UPMC - MM059 - Contrôle continu - 22/03/2013

Exercice 1

1. Soit $p : E \to B$ un revêtement de degré 2, c'est-à-dire que pour tout $x \in B$, $p^{-1}(\{x\})$ a deux éléments. Montrer que l'unique application $\phi : E \to E$ vérifiant pour tout $x \in E$, $p^{-1}(\{p(x)\}) = \{x, \phi(x)\}$ est un automorphisme de revêtement.
2. Supposons que B est connexe par arcs. Déterminer si le revêtement $p : E \to B$ est galoisien et calculer son groupe d'automorphismes.
3. Soit B un espace topologique connexe par arcs et délaçable. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(B)$ est distingué.

Exercice 2

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ le revêtement défini par $p(x, y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ i.e. telle que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $ad - bc = 1$.

1. Montrer que l'application $\tilde{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par A induit par passage au quotient un homéomorphisme $A : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$.
2. Déterminer l'application $A_* : \pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \to \pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1))$.
3. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$ définie par $n.(x, t) = (A^n(x), t + n)$. Montrer que cette action est proprement discontinue.
4. Montrer que le quotient $X_A = S^1 \times S^1/\mathbb{Z}$ est compact et qu'il existe une suite exacte
$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to \pi_1(X_A) \to \mathbb{Z} \to 0$$
5. Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X_A$ donnée par $i(t) = [(1, 1, t)]$ fournit un scindement de la suite.
6. (Bonus) Déterminer à quelle condition sur A et B dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ les variétés X_A et X_B sont homéomorphes.

Exercice 3

Soit $B = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ muni de l'action de $\mathbb{Z}$ définie par

$$n.(x, t) = ((-1)^n x, t + n).$$

L'action est proprement discontinue et le quotient $M = B/\mathbb{Z}$ est un espace compact appelé ruban de Möbius (admis).

1. Montrer que la projection $p_2 : B \to \mathbb{R}$ passe au quotient en une application continue $p : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui est une équivalence d'homotopie.
2. Montrer que l'application $\tilde{i} : \mathbb{R} \to B$ définie par $\tilde{i}(t) = (1, t)$ définit par passage au quotient une application continue $i : \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \to M$ qui est un homéomorphisme sur son image. Déterminer l'application $i_* : \pi_1(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}) \to \pi_1(M)$.
3. Considérons une copie M' de la bande de Möbius, on note p', i' les applications correspondantes. Soit $X = M \amalg M'/\sim$ où on pose pour tout $z \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z} : i(z) \sim i'(z)$.

   Montrer que le groupe fondamental de X est isomorphe au produit amalgamé du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\times 2"] \arrow[ur, "\times 2"'] & \end{tikzcd}$$

4. (Bonus) Montrer que $\pi_1(X)$ a pour présentation $\langle A, B | A^2 = B^2 \rangle$ et qu'il est isomorphe au groupe fondamental de la bouteille de Klein défini par $G = \langle R, S | SR = R^{-1}S \rangle$. Interpréter géométriquement cet isomorphisme.