Signature et revêtements cycliques ramifiés

Julien Marché

Septembre 2004

Soit M une sphère d'homologie rationnelle orientée et K un nœud homologue à 0 dans M. On peut définir la signature de cette paire: il s'agit d'une fonction $\sigma(M,K) : S^1 \to \mathbb{Z}$ qui ne peut changer de valeurs qu'aux racines du polynôme d'Alexander $\Delta(M,K)$.

Si le polynôme $\Delta(M,K)$ ne s'annule pas en une racine r-ième de l'unité, le revêtement ramifié d'ordre r de M sur K est une sphère d'homologie rationnelle et le lieu de ramification est un nœud homologue à 0 dans cette variété. On dira que (M,K) est r-régulière. Notons $\Sigma^r(M,K)$ la nouvelle paire ainsi obtenue.

Le but de cette note est d'exprimer la signature de $\Sigma^r(M,K)$ en fonction de celle de (M,K). Bien que cette formule soit certainement connue, il semble qu'elle n'apparaît pas dans les ouvrages de référence.

Aucun résultat de cette note n'est original : le point de vue adopté est par ailleurs inspiré des articles de S. Garoufalidis et Kricker ([GK]).

1 Définition chirurgicale de la signature

1.1 Présentation chirurgicale des paires (M,K)

Il y a plusieurs façons de définir la signature d'une paire (M,K). La plus adaptée à notre propos est la définition chirurgicale que l'on rappelle ici.

La sphère d'homologie rationnelle M peut être présentée par chirurgie sur un entrelacs C dans S^3 de matrice d'enlacement inversible sur $\mathbb{Q}$. Soit K' l'image de K dans $S^3 \setminus C$. Comme K est nul en homologie, par glissement d'anse, on peut supposer que K' n'enlace aucune composante de C. Puis, par chirurgie sur de nouvelles composantes non enlacées avec K', on peut supposer que ce dernier nœud est trivial. Ainsi, le complémentaire de K dans M se présente par chirurgie sur un entrelacs L dans un tore plein $\mathrm{Tp} \subset S^3$ dont la matrice d'enlacement dans S^3 est inversible sur $\mathbb{Q}$.

Le résultat fondamental sur ces présentations est que deux entrelacs donnent par chirurgie des paires isomorphes si et seulement si ils sont reliés par des mouvements de Kirby usuels.

1.2 Matrice d'enlacement équivariante

Soit (M,K) une paire présentée par un entrelacs L dans le tore plein. Choisissons un point base x dans le tore plein, une orientation des composantes de L et des chemins reliant x à chacune des composantes. On dispose alors d'un relevé particulier $\widetilde{L_i}$ de chaque composante L_i dans le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Tp}}$ de Tp basé en x.

On définit la matrice d'enlacement équivariante W de L à coefficients dans $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ par la formule

$$W_{i,j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Link}_{\widetilde{\mathrm{Tp}}}(\widetilde{L_i}, t^k\widetilde{L_j})t^k$$

Cette matrice vérifie les propriétés suivantes:

- Soit $\epsilon : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \to \mathbb{Z}$ le morphisme envoyant t en 1. Alors ϵW est la matrice d'enlacement de L dans S^3.
- Notons W^* la tranconjuguée de W, c'est à dire la transposée à laquelle on a appliqué l'involution $t \mapsto t^{-1}$. La matrice W est hermitienne, c'est à dire que $W^* = W$.
- Si on change l'orientation de la i-ème composante la matrice W devient P^*WP où P est la matrice identité ayant -1 sur l'entrée (i, i).
- Si on ajoute un tour du tore plein au chemin reliant x à la i-ème composante, la matrice W devient P^*WP où P est la matrice identié ayant t sur l'entrée (i, i).
- Si on fait glisser la j-ème composante sur la i-ème de façon compatible avec les chemins, la matrice W devient P^*WP avec P la matrice identité ayant un 1 supplémentaire en (i, j).
- Enfin si on rajoute une composante triviale d'auto-enlacement ± 1, on remplace W par la matrice
$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}.$$

La classe d'équivalence des matrices W modulo les relations décrites ci-dessus s'appelle la classe de S-équivalence.

1.3 Invariants de S-équivalence

Grâce à la matrice W, on peut définir une famille d'invariants de nœuds, qui seront aussi appelés invariants de S-équivalence. Donnons quelques exemples:

- Le polynôme $\frac{\det(W)}{\det(\epsilon W)}$ est un invariant: il s'agit du polynôme d'Alexander que l'on note $\Delta(M, K)$.
- Si $t \in S^1$, $W(t)$ est une matrice hermitienne. On peut considérer sa signature $\mathrm{Sign}(W(t))$ qui est le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives. La quantité $\mathrm{Sign}(W(t)) - \mathrm{Sign}(W(1))$ est un invariant que l'on appelle signature et que l'on note $\sigma(M, K)$. Elle ne peut changer de valeur qu'aux racines du polynôme d'Alexander.

  On notera $j(M, K)$ la fonction de saut de $\sigma(M, K)$.
- Si $t \in \mathbb{C}^*$, la quantité $\mathrm{Rg}(W(t)) - \mathrm{Rg}(W(1))$ est encore un invariant que l'on note $\mathrm{Rg}(M, K)$ et que l'on appelle rang. Il n'est non nul que si t est une racine de $\Delta(M, K)$.

2 Revêtements ramifiés cycliques

Soit (M, K) une paire r-régulière présentée par chirurgie sur un entrelacs L dans le tore plein Tp. Soit $\pi_r : \mathrm{Tp} \to \mathrm{Tp}$ le revêtement d'ordre r. Classiquement, $\Sigma^r(M, K)$ est présentée par chirurgie sur l'entrelacs $\pi_r^{-1}(L)$. Ceci nous permet de calculer les invariants de S-équivalence de $\Sigma^r(M, K)$ en fonction de ceux de (M, K).

2.1 Représentation matricielle des revêtements

Lemme 1. *Soit $W(t)$ la matrice d'enlacement équivariante de L. et T_r la matrice d'ordre r suivante:*

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & & & t \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'enlacement de $\pi_r^{-1}(L)$ est obtenue en substituant t par T_r dans $W(t)$.

Proof. Soit $L_1, \ldots, L_n$ les composantes de L orientées et munies d'un chemin au point base x. Les entrelacs de $\pi_r^{-1}(L)$ sont obtenus par projection des $t^k\widetilde{L}_i$ pour $0 \le k \le r-1$ et $1 \le i \le n$. Soit W' la matrice d'enlacement de cet entrelacs. On a:

$$W'_{ik,jl} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Link}_{\widetilde{\mathrm{Tp}}}(t^k\widetilde{L}_i, t^{mr}t^l\widetilde{L}_j)t^m$$

Or, un calcul élémentaire montre que pour des entiers r, m et $l, k \in \{0, \ldots, r-1\}$ on a $(T_r^m)_{l,k} = t^{\frac{m+k-l}{r}}$ (on a posé $t^x = 0$ si x n'est pas entier).

On calcule alors

$$\begin{aligned}(W_{i,j}(T_r))_{k,l} &= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathrm{Link}_{\widetilde{\mathrm{Tp}}}(\widetilde{L_i}, t^x\widetilde{L_j})t^{\frac{x+k-l}{r}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Link}_{\widetilde{\mathrm{Tp}}}(\widetilde{L_i}, t^{mr+l-k}\widetilde{L_j})t^m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Link}_{\widetilde{\mathrm{Tp}}}(t^k\widetilde{L_i}, t^{mr+l}\widetilde{L_j})t^m = W'_{ik,jl}\end{aligned}$$

□

2.2 Application au calcul des invariants

La matrice T_r vérifie $T_r^r = t\,\mathrm{Id}$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{C}^*$, elle est diagonalisable et a pour valeurs propres les racines r-ièmes de t. Soit e_λ un vecteur propre associé à la racine λ, et $E_1, \ldots, E_n$ la base canonique de W. Dans la base $(E_i \otimes e_\lambda)_{1\le i\le n, \lambda^r=t}$, la matrice W' se décompose en une somme directe des matrices $W(\lambda)$ pour $\lambda^r = t$. On en déduit les formules suivantes:

- **Le polynôme d'Alexander:**
  La décomposition de W' indique que l'on a $\det(W'(t)) = \prod_{\lambda^r=t}\det(W(\lambda))$, ainsi le polynôme d'Alexander vérifie la formule $\Delta(\Sigma^r(M,K))(t) = \frac{\prod_{\lambda^r=t}\det(W(\lambda))}{\prod_{\lambda^r=1}\det(W(\lambda))}$.

  Autrement dit, si on a $\Delta(M,K) = c\prod_i(\alpha_i - t)$, le polynôme d'Alexander s'obtient simplement par la formule $\Delta(\Sigma^r(M,K)) = \frac{\prod_i(\alpha_i^r - t)}{\prod_i(\alpha_i^r - 1)}$.

- **La signature:**
  D'après la décomposition de W', pour tout $t \in S^1$ on a : $\sigma W'(t) = \sum_{\lambda^r=t}\sigma(W(\lambda))$. On en déduit que $j(\Sigma^r(M,K))(t) = \sum_{\lambda^r=t} j(M,K)(\lambda)$.

- **Le rang:**
  De même, pour $t \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Rg}(W')(t) = \sum_{\lambda^r=t}\mathrm{Rg}\,W(\lambda)$. Comme par hypothèse, $\Delta(M,K)$ ne s'annule pas aux racines r-ièmes de l'unité, on en déduit que $W(\lambda)$ est de rang n si $\lambda^r = 1$. Donc $\mathrm{Rg}(\Sigma^r(M,K))(t) = \sum_{\lambda^r=t}\mathrm{Rg}(M,K)(\lambda)$.

References

[GK] S. Garoufalidis et A. Kricker – Finite type invariants of cyclic branched covers, arXiv:math.GT/0107220.