Feuille de TD 5 de Revêtements et Groupe Fondamental morphismes de revêtements, revêtements universels

Exercice 1. (*Van Kampen pour les espaces simplement connexes*) Soit X un espace topologique et U, V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ est connexe, non-vide. On va montrer que si U, V sont simplement connexes, il en est de même de X.

1. Soit $p : E \to X$ un revêtement de E tel que les restrictions $E_{|U}$ et $E_{|V}$ soient triviales. Montrer que E est trivial.
2. Conclure.

Exercice 2. (*simple connexité des sphères*) Déterminer pour quelles valeures n, la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

Exercice 3. (*Automorphismes de revêtements*)

1. Déterminer tous les automorphismes du revêtement $S^1 \to S^1$ donné par $z \mapsto z^n$ $(n \geq 1)$. Est-ce un revêtement galoisien ?
2. Montrer que la projection canonique $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et calculer son groupe d'automorphismes.
3. Soient X et Y les graphes représentés ci-dessous et $p : X \to Y$ la projection "verticale" donnée par la figure :

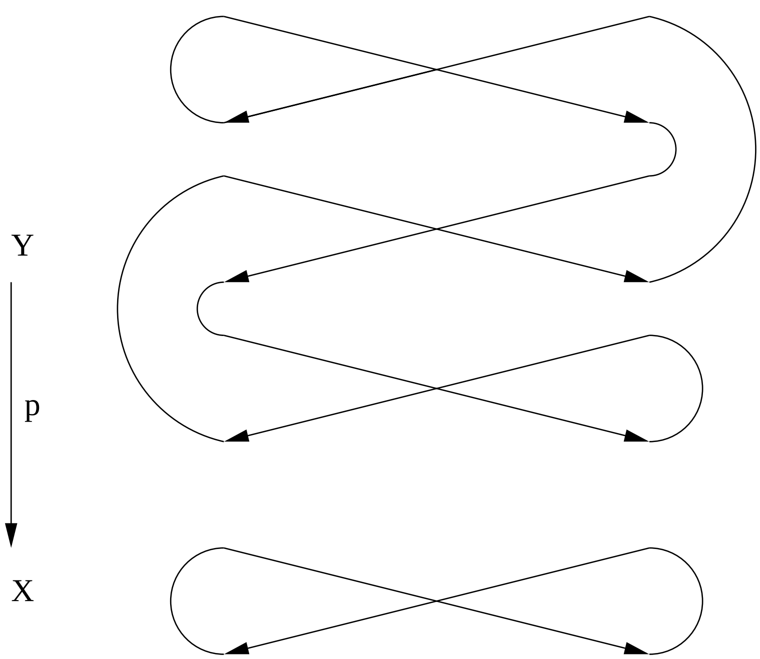


FIGURE 1 – Le revêtement $p : Y \to X$.

(a) Déterminer les automorphismes du revêtement p. Est-ce un revêtement galoisien ?

(b) Construire un revêtement $\widehat{Y}$ de degré 2 de Y tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de X et de même, constuire un revêtement $\widehat{X}$ de degré 2 de X tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de degré 3 de $\widehat{X}$.

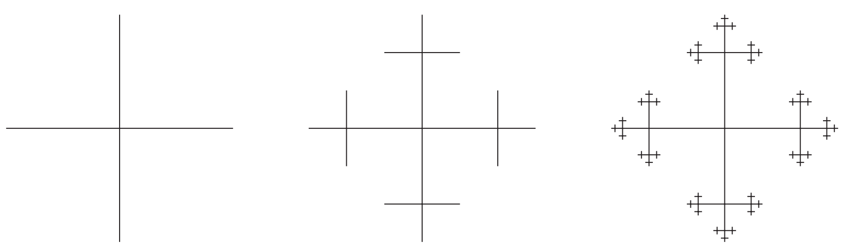
Exercice 4. (*Revêtements et boucles hawaïennes*) On considère les boucles hawaïennes $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, c'est à dire la réunion $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ des cercles C_n $(n \geq 1)$ de centre $(1/2n, 0)$ et de longueur $1/2n$. On note aussi $\mathbb{H}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \geq 0\}$ et $\mathbb{H}_- := \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \leq 0\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont simplement connexes. $\mathbb{H}$ est-il simplement connexe ? Localement simplement connexe ?
2. Pour tout $n \geq 1$, construire un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ tel que la restriction $E_{n|C_n}$ ne soit pas trivial.
3. On note $E = \coprod_{n>0} E_n$ la réunion disjointe des E_n et $p : E \to \mathbb{H}$ l'application induite par les p_n. Montrer qu'il existe un revêtement *trivial* T de $\mathbb{H}$ tel que E soit un revêtement de T, mais que E n'est *pas* un revêtement de $\mathbb{H}$.
4. Démontrer que les restrictions $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_+)}$ et $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_-)}$ sont des revêtements de $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$, qui sont de plus triviaux.

Exercice 5. (*Quelques revêtements universels*)

1. Déterminer les revêtements universels des sphères S^n $(n \geq 1)$, de $\mathbb{C}^*$, des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, du tore $S^1 \times S^1$, de la bande de Möbius et la bouteille de Klein.
2. (*le revêtement universel du "huit"*) On construit une partie $A_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de $\mathbb{R}^2$ par récurrence de la manière suivante (voir Figure 1).
   - L'ensemble A_0 est formé du seul point 0.
   - L'ensemble A_1 est formé des 4 segments $[-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$.
   - On a un graphe formé de 4 arètes, deux horizontales et deux verticales. A distance $1/3$ de l'extrémité libre de chacune, on rajoute le segment de longueur $2/3$ dont l'arète est la médiatrice.
   - Etape n. A distance $1/3^n$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $2/3^n$ dont notre arête est la médiatrice.

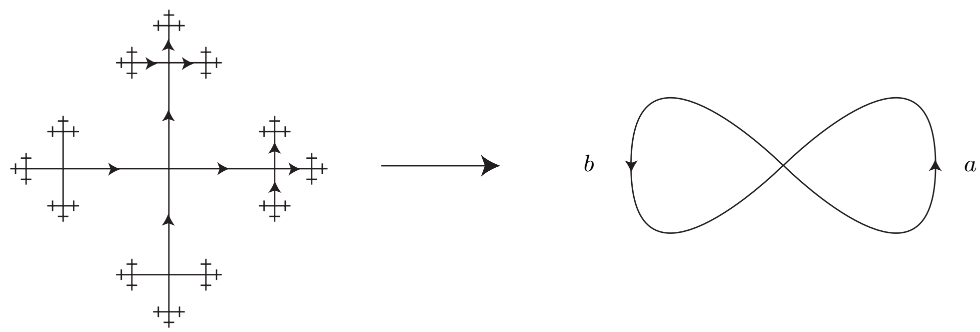
   On construit ainsi une partie de $\mathbb{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble A_∞ de la distance d telle que
   - Chaque arête est isométrique au segment $]0, 1[$.
   - La distance entre deux sommets est la longueur d'un chemin (sans aller-retour) dans A_∞ joignants ces deux sommets.



Étape 1 Étape 2 Étape n

   (a) Montrer que A_∞ muni de la distance d est un espace métrique connexe et simplement connexe.

   (b) On oriente toutes les arètes : les verticales de bas en haut et les horizontales de gauche à droite. On définit une application p de A_∞ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par l'application quotient $[0, 1] \to [0, 1]/(0 \sim 1) \cong S^1$ (voir Figure 2). Montrer que p est le revêtement universel du huit.



Exercice 6. (*Classifications des revêtements de quelques espaces classiques*) Décrire tous les revêtements (à isomorphisme de revêtements près)

1. de S^1
2. de $\mathbb{R}P^2$
3. de $S^1 \times S^1$
4. de la bouteille de Klein.
5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets.