

Remarque 81. — Si b_0 et b_1 sont deux points de B dans la même composante connexe par arcs, les groupes $\pi_1(B, b_0)$ et $\pi_1(B, b_1)$ sont isomorphes. On notera abusiment $\pi_1(B)$ ces groupes.

Démonstration. — Soit β un chemin dans B de b_0 à b_1. Alors, l'application $\gamma \mapsto \beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}$ est un isomorphisme de $\pi_1(B, b_0)$ sur $\pi_1(B, b_1)$. □

En particulier, l'espace B est simplement connexe par arcs s'il est connexe par arcs et s'il existe un point $b_0 \in B$ tel que $\pi_1(B, b_0) = \{e\}$. S'il en est ainsi, pour tout $b \in B$, on a $\pi_1(B, b) = \{e\}$.

Exemple 82. — Si B est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\pi_1(B, b)$ est trivial.

Démonstration. — L'application $F(s,t) = sb + (1-s)\alpha(t)$ est une homotopie du lacet α au lacet constant. □

Exemple 83. — Le groupe de Poincaré du cercle $\mathbb{S}^1$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est donné par le degré $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Un lacet α basé en 1 dans $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\}$ définit une application continue $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *via* $f(e^{2i\pi t}) = \alpha(t)$. On peut donc parler du degré de α et deux lacets homotopes ont même degré et l'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes. Deux lacets de même degré sont homotopes : soit θ (resp. η) le relèvement de α (resp. β) tel que $\theta(0) = \eta(0) = 0$, l'application $F(s,t) = e^{i(1-s)\theta(2\pi t)+s\eta(2\pi t))}$ est une homotopie de α à β. Il en résulte que le morphisme deg est injectif. Les lacets $z \mapsto z^n$ montrent qu'il est surjectif. $\square$

Exemple 84. — La sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension $n \geq 2$ a un groupe de Poincaré trivial.

Exemple 85. — La figure 11 représente la construction d'une sphère (topologique) plongée dans $\mathbb{R}^3$ et dont l'extérieur n'a pas un groupe de Poincaré trivial. La figure 12 représente quant à elle la construction d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ dont toutes les composantes connexes sont des points mais dont le complémentaire n'a pas un groupe de Poincaré trivial.

Proposition 86. — *Soient (B, b_0) et (B', b'_0) deux espaces topologiques pointés. Le morphisme*

$$\pi_1(B \times B', (b_0, b'_0)) \to \pi_1(B, b_0) \times \pi_1(B', b'_0)$$

défini par les projections est un isomorphisme.

Démonstration. — Un lacet dans $(B \times B', (b_0, b'_0))$ est donné par un couple (γ, γ') où γ (resp. γ') est un lacet dans (B, b_0) (resp. (B', b'_0)). De même, une homotopie dans $(B \times B', (b_0, b'_0))$ est donnée par un couple d'homotopies. La proposition en découle. $\square$

Exemple 87. — Le groupe de Poincaré du tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$. La figure **??** explique pourquoi le groupe de Poincaré du tore T^2 est abélien.

6.2. Naturalité du groupe de Poincaré. — Soit $f : (B, b_0) \to (B', b'_0)$ une application continue entre espaces pointés. Pour tout lacet c dans (B, b_0), $f \circ c$ est un lacet dans (B', b'_0) et l'application $c \mapsto f \circ c$ est compatible avec la relation d'homotopie et la juxtaposition. L'application f induit donc un morphisme de groupes

$$f_* : \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(B', b'_0).$$

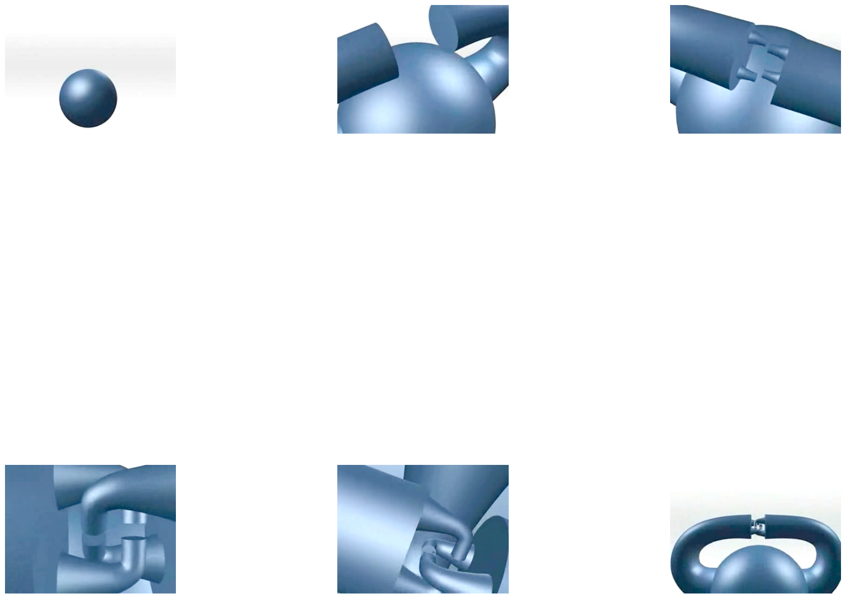

FIG. 11. La sphère cornue d'Alexander. (Images extraites d'une vidéo produite par l'université de Hanovre - Groupe de Topologie - 2004)

Proposition 88. — *Si f et $g : (B, b_0) \to (B', b'_0)$ sont deux applications continues entre espaces pointés et sont homotopes, alors $f_* = g_*$.*

Si B et B' sont connexes par arcs et ont même type d'homotopie, alors $\pi_1(B)$ et $\pi_1(B')$ sont isomorphes. En particulier, la simple connexité est un invariant d'homotopie.

Démonstration. — L'homotopie et la composition des chemins sont conservés par composition des applications. □

Corollaire 89. — *Le cercle $\mathbb{S}^1$ n'a pas le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^n$ ou $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.*

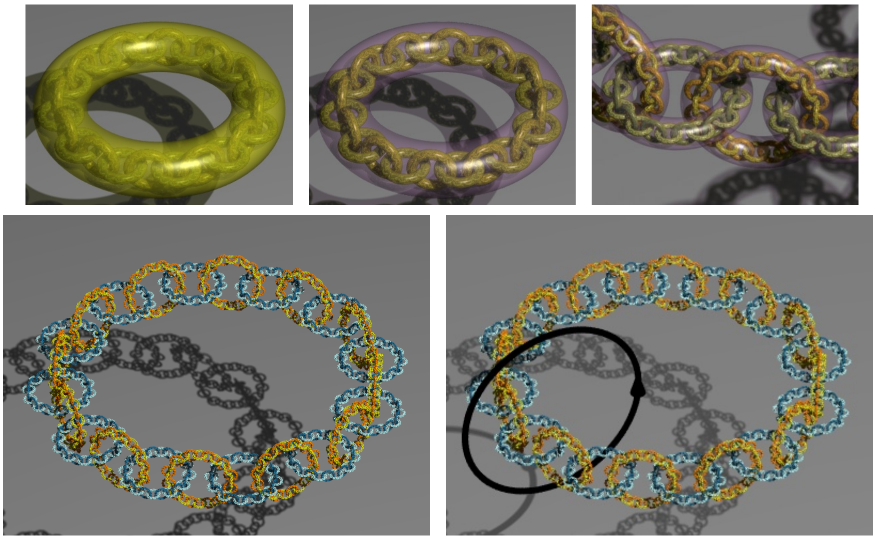

FIG. 12. Le collier d'Antoine. (Images réalisé par Arnaud Chéritat (Université de Toulouse) la revue Images des maths)

6.3. Groupe de Poincaré et groupe fondamental. — Soient $p : X \to B$ un revêtement et $b_0 \in B$. Il résulte du corollaire 46 que le groupe de Poincaré $\pi_1(B, b_0)$ agit sur la fibre $p^{-1}(b_0)$. Considérons en effet un élément $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ et un point $x \in p^{-1}(b_0$. Choisissons un lacet c dans (B, b_0) représentant γ. Son relèvement $\tilde{c}$ d'origine x se termine en un point $x' \in p^{-1}(x_0)$ qui ne dépend pas du choix de c. On note ce point $\gamma \cdot x$. L'application $(\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x$ est une action du groupe $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$. Cette action est transitive, car un chemin de x à x' est le relèvement de son image dans B.

Théorème 90. — *Soient B un espace localement simplement connexe par arcs et $b_0 \in B$. Soit $p : E \to B$ un revêtement universel de X. À chaque choix de relèvement e_0 de b_0 correspond un unique isomorphisme*

$$\pi_1(B, b_0) \cong \mathrm{Aut}_B(E).$$

Démonstration. — On sait que le groupe $\pi_1(B, b_0)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$. De plus, puisque E est simplement connexe par arcs, si un lacet c dans (B, b_0) se relève en un lacet $\tilde{c}$ dans E alors $\tilde{c}$, et donc c, est homotope à une constante. L'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$ est donc simplement transitive. Cette action, qui ne fait pas intervenir le choix d'un point base dans E, commute avec l'action à gauche de $\mathrm{Aut}_B(E)$. Fixons un relèvement e_0. L'application, évidemment bijective, $\pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Aut}_B(E)$ qui à $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ associe l'unique $f \in \mathrm{Aut}_B(E)$ tel que $f(e_0) = \gamma \cdot e_0$ est un isomorphisme de groupes. $\square$

On appelle aussi **groupe fondamental pointé** le groupe de Poincaré $\pi_1(B, b_0)$, il est isomorphe au groupe fondamental, mais cette fois il est complètement déterminé par la donnée de l'espace pointé (B, b_0).

Proposition 91. — *Soient $p : (X, x_0) \to (B, b_0)$ un revêtement pointé connexe de (B, b_0). Alors $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ est injectif et son image est le stabilisateur de x_0.*

Démonstration. — Soit c un lacet dans (X, x_0) tel que $\alpha = p \circ c$ soit homotope à constante. Alors l'homotopie de α au lacet constant b_0 se relève en une homotopie de c à un lacet contenu dans une fibre, donc constant. On conclut que c est trivial dans $\pi_1(X, x_0)$, donc que p_* est injectif.

Un élément de $\pi_1(B, b_0)$ qui fixe x_0, c'est la classe d'homotopie d'un lacet α dont le relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine x_0 est un lacet. Alors $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ représente un élément de l'image de p_*.

Réciproquement, si α est un lacet dans (B, b_0) qui est homotope à un lacet de la forme $p \circ \beta$ où β est un lacet dans (X, x_0), alors $(p \circ \beta^{-1}) \cdot \alpha$ est homotope au lacet constant b_0, donc se relève en un lacet d'origine x_0. Mais l'unique relèvement est nécessairement $\beta^{-1} \cdot \tilde{\alpha}$, donc $\tilde{\alpha}$ est un lacet basé en x_0, *i.e.* il fixe x_0. □

De cette proposition et du théorème de Galois pour les revêtements on déduit :

Corollaire 92. — *Soit (B, b_0) un espace pointé connexe et localement simplement connexe par arcs.*

1. *Pour tout sous-groupe H de $\pi_1(B, b_0)$, il existe un revêtement pointé connexe (X, x_0) de (B, b_0), et un seul à isomorphisme unique près, tel que l'image de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(B, b_0)$ soit H.*
2. *Un revêtement pointé connexe (X, x_0) de (B, b_0) est galoisien si et seulement si l'image de $\pi_1(X, x_0)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, b_0)$. Dans ce cas $\mathrm{Aut}_B(X)$ est isomorphe au groupe quotient*
$$\pi_1(B, b_0)/\pi_1(X, x_0).$$

Concluons ce paragraphe par un critère général de relevabilité.

Théorème 93. — *Soient $p : (X, x_0) \to (B, b_0)$ un revêtement connexe pointé, (Y, y_0) un espace pointé connexe et localement connexe par arcs et $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ une application continue entre espaces pointés. Alors f possède un relèvement d'origine x_0 si et seulement si*
$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0)).$$
Le relèvement est alors unique.

Démonstration. — Supposons que f possède un relèvement $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Alors $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ donc son image est contenue dans celle de p_*.

Réciproquement, supposons que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$. Soit $y \in Y$ et γ un chemin de y_0 à y. Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de x_0 à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine x_0. Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si γ' est un autre lacet de y_0 à y, alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_*(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans B est homotope à un lacet de la forme $p_*(\beta)$ où β est un lacet dans (X, x_0). Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et α' sont homotopes à extrémités fixées dans B. Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine x_0 de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, donc que le point $\tilde{f}(y) \in X$ ne dépend pas du choix du chemin γ. La continuité de $\tilde{f}$ résulte finalement de la continuité du procédé de relèvement des chemins. □

Exemple 94. — Une application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par n. Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par n.

7. Le théorème de Van Kampen

Le but de cette section est de déterminer le groupe fondamental d'un espace B obtenu comme réunion $U_1 \cup U_2$ de deux espaces tels que l'on connaisse les groupes fondamentaux de U_1, U_2 et $U_0 = U_1 \cap U_2$. Dans toute cette section, on suppose que U_1 et U_2 sont ouverts, et que U_0, U_1 et U_2 sont connexes par arcs. On fixe un point base $b_0 \in U_0$ et on note $G_0 = \pi_1(U_0, b_0)$, $G_1 = \pi_1(U_1, b_0)$, $G_2 = \pi_1(U_2, b_0)$ et $G_2 = \pi_1(B, b_0)$.

7.1. Un résultat partiel. — Les groupes G_1 et G_2 s'envoient naturellement dans G.

Lemme 95. — *Le groupe G est engendré par les images de G_1 et G_2.*

Démonstration. — Soit $\gamma : [0, 1] \to B$ un lacet basé en b_0. On veut écrire γ comme un produit de lacets contenus alternativement dans U_1 et U_2. Soit $F_i = \gamma^{-1}(B - U_i)$. Soit N un entier tel que $1/N$ soit un nombre de Lebesgue pour le recouvrement de $[0, 1]$ par les deux ouverts $\gamma^{-1}(U_i)$ (voir lemme 3). Alors chaque intervalle $[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ est envoyé par γ dans U_1 ou dans U_2. Parmi les j/N, ne conservons que ceux pour lesquels on change d'ouvert. Autrement dit, on extrait des j/N une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ telle que

1. pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $\gamma(t_j) \in U_0$,
2. l'image $\gamma_j = \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{\varepsilon(j)}$ où $\varepsilon(j)$ vaut alternativement 1 et 2.

Soit α_j un chemin de b_0 à $\gamma(t_j)$ dans U_0 (lorsque $j = 0$ ou k, prendre le chemin constant), soit $\beta_j = \alpha_{j-1} \cdot \gamma_j \cdot \alpha_j^{-1} \subset U_{\varepsilon(j)}$. Alors la classe d'homotopie de $\gamma = \beta_k \cdots \beta_1$ est un produit d'éléments appartenant alternativement à G_1 et G_2. □

Corollaire 96. — *Si U_0 est connexe par arcs et U_1, U_2 simplement connexes, alors B est simplement connexe.*

7.2. Produit amalgamé de deux groupes. — On fait une parenthèse en théorie des groupes. Fixons donc deux groupes abstraits G_1 et G_2.

Théorème 97. — *Soient G_0 un groupe et $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ deux morphismes de groupes. Alors, il existe un groupe G, unique à isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.*

1. *Il existe des morphismes $k_i : G_i \to G$, $i = 1, 2$, tels que $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.*
2. *Inversement, étant donnés un groupe H et des morphismes $h_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$, tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, il existe un morphisme unique $h : G \to H$ tel que $h_1 = h \circ k_1$, $h_2 = h \circ k_2$.*

La démonstration de ce théorème occupe le reste de ce paragraphe. On appelle le groupe G produit par le théorème 97 le **produit amalgamé** de G_1 et G_2 au-dessus de G_0 ; on le note

$$G = G_1 *_{G_0} G_2.$$

La point 2 du théorème est une propriété universelle que doit vérifier G. L'unicité de G résulte immédiatement de cette propriété universelle. Partant de deux solutions G et G' du problème, la propriété universelle appliquée à chacun d'entre eux donne deux morphismes $h : G \to G'$ et $h' : G' \to G$. Puis on constate que $h' \circ h : G \to G$ est solution du problème universel pour $H = G$, d'où $h' \circ h = \mathrm{id}_G$.

Le point délicat consiste donc à démontrer l'existence de G. Nous commençons par un cas particulier important ; celui où G_0 est le groupe trivial.

On appelle **produit libre** de deux groupes G_1 et G_2 leur produit amalgamé au-dessus du groupe trivial ; on le note $G_1 * G_2$.

Construction du produit libre. — Notons S la réunion des ensembles G_1 et G_2 et notons $s_i : G_i \to S$, $i = 1, 2$, les injections canoniques et M la réunion disjointe

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n.$$

Sur M on définit la loi de composition :

$$((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_q)) \in S^p \times S^q \mapsto (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in S^{p+q}.$$

Cette loi est associative et a un élément neutre : la suite vide, unique élément de S^0. Étant donnés un groupe H et des morphismes $h_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$, on définit une application $\alpha_{h_1,h_2} : S \to H$ par $\alpha_{h_1,h_2} \circ s_i = h_i$, $i = 1, 2$, et une application $\beta_{h_1,h_2} : M \to H$ par $\beta_{h_1,h_2}(x_1, \dots, x_p) = \alpha_{h_1,h_2}(x_1) \cdots \alpha_{h_1,h_2}(x_p)$. Dans M écrivons $x \sim y$ si, pour tout groupe H et pour tous morphismes h_i comme au-dessus, on a $\beta_{h_1,h_2}(x) = \beta_{h_1,h_2}(y)$. C'est une relation d'équivalence compatible avec la loi de composition sur M, d'où une loi quotient sur $G = M/\sim$ qui est associative et possède un élément neutre ; de plus, en notant χ l'application canonique $M \to G$, l'élément $\chi(x_1, \ldots, x_p)$ de G admet pour inverse $\chi(x_p^{-1}, \ldots, x_1^{-1})$. Donc G est un groupe. Identifions S à S^1 et notons k_i le morphisme $\chi \circ s_i$. Le groupe G muni des morphismes k_i est le produit libre recherché.

Exemple 98. — Le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ s'appelle le **groupe libre (non abélien) à deux générateurs**.

Exemple 99. — En général, $G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3$. On peut donc noter $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ le **groupe libre à n générateurs**.

Démonstration du théorème 97. — Soit N le sous-groupe distingué engendré par les $f_1(g_0)f_2(g_0^{-1})$ pour $g_0 \in G_0$. Soit G le groupe quotient $G_1 * G_2/N$, avec les morphismes $k_1 : G_1 \to G_1 * G_2 \to G$ et $k_2 : G_2 \to G_1 * G_2 \to G$. Par construction, pour tout $g_0 \in G_0$, on a $f_1(g_0)f_2(g_0^{-1}) \in N$ donc $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$.

Il nous reste à vérifier la propriété universelle. Soit donc H un groupe et $h_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$, des morphismes tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$. Alors, le morphisme induit $\overline{h} : G_1 * G_2 \to H$ est trivial que N, donc passe au quotient en $h : G \to H$ qui vérifie $h_1 = h \circ f_1$ et $h_2 = h \circ f_2$. Inversement, tout morphisme $h : G \to H$ tel que $h_1 = h \circ f_1$ et $h_2 = h \circ f_2$, se relève en un morphisme $G_1 * G_2 \to H$ trivial sur N, donc il n'y a aucun choix pour h. On conclut que $G = G_1 *_{G_0} G_2$. □

Remarque 100. — Lorsque les morphismes f_1 et f_2 sont injectifs, les morphismes k_1 et k_2 sont injectifs. Dans ce cas, on peut penser à G_0 comme à un sous-groupe commun à G_1 et G_2, et à $G_1 *_{G_0} G_2$ comme le produit libre dans lequel on s'est arrangé pour que chaque élément de G_0 n'apparaisse qu'une seule fois.

7.3. Théorème de Van Kampen.

— On reprend les notations du §7.1.

Théorème 101. — *Le morphisme naturel*

$$G_1 *_{G_0} G_2 \to G,$$

où le produit amalgamé est relatif aux morphismes $f_1 : G_0 \to G_1$ et $f_2 : G_0 \to G_2$ induits par les injections $U_0 \to U_1$ et $U_0 \to U_2$, est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons $\overline{h} : G_1 * G_2 \to G$ le morphisme naturel. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr] & \\ U_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \\ & U_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(où chaque application est l'inclution naturelle correspondante) est commutatif, il en est de même au niveau des groupes fondamentaux. Autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr] & \\ G_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & G \\ & G_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est commutatif et il y a un morphisme naturel $h : G_1 *_{G_0} G_2 \to G$. Il résulte en outre du lemme 95 que h est surjectif. Il reste à voir que le sous-groupe distingué N engendré par les $f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1}$, $g_0 \in G_0$ contient le noyau de $\overline{h}$.

Soit donc $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ un lacet dans (B, b_0), obtenu par juxtaposition de lacets $\gamma_j \subset G_{\sigma(j)}$, et homotope à une constante (*i.e.* $[\gamma] \in \ker(\overline{h})$). Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to B$ une telle homotopie, dans laquelle $F(0,t)$, $t \in [\frac{j'-1}{k}, \frac{j'}{k}]$ est une paramétrisation de $\gamma_{j'}$. On applique le lemme 3 au recouvrement du carré $[0,1] \times [0,1]$ par les deux ouverts $F^{-1}(U_1)$ et $F^{-1}(U_2)$. On obtient un entier N tel que tout sous-carré de côté $1/N$ soit entièrement dans X_1 ou dans X_2. On peut supposer que N est un multiple de k. Pour tout $(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in [0,1] \times [0,1]$, on pose $\sigma(j,j') = 0$ si $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in U_0$, $\sigma(j,j') = 1$ ou 2 sinon et on relie b_0 à $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N})$ par un chemin $\alpha_{j,j'}$ entièrement contenu dans $U_{\sigma(j,j')}$. Si $j = N$, $j' = 0$ ou $j' = N$, $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) = b_0$ et on choisit le chemin constant.

Pour chaque j, $t \mapsto F(\frac{j}{N}, t)$ est un lacet basé en b_0, noté β_j. On écrit $\beta_j = \beta_{j,1} \cdots \beta_{j,N}$, où

$$\beta_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot F_{|\{\frac{j}{N}\} \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]} \cdot \alpha_{j,j'}^{-1} \subset U_{\tau(j,j')}.$$

Ici $\tau(j,j') = \max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\}$ sauf eventuellement si $\max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\} = 0$. Dans ce dernier cas, on pose $\tau(j,j') = 1$ si $\beta_{j,j'} \subset U_1$ (en particulier si $\beta_{j,j'} \subset U_0$) et $\tau(j,j') = 2$ sinon. Autrement dit, on peut voir β_j comme l'élément $m_j = [\beta_{j,1}] \cdots [\beta_{j,N}]$ du produit libre $G_1 * G_2$.

Lemme 102. — *Modulo le sous-groupe distingué N l'élément $m_j \in G_1 * G_2$ est indépendant de j.*

Démonstration. — Soit

$$\epsilon_{j,j'} = F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times \{\frac{j'}{N}\}).$$

Si $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]) \subset U_1$, alors $\beta_{j,j'}$ est homotope dans U_1 à

$$\beta'_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'} \cdot \epsilon_{j,j'} \cdot \alpha_{j,j'}^{-1}.$$

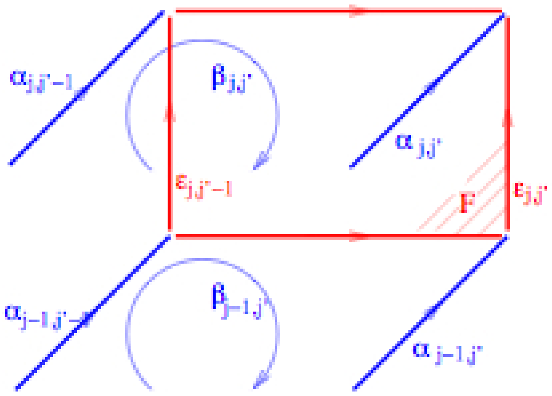

Fig. 13. Illustration du lemme 102

Si $F([\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}]\times[\frac{j'-1}{N},\frac{j'}{N}])$ n'est pas entièrement contenu dans U_1, alors il est contenu dans U_2. Si $\beta_{j,j'}$ est vu comme un lacet dans U_2 (*i.e.* si $\tau(j,j')=2$) alors on procède de la même manière mais dans U_2. Enfin si $\beta_{j,j'}\subset U_0$ (auquel cas $\tau(j,j')=1$), quitte à multiplier m_j et m_{j-1} par des éléments de N, on peut décider que tout se passe dans U_2 et dans ce cas l'homotopie de $\beta_{j,j'}$ à $\beta'_{j,j'}$ a lieu à nouveau. Dans l'élément m_j, on trouve, modulo N, le produit $\beta'_{j,j'}\cdot\beta'_{j,j'+1}$ au coeur duquel figure

$$\alpha_{j-1,j'}\cdot\epsilon_{j,j'}\cdot\alpha_{j,j'}^{-1}\cdot\alpha_{j,j'}\cdot\epsilon_{j,j'}^{-1}\cdot\alpha_{j-1,j'}^{-1},$$

qui est trivial. Modulo N, le facteur qui s'intercale entre $\beta_{j-1,j'}$ et $\beta_{j-1,j'+1}$ dans le produit est trivial. Les termes de bord sont des lacets constants. On conclut que $m_j=m_{j-1}$ modulo N dans $G_1 * G_2$. □

Comme le dernier mot m_N est trivial et le premier égal à γ, on conclut que $\gamma\subset N$, *i.e.* que $\ker(\overline{h})\subset N$. □

Exemple 103. — Soit G un graphe fini connexe. Alors $\pi_1(G)$ est un groupe libre à κ générateurs, où κ, la **connectivité** de G, vaut

$$\kappa = 1 - S + A,$$

où S est le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes de G.

Démonstration. — Écraser une arête ne change pas la connectivité. Lorsque toutes les arêtes sont écrasées, sauf les boucles, on se retrouve avec un **bouquet de κ cercles**, *i.e.* κ boucles attachées à l'unique sommet. On lui applique le théorème de Van Kampen avec U_1 un ouvert qui se retracte sur l'une des boucles et U_2 un ouvert qui se rétracte sur le bouquet de cercle constitué des $\kappa-1$ autre boucles. Alors U_0 est contractile et $\pi_1(U_0)$ est trivial. Donc $\pi_1(G)$ est le produit libre de $\pi_1(U_1)\cong\mathbb{Z}$ avec

$\pi_1(U_2)$ - qui est isomorphe au groupe fondamental d'un graphe de connectivité $\kappa - 1$. On conclut par récurrence. □

8. Applications

La théorie des revêtements peut être utile en théorie combinatoire des groupes. En voici deux applications.

8.1. Théorème de Schreier. —

Théorème 104. — *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Démonstration dans le cas d'un sous-groupe d'indice fini d'un groupe libre de type fini
Tout groupe libre de type fini est le groupe fondamental d'un graphe. Tout sous-groupe d'indice fini est le groupe fondamental d'un revêtement fini de ce graphe. Comme un revêtement fini d'un graphe est un graphe fini, et comme le groupe fondamental d'un graphe fini est libre, le sous-groupe est libre. □

8.2. Théorème de Hall. —

Théorème 105. — *Soit F un groupe libre de type fini et G un sous-groupe de type fini de F. Alors il existe une suite de sous-groupe d'indices finis*

$$\cdots F_{n+1} \subset F_n \subset \cdots \subset F_0 = F$$

telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = L.$$

Références

[1] Régine et Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini, 2005.

[2] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation. I. Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[5] Henry McKean and Victor Moll. *Elliptic curves*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Function theory, geometry, arithmetic.

[6] Michel Zisman. *Topologie algébrique élémentaire*. Collection U, Armand Colin, 1972.

N. Bergeron

Me Lebichon

R. Séance du 31. 8bre 1892.

Analyse Mathématique

Sur l'Analysis Situs

Note de M. H. Poincaré

« On sait ~~le rôle~~ ce qu'on entend par l'ordre de connexion d'une surface et le rôle important que joue cette notion dans la théorie générale des fonctions, bien qu'elle ~~soit~~ empruntée à une branche toute différente des mathématiques, c'est à dire à la géométrie de situation ou analysis situs.

C'est parce que ~~ce genre de~~ les recherches de ce genre peuvent avoir des applications en dehors de la géométrie qu'il peut y avoir quelque intérêt à les poursuivre en les étendant aux espaces à plus de trois dimensions. Riemann l'a bien compris, aussi et désireux de généraliser sa belle découverte, il s'est appliqué à l'étude de ces espaces au point de vue de l'analysis situs et il a laissé sur ce sujet des fragments malheureusement très incomplets. Betti dans le Tome IV 2e série des Annali di Matematica a retrouvé et complété les résultats de Riemann ~~et démontré~~ déf. Considérant une surface (variété à n dimensions) dans l'espace à $n+1$ dimensions, il a défini $n-1$ nombres

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n-1}$$

qu'il appelle les $n-1$ ordres de connexion de la surface.

Les personnes que rebutent la géométrie à plus de trois dimensions pourraient croire ce résultat sans utilité et le regarder comme un vain jeu de l'esprit, si elles n'étaient averties de leur erreur par l'usage qu'a fait des nombres de Betti notre confrère M. Picard dans des travaux d'analyse pure et de géométrie ordinaire.

La question n'est pas épuisée cependant. On peut se demander si les nombres de Betti suffisent pour déterminer ~~la~~ une surface fermée au point de vue de l'analysis situs, c'est à dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par voie de déformation continue. Cela est vrai dans l'espace à 3 dimensions et ~~quelques~~ on pourrait être ~~seraient~~ tenté de ~~porté à~~ croire qu'il en est encore de même dans un espace quelconque. C'est le contraire qui est vrai.

Pour nous en rendre compte, je vais envisager la question à un point de vue nouveau. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées d'un point de la surface; ces $n+1$ quantités sont liées entre elles par l'équation de la surface. Soient maintenant

$$F_1, F_2, \dots, F_p$$

p fonctions quelconques des $n+1$ coordonnées x, (coordonnées que je suppose toujours liées par l'équation de la surface et auxquelles je conviens de ne donner que des valeurs réelles)

Je ne suppose pas que les fonctions F soient uniformes, mais je suppose que si le point $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ décrit sur la surface un contour fermé infiniment petit, chacune des fonctions F revient à sa valeur primitive. Cela posé, supposons que notre point décrive sur la surface un contour fermé fini, il pourra se faire que nos p fonctions ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais deviennent

$$F'_1, F'_2, \dots, F'_p$$

ou en d'autres termes qu'elles subissent la substitution:

$$(F_1, F_2, \dots, F_p; F'_1, F'_2, \dots, F'_p)$$

Toutes les substitutions correspondant aux divers contours fermés que l'on peut tracer sur la surface, forment un groupe qui est ~~d'ordre fini pour une surface algébrique~~ discontinu, (au moins en ce qui concerne sa forme)

~~L'ordre de~~ Ce groupe dépend évidemment du choix des fonctions F ~~mais il ne sera pas pour cela ordre doit être de l'ordre~~ supposons d'abord que ces fonctions soient les ~~maximum quand les fonctions sont~~ plus générales que l'on puisse imaginer en ne s'imposant pas d'autre condition que celle que nous avons énoncée plus haut et soit G le groupe correspondant. Soit G' un groupe correspondant à un autre choix de ces fonctions ~~il peut se réduire pour certains choix particuliers des F. Un quelconque des groupes ainsi construits est~~ G' sera isomorphe à G ~~un des groupes d'ordre maximum,~~ holoédriquement en général ~~s'il est lui-même d'ordre maximum~~, mériédriquement dans ~~le cas contraire~~ quelques cas particuliers.

Le groupe G ~~Un quelconque des groupes d'ordre maximum~~ peut donc servir à définir la forme de la surface et s'appeler le groupe de la surface. Il est clair que si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre par voie de déformation continue, leurs groupes sont isomorphes. La réciproque quoique moins évidente est encore vraie ~~de sorte que ce qui définit~~ pour des ~~une~~ surfaces fermées, de sorte que ce qui définit une surface fermée au point de vue de l'analysis situs, c'est son groupe.

Nous sommes donc conduits à nous poser la question suivante: Deux surfaces fermées qui ont mêmes nombres de Betti, ont-elles toujours des groupes isomorphes?

Pour résoudre cette question en nous servant d'un mode de représentation simple dans l'espace ordinaire, nous supposerons ~~que le~~ ~~nombre~~ qu'il s'agisse de définir une surface dans l'espace à 4 dimensions seulement. Considérons pour

Note de M. Poincaré $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{R}$

l'espace ordinaire un groupe G ~~quelconque~~ proprement discontinu. L'espace se trouvera ainsi décomposé en une infinité de domaines fondamentaux, transformés les uns des autres par les substitutions du groupe. Je suppose que le domaine fondamental ne s'étend pas à l'infini et qu'aucune substitution du groupe ne laisse inaltéré aucun point de l'espace. M. Aubert

(1) Soient alors:

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

quatre fonctions des coordonnées x, y, z de l'espace ordinaire, inaltérées par les substitutions de G. Si l'on considère X_1, X_2, X_3, X_4 comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions, ce point décrira une surface fermée dont le groupe sera ~~isomorphe~~ ~~en général~~ isomorphe à G, holoédriquement si les fonctions X sont ~~choisies~~ les plus générales qui soient inaltérées par G.

Considérons en particulier le groupe ~~défini~~ dérivé des trois substitutions:

$$(x, y, z;\ x+1, y, z)$$

$$(x, y, z;\ x, y+1, z)$$

$$(x, y, z;\ \alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. J'appellerai ~~ce groupe~~ pour abréger le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Le domaine fondamental sera un cube.

On observera d'abord que deux groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ne peuvent être isomorphes que si les deux substitutions

$$(x, y;\ \alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y),\quad (x, y;\ \alpha' x+\beta' y, \gamma' x+\delta' y)$$

sont transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers ~~Comm~~ Cela n'arrivera pas en général.

Cherchons maintenant à déterminer les nombres de Betti pour la surface qui admet le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Nous verrons que l'une des connexions est toujours quadruple, et que l'autre (la connexion linéaire) est:

double dans le cas général

triple si $\alpha+\delta=2$

quadruple si $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=0$.

Ce qui précède montre que les nombres de Betti peuvent être les mêmes pour deux surfaces sans que leurs groupes soient isomorphes et par conséquent sans que ~~les surfaces~~ l'on puisse passer de l'une à l'autre par déformation continue.

[C'est là une remarque qui peut jeter quelque lumière sur la théorie des surfaces algébriques ~~ordinaires~~ et rendre moins étrange un fait découvert par M. Picard, à savoir que ces surfaces n'ont pas de cycle à ~~1 d~~ une dimension si elles sont les plus générales de leur degré. "