UPMC - MM059 - EXAMEN - 12/03/2015

3 heures. Les téléphones et les calculatrices sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation. Barème approximatif sur 20 : 5+5+10+10

Exercice 1. Soit $D^2 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et $f : D^2 \to D^2$ une application continue telle que $f(z) = z$ pour tout $z \in S^1$. On souhaite montrer que f est surjective.

(1) Montrer que si ce n'est pas le cas, on peut construire une rétraction continue $r : D^2 \to S^1$.

(2) Prouver qu'une telle rétraction n'existe pas et conclure.

Exercice 2. Soit D la droite d'équations $x = y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, et C le cercle d'équations $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

(1) Soit P le demi-plan d'équations $y = 0, x > 0$. Montrer que $P \setminus C$ se rétracte par déformation sur un cercle $E \subset P$ que l'on précisera.

(2) En déduire que $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D)$ est homotopiquement équivalent à $S^1 \times S^1$.

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. On note $\mathcal{S}'_n$ le sous-ensemble des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont simples et SO_n le groupe des isométries vectorielles directes. Ces espaces sont munis de la topologie induite de $M_n(\mathbb{R})$.

On appelle base adaptée à $A \in \mathcal{S}'_n$ une base orthonormée directe $B = (e_1, \ldots, e_n)$ vérifiant $Ae_i = \lambda_i e_i$ et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Soit $\Delta_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 < \cdots < \lambda_n\}$ et $\mathcal{V}_n = \{(A, B), A \in \mathcal{S}'_n$ et B adaptée à $A.\}$

(1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et Δ_n sont contractiles.

(2) Montrer que l'application $\pi : \mathcal{V}_n \to \mathcal{S}'_n$ définie par $\pi(A, v_1, \ldots, v_n) = A$ est un revêtement galoisien et déterminer son groupe d'automorphismes.

(3) Prouver que $\mathcal{V}_n$ est homéomorphe au produit $\mathrm{SO}_n \times \Delta_n$.

(4) On admet que le groupe fondamental de SO_n est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 3$. Montrer que l'on a alors une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \pi_1(\mathcal{S}'_n) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \to 0$$

(5) Montrer que $\alpha(1)\gamma = \gamma\alpha(1)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{S}'_n)$.

(6) Calculer directement le groupe fondamental de $\mathcal{S}'_2$.

Exercice 4. On muni $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel euclidien standard. On notera SO_3 le groupe topologique des isométries vectorielles directes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{P}^2$ l'espace projectif des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. On note $X = \{(D, r) \in \mathbb{P}^2 \times \mathrm{SO}_3$ tels que $r|_D = \mathrm{Id}_D\}$.

Partie 1 :

(1) Soit l'application $\pi : S^2 \times S^1 \to X$ qui envoie le couple $(u, e^{i\theta})$ sur la rotation d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ (relativement à l'orientation de l'axe choisie). Montrer que π est un revêtement galoisien et calculer son degré.

Indication : On trouvera une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $S^2 \times S^1$ qui laisse π invariante.

(2) Notons $x_0 = (e, \mathrm{Id})$ un point base avec e un vecteur unitaire. Montrer qu'il existe une suite exacte
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{a} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{b} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

(3) Décrire explicitement deux lacets $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ d'extrémités x_0 tels que $[\beta]^2 = 1$, $[\alpha] = a(1)$ et $b([\beta]) = 1$ où 1 désigne respectivement les générateurs de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(4) Identifier le revêtement universel de X ainsi que son groupe d'automorphismes.

(5) En déduire que $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec l'action non triviale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$.

Partie 2 :

Soit $U = \{(D, r), r$ n'est pas une symétrie axiale[1]$\}$ et $V = \{(D, r), r \neq \mathrm{Id}\}$. Montrer successivement les assertions suivantes.

(1) L'application $i : \mathbb{P}^2 \to X$ définie par $i(D) = (D, \mathrm{Id})$ est un homéomorphisme sur son image.

(2) L'ouvert U se rétracte par déformation sur $i(\mathbb{P}^2)$.

(3) L'application $j : \mathbb{P}^2 \to X$ qui envoie D sur la symétrie axiale d'axe D est un homéomorphisme sur son image.

(4) L'ouvert V se rétracte par déformation sur $j(\mathbb{P}^2)$.

(5) L'application $k : S^2 \to X$ qui envoie u sur la rotation d'axe u et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est un homéomorphisme sur son image.

(6) L'ouvert $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $k(S^2)$.

(7) Le groupe fondamental de X est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. ou renversement, ou rotation d'angle π.