UPMC - MM059 - Contrôle continu - 08/02/2013

Exercice 1

Soit C le cercle dans $\mathbb{R}^3$ d'équations $z = 0$ et $x^2 + y^2 = 1$.

Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus C$ se rétracte par déformation sur la réunion X de la sphère de rayon 2 et du segment joignant $(-2, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$.

Indication : on pourra commencer par résoudre le problème sur le demi-plan d'équation $y = 0$ et $x \geq 0$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites orientées de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application $p : \mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathcal{D}$ qui associe au couple (x, u) la droite passant par x et de vecteur directeur u.

1. Montrer que p permet d'identifier $\mathcal{D}$ à un quotient de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ et que, muni de la topologie quotient, $\mathcal{D}$ est connexe par arcs et séparé.
2. Soit $i : S^1 \to \mathcal{D}$ l'application définie par $i(u) = p(0, u)$. Montrer que i est un homéomorphisme sur son image X et que $\mathcal{D}$ se rétracte par déformation sur X. En déduire le groupe fondamental de $\mathcal{D}$.
3. Soit $P : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ l'application qui à une droite orientée D associe la droite parallèle à D à distance 1 (dans la direction iu où $u \in S^1$ est un vecteur directeur de D). Montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{D}$ définie par $n.D = P^n(D)$ est proprement discontinue.
4. Montrer que l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, u) = \det(u, x)$ passe au quotient en une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. En utilisant cette application, montrer que $\mathcal{D}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

Exercice 3 (Bonus)

Montrer que toute application propre (l'image réciproque d'un compact est compact) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est de plus un homéomorphisme local est un homéomorphisme. On démontrera avec soin que c'est un revêtement.