Examen partiel

Revêtements et groupe fondamental

21 février 2014

Exercice 1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire à coefficients complexes, de degré $n \geq 1$. On veut montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Par l'absurde, on suppose que ce n'est pas le cas.

Pour $t \geq 0$, et $z \in \mathbb{S}^1$, on pose :

$$h_t(z) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|} \in \mathbb{S}^1 \,,$$

et on pose $f_n(z) = z^n \in \mathbb{S}^1$.

1) Calculer le degré de l'application h_0.

2) Montrer que si $t > 0$ est assez grand, les applications h_t et $f_n \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ont même degré.

3) Conclure.

Exercice 2

1) Déterminer le groupe fondamental du complémentaire X, dans $\mathbb{C}^2$, de la réunion de deux droites (complexes) concourantes (distinctes).

(*Indication. On pourra commencer par montrer que X est homéomorphe à* $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, xy \neq 0\}$).

2) On note

$$U_{\mathbb{R}} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \neq 0\big\}$$
$$\text{et } U_{\mathbb{C}} = \big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x^2 + y^2 \neq 0\big\}\,,$$

et on note $i \colon U_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{C}}$ l'inclusion (canonique).

Calculer les groupes fondamentaux $\pi_1(U_{\mathbb{R}}, (1,0))$ et $\pi_1(U_{\mathbb{C}}, (1,0))$, et décrire le morphisme i_*.

Exercice 3

On note $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préservent l'orientation. On note $\Gamma < G$ le groupe des isométries positives qui préservent globalement la partie $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, et on note Γ' son sous-groupe engendré par les translations de vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$.

1) Identifier G au sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ des matrices sous la forme $A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R}} & a \\ & & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

où $R \in \mathrm{SO}(2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

On munit maintenant G de la topologie induite par $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Montrer que Γ et Γ' sont des sous-groupes discrets de G.

2) Vérifier que G est connexe par arcs et déterminer son groupe fondamental. On exhibera un générateur de $\pi_1(G, \mathrm{Id})$.

3) On s'intéresse à l'espace $M = G/\Gamma$. Montrer que son groupe fondamental s'inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(G/\Gamma) \to \Gamma \to 0.$$

On note $\psi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(G/\Gamma)$ et $\varphi \colon \pi_1(G/\Gamma) \to \Gamma$ les morphismes suggérés ci-dessus. Montrer que pour tout élément $r \in \Gamma$ de torsion, tout élément $\tilde{r} \in \pi_1(G/\Gamma)$ tel que $\varphi(\tilde{r}) = r$ est d'ordre infini.

(*Indication : on pourra commencer par identifier géométriquement les éléments de torsion dans* Γ, *puis vérifier que si* $r \in \Gamma$ *est d'ordre* k, *il existe un tel* $\tilde{r}$, *que l'on décrira, tel que* $\tilde{r}^k = \psi(1)$).

En déduire que $\pi_1(G/\Gamma)$ est sans torsion.

4) Exhiber un revêtement du tore $T^3 = (\mathbb{S}^1)^3$ sur M, galoisien, à quatre feuillets.

5) (*À faire à la maison, ce week-end, mais pas pendant le partiel !*) Montrer que $\pi_1(G/\Gamma)$ admet la présentation suivante :

$$\pi_1(G/\Gamma) = \left\langle a, b, c \mid [a, b] = 1,\ cac^{-1} = b,\ cbc^{-1} = a^{-1} \right\rangle.$$
