CHAPITRE II

FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

Tout d'abord, sans démonstrations ni systématisme :

0. RAPPELS DE CALCUL DIFFERENTIEL.

On se restreint au cas réel en dimension finie.

On notera E,F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n,p ; U un ouvert de E (pour la topologie de la norme euclidienne) ; $f : U \to F$; $x \in U$.

0.1. PREMIER ORDRE.

L'application f est dite <u>différentiable</u>, ou <u>dérivable</u>, <u>en x</u> ssi il existe une application linéaire (nécessairement unique) $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $h \in E$ assurant $x + h \in U$:

$$f(x+h) = f(x) + \phi(h) + \|h\|\ \varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

L'application linéaire ϕ s'appelle <u>dérivée de</u> f <u>en</u> x et se note f'(x) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \|h\|\ \varepsilon(h) .$$

La dérivabilité en x implique clairement la continuité en x.

Si f est elle-même linéaire, elle est dérivable et $f'(x) = f$ pour tout x.

Si $f : E^2 \to F$ est bilinéaire, elle est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$f'(x,y).(h,k) = f(x,k) + f(h,y) .$$

Généralisation immédiate aux fonctions multilinéaires.

Si $f : U \to F$ est constante elle est dérivable et sa dérivée est l'application linéaire nulle.

Noter que si $n = 0$, toute fonction est constante par la force des choses, donc dérivable et de dérivée nulle (cf. la formule de définition où nécessairement $h = 0$).

Si E et F sont munis des bases $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ et $\{\eta_1,\ldots,\eta_p\}$ respectivement, $f'(x)$ s'écrit sous la forme de la matrice jacobienne. Les éléments de celle-ci, notés $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ $(1 \le i \le p,\ 1 \le j \le n)$, s'appellent dérivées partielles de f. Cette terminologie provient du fait que la matrice à un élément $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))$ est la dérivée en 0 de l'application

$$\pi_i \circ f \circ \tau_x \circ \sigma_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

composée de l'injection $\sigma_j : \mathbb{R} \to E : 1 \mapsto \varepsilon_j$, de la projection $\pi_i : F \to \mathbb{R} : \eta_k \mapsto \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker) et de la translation $\tau_x : E \to E : y \mapsto y + x$. (Tout cela revient à dire qu'on ne regarde que la $i^{\text{ème}}$ composante de f et qu'on se restreint aux mouvements autour de x parallèles au $j^{\text{ème}}$ axe de coordonnées).

Utilisant l'isomorphisme $\mathscr{L}(E,F) \cong E^* \otimes F$ (cf. I.10.1), on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\ \varepsilon_j^* \otimes \eta_i .$$

On utilise énormément la condition suffisante de dérivabilité : si toutes les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de x et sont continues en x,

f est dérivable en x.

Propriétés formelles :

Si $f,g : U \to F$ sont dérivables en x, $(f+g)$ est dérivable en x et

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) .$$

Si en plus, F est muni d'une structure multiplicative, (fg) est dérivable en x et sa dérivée est donnée par

$$(fg)'(x).h = f(x)(g'(x).h) + (f'(x).h)g(x) .$$

Si $f : U \to F$, $g : V \to G$, où V est un ouvert de F, G un espace vectoriel de dimension finie et $f(U) \subset V$, sont dérivables en x et $f(x)$ respectivement, $g \circ f$ est dérivable en x, et $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.

0.2. SECOND ORDRE ET AU-DELA.

On suppose f dérivable en tout point de U. Il en résulte une application $f' : U \to E^* \otimes F : x \mapsto f'(x)$ qui peut être ou non dérivable à son tour. Si en un point $x \in U$ elle l'est, on note $f''(x)$ sa dérivée, qu'on appelle dérivée seconde de f en x :

$$f''(x) \in E^* \otimes (E^* \otimes F) \cong (E^* \otimes E^*) \otimes F \cong (E \otimes E)^* \otimes F \cong \mathcal{L}(T^2(E),F) .$$

En itérant le processus où c'est possible, on définit la dérivée $q^{\text{ème}}$ de f, une application

$$f^{(q)} : U \to \mathcal{L}(T^q(E),F) .$$

Ici encore il est commode de définir des dérivées partielles. Par exemple, la $k^{\text{ème}}$ composante de $f''(x).(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)$ se note $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)$, et ainsi de suite. On vérifie sans peine que $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)(x)$, etc...

Fondamental est le

LEMME DE SCHWARZ :

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$ sont définies dans un voisinage de x et continues en x, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(x)$.

Si $f, f', \ldots, f^{(q)}$ existent et sont continues dans U, on dit que f est de classe C^q dans U.

Si les dérivées $q^{\text{èmes}}$ existent pour tout q (et sont donc continues), f est de classe C^∞.

Le Lemme de Schwarz se généralise en remarquant que la projection

$$\xi : T^q(E) \to S^q(E) \qquad \text{(cf. I.9.2)}$$

induit un monomorphisme

$$\xi^* : \mathcal{L}(S^q(E),F) \to \mathcal{L}(T^q(E),F) .$$

Dans ces conditions, si f est de classe C^q, $f^{(q)}$ factorise à travers ξ^*, c'est-à-dire qu'en fait $f^{(q)} : U \to \mathcal{L}(S^q(E),F)$.

Pour les propriétés formelles des dérivées d'ordre supérieur, comme pour tous détails concernant ce paragraphe... et pour les démonstrations, le lecteur est invité à se reporter à l'abondante et excellente littérature publiée sur le sujet (p.ex. [4]).

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES.

Les notations restent celles du paragraphe précédent jusqu'à la fin du chapitre, mais F ne sera plus arbitraire, choisi indépendamment de E.

On commence à titre heuristique par prendre $E = \mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, et $F = \mathbb{R}$. Soit donc U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, comme ici, on a coutume, pour des raisons qui apparaîtront plus loin (cf. le §2), d'écrire df au lieu de f', et de parler de <u>différentielle</u> -et non plus dérivée- de f :

$$df : U \to (\mathbb{R}^n)^* .$$

En particulier, pour $\pi_i|_U : U \to \mathbb{R} : (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i$, la différentielle est la fonction constante

$$d(\pi_i|_U) : U \to (\mathbb{R}^n)^* : x \mapsto \pi_i = \varepsilon_i^* .$$

Ici intervient un abus de notation universel, entériné par l'Histoire (il provient de la confusion entre une fonction et la valeur de celle-ci en un point) et au demeurant fort commode : on écrit dx_i pour $d(\pi_i|_U)$, ce qui transforme la formule correcte

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \varepsilon_i^* \qquad \text{(cf. 0.1)}$$

en

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i(x) ,$$

d'où l'illustre

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i .$$

Bien entendu, même si E n'est pas $\mathbb{R}^n$, on a $df : U \to E^*$, ce qui conduit à poser la

1.1. <u>DEFINITION</u> : On appelle <u>forme différentielle</u> (resp. forme différentielle de classe C^p) sur U une application différentiable (resp. de classe C^p)

$$\phi : U \to E^*.$$

La bonne généralisation, comme toute la suite le montrera, est dans la

1.2. <u>DEFINITION</u> : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle <u>k-forme différentielle</u>, ou forme différentielle de <u>degré</u> k, sur U une application différentiable $\phi : U \to \Lambda^k(E^*)$.

Si ϕ est de classe C^p, on parle de k-forme de classe C^p, ou de forme de degré k et classe C^p.

1.3. REMARQUE : Une 0-forme est une fonction à valeurs réelles.

Une 1-forme est une forme au sens de 1.1.

Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons aux formes de classe C^∞, sauf mention explicite du contraire, laissant au lecteur le soin des généralisations quasi-automatiques.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes de classe C^∞ sera noté $\Omega^k(U)$, et $\Omega^*(U) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k(U)$.

Comme $\Lambda(E^*)$ est muni d'une riche structure algébrique (cf. Chapitre I, n°8.7), on espère et démontre le

I.4. THEOREME : Pour tous $j,k \in \mathbb{N}$, il existe des applications bilinéaires

$$\Omega^j(U) \times \Omega^k(U) \to \Omega^{j+k}(U)$$

qui font

i) de $\Omega^0(U)$ un anneau commutatif,

ii) de $\Omega^k(U)$ un $\Omega^0(U)$-module,

iii) de $\Omega^*(U)$ une $\Omega^0(U)$-algèbre ;

iv) de plus, $\Omega^*(U)$ est l'algèbre extérieure de $\Omega^1(U)$ en tant qu'$\Omega^0(U)$-module.

Démonstration : Les applications bilinéaires sont naturellement définies en posant, pour $\phi \in \Omega^j(U)$ et $\psi \in \Omega^k(U)$:

$$\phi \wedge \psi : U \to \Lambda^{j+k}(E^*) : x \mapsto \phi(x) \wedge \psi(x) .$$

Les affirmations (i) à (iii) se vérifient alors immédiatement en remarquant que $\phi \wedge \psi$ est de classe C^∞ puisque c'est la composée

$$U \xrightarrow{(\phi,\psi)} \Lambda^j(E^*) \times \Lambda^k(E^*) \to \Lambda^{j+k}(E^*)$$

où la deuxième application, définie en I.8.7, est bilinéaire, donc de classe C^∞.

Pour vérifier (iv) supposons, sans perte de généralité, que $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$. Si $\phi \in \Omega^1(U)$ et $x \in U$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1(x),\dots,\lambda_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, \varepsilon_i^*$. Il est clair que ϕ est de classe C^∞ ssi tous les λ_i le sont, soit $\lambda_i \in \Omega^0(U)$. Cela revient à dire, en utilisant la notation de l'introduction, que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, dx_i$ et donc que $\{dx_1,\dots,dx_n\}$ est une base de $\Omega^1(U)$ en tant qu'$\Omega^0(U)$-module. Un argument semblable montre que $\{dx_{i_1} \wedge\dots\wedge dx_{i_k} \mid 1 \le i_1 <\dots< i_k \le n\}$ est une base de $\Omega^k(U)$ en tant qu'$\Omega^0(U)$-module. □

1.5. <u>REMARQUE</u> : Il en résulte ici aussi que pour $r > n$, $\Omega^r(U) = 0$. (cf. I.8.13).

1.6. <u>Notation</u> : Pour éviter les indices compliqués, il est commode de poser

$$J_n^k = \{(i_1,\dots,i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \le i_1 <\dots< i_k \le n\}$$

et, pour $I = (i_1,\dots,i_k) \in J_n^k$:

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge\dots\wedge dx_{i_k} .$$

Toute $\phi \in \Omega^k(U)$ s'écrit alors de façon unique sous la forme

$$\phi = \sum_{I\in J_n^k} \lambda_I\, dx_I$$

où $\lambda_I = \lambda_{i_1,\dots,i_k} \in \Omega^0(U)$.

La manière la plus simple de fabriquer une k-forme est donnée dans l'

1.7. <u>Exemple</u> : Soit $f_1,\dots,f_k$ k fonctions de classe C^∞ à valeurs réelles définies sur U. Alors $df_1,\dots,df_k$ sont des 1-formes sur U et $df_1 \wedge\dots\wedge df_k \in \Omega^k(U)$. Une $(k+1)^{\text{e}}$ fonction $\lambda \in \Omega^0(U)$ donne encore $\lambda\, df_1 \wedge\dots\wedge df_k \in \Omega^k(U)$. Or nous venons de voir que toute k-forme est somme de formes de ce type : il est souvent plus utile, comme on aura l'occasion de le vérifier, de l'écrire ainsi plutôt que de se servir des formules explicites utilisant les bases.

2. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE.

Ecrire df au lieu de f' permet de noter d l'application

$$d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U) : f \mapsto df = f' ,$$

laquelle vérifie :

$$d(f+g) = df + dg \quad \text{pour toutes } f,g \in \Omega^0(U),$$

$$d(\lambda f) = \lambda\, df \quad \text{pour tous } \lambda \in \mathbb{R},\ f \in \Omega^0(U),$$

$$d(fg) = (df)g + f\, dg \quad \text{pour toutes } f,g \in \Omega^0(U).$$

Il naît alors un désir d'étendre cette d à tout $\Omega^*(U)$, ce qui se fait grâce au

2.1. <u>THEOREME</u> : Il existe une unique application, appelée <u>différentielle extérieure</u>,

$$d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$$

qui satisfasse les conditions suivantes :

i) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d(\Omega^k(U)) \subset \Omega^{k+1}(U)$,

ii) d est $\mathbb{R}$-linéaire,

iii) pour toutes $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$,

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$

iv) $d \circ d = 0$,

v) si $f \in \Omega^0(U)$, $df = f'$.

<u>Commentaires</u> : Les conditions (i) à (iv) donnent à $\Omega^*(U)$ la structure d'une <u>algèbre différentielle graduée</u> (ADG) anticommutative.

L'introduction du facteur $(-1)^{\deg \alpha}$ en (iii) n'a rien de surprenant dans une algèbre extérieure.

La condition (iv) est moins facile à justifier <u>a priori</u>, sauf à vérifier (exercice conseillé) que c'est une conséquence d'une requête très raisonnable : il faut imposer (iv) si l'on veut que la différentielle d'une forme constante (de degré quelconque) soit nulle.

Démonstration :

I. Unicité

Soit d et δ deux applications vérifiant les conditions de l'énoncé.

1°) Elles coïncident sur $\Omega^0(U)$ grâce à (v). En particulier, pour tout $i = 1,\dots,n$, $dx_i = \delta x_i$.

2°) Soit $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \delta x_i \in \Omega^1(U)$ où $\alpha_i \in \Omega^0(U)$. Alors, à cause de (ii), (iii) et (iv),

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} d(\alpha_i\, dx_i) = \sum_{i=1}^{n} (d\alpha_i \wedge dx_i + (-1)^0\, \alpha_i\, d(dx_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d\alpha_i \wedge dx_i .$$

De même, $\delta\alpha = \sum_{i=1}^{n} \delta\alpha_i \wedge \delta x_i$, et donc $d\alpha = \delta\alpha$ grâce au 1°).

3°) Soit $k \geq 2$ et supposons que d et δ coïncident jusqu'en degré (k-1) inclus. Pour toute $\alpha \in \Omega^k(U)$, écrivons $\alpha = \sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec $1 \leq \deg \beta_i \leq k-1$ et $1 \leq \deg \gamma_i \leq k-1$ pour tout i (cf. 1.7.). Alors

$$d\alpha = \sum_i d(\beta_i \wedge \gamma_i)$$

$$= \sum_i (d\beta_i \wedge \gamma_i + (-1)^{\deg \beta_i}\, \beta_i \wedge d\gamma_i)$$

d'après (ii) et (iii). On obtient une expression analogue pour $\delta\alpha$, d'où $d\alpha = \delta\alpha$ par hypothèse de récurrence.

II. Existence

La condition (v) définit d sur $\Omega^0(U)$. Pour toute $\alpha = \sum_{I \in J_n^k} \alpha_I\, dx_I \in \Omega^k(U)$, où

$\alpha_I \in \Omega^0(U)$, on pose alors

$$d\alpha = \sum_{I\in J_n^k} d\alpha_I \wedge dx_I = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} d\alpha_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

(cf. le 2°) de la partie "Unicité").
La définition s'étend à $\Omega^*(U)$ comme d'habitude pour une somme directe, et les conditions (i) à (iv) se vérifient sur des formes homogènes.

i) est évident.

ii) Soit $\alpha = \sum_{I\in J_n^k} \alpha_I\, dx_I$, $\beta = \sum_{I\in J_n^k} \beta_I\, dx_I$ où $\alpha_I, \beta_I \in \Omega^0(U)$.
Puisque, sur $\Omega^0(U)$, d est la dérivation "ordinaire", $d(\alpha_I + \beta_I) = d\alpha_I + d\beta_I$ pour tout $I \in J_n^k$ et donc $d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta$. De la même manière, $d(\lambda\alpha) = \lambda\, d\alpha$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

iii) Pour éviter des calculs embrouillés on remarque d'abord que, si $\phi \in \Omega^0(U)$, $d(\phi\, dx_{i_1} \wedge\ldots\wedge dx_{i_k}) = d\phi \wedge dx_{i_1} \wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$ pour tout k-uplet $I = (i_1,\ldots,i_k)$:

- si $I \in J_n^k$, c'est la définition de d ;

- si I contient deux fois le même entier, les deux membres de l'égalité sont nuls ;

- si tous les indices de I sont distincts mais pas dans l'ordre croissant, on peut les réécrire dans le bon ordre en multipliant les deux membres par la même signature.

Soit alors $\alpha = \sum_{I\in J_n^p} \alpha_I\, dx_I \in \Omega^p(U)$ et $\beta = \sum_{J\in J_n^q} \beta_J\, dx_J \in \Omega^q(U)$ où $\alpha_I, \beta_J \in \Omega^0(U)$.
On a $\alpha\wedge\beta = \sum_{I\in J_n^p} \sum_{J\in J_n^q} \alpha_I\, \beta_J\, dx_I \wedge dx_J$, d'où, en vertu de la remarque liminaire :

$$d(\alpha\wedge\beta) = \sum_{I\in J_n^p} \sum_{J\in J_n^q} d(\alpha_I\beta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_{I\in J_n^p} \sum_{J\in J_n^q} \alpha_I\, d\beta_J \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I\in J_n^p} \sum_{J\in J_n^q} \beta_J\, d\alpha_I \wedge dx_I \wedge dx_J .$$

La seconde double somme n'est autre que $d\alpha \wedge \beta = \left(\sum_{I\in J_n^p} d\alpha_I \wedge dx_I\right) \wedge \left(\sum_{J\in J_n^q} \beta_J\, dx_J\right)$;

la première est $(-1)^p \alpha \wedge d\beta$ puisque $d\beta_J \wedge dx_I = (-1)^p\, dx_I \wedge d\beta_J$.

iv) 1°) Soit $\alpha \in \Omega^0(U)$. Alors

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} dx_i \;;\; d(d\alpha) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_j\,\partial x_i} dx_j \wedge dx_i \,.$$

Tous les termes où $i = j$ sont nuls, il ne reste donc, en utilisant le lemme de Schwarz (0.2.), que

$$d(d\alpha) = \sum_{i<j} \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_j\,\partial x_i} (dx_j \wedge dx_i + dx_i \wedge dx_j) = 0 \,.$$

2°) Soit $\alpha \in \Omega^1(U)$. On écrit α comme somme de formes $f\, dg$ où f et $g \in \Omega^0(U)$ (cf. 1.7.). Or $d(f\, dg) = df \wedge dg + f\, d(dg) = df \wedge dg$ en vertu de (iii) et du 1°). Donc $d(d(f\, dg)) = d(df \wedge dg) = d(df) \wedge dg - df \wedge d(dg) = 0$ et $d(d\alpha) = 0$.

3°) On suppose $k \geq 2$ et (iv) démontré jusqu'en degré $(k-1)$ inclusivement. Pour toute $\alpha \in \Omega^k(U)$, on écrit $\alpha = \sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ où $1 \leq \deg \beta_i \leq k-1$ et $1 \leq \deg \gamma_i \leq k-1$ pour tout i.

Or si $\beta \in \Omega^p(U)$, $1 \leq p \leq k-1$, et $\gamma \in \Omega^q(U)$, $1 \leq q \leq k-1$, $d(\beta\wedge\gamma) = d\beta \wedge \gamma + (-1)^p \beta \wedge d\gamma$, et $d(d\beta \wedge \gamma) = d(d\beta) \wedge \gamma + (-1)^{p+1} d\beta \wedge d\gamma = (-1)^{p+1} d\beta \wedge d\gamma$ en vertu de (iii) et de l'hypothèse de récurrence ; de même $d(\beta \wedge d\gamma) = d\beta \wedge d\gamma + (-1)^p \beta \wedge d(d\gamma) = d\beta \wedge d\gamma$. De là résulte que

$$d(d(\beta\wedge\gamma)) = (-1)^{p+1} d\beta \wedge d\gamma + (-1)^p d\beta \wedge d\gamma = 0$$

et $\quad d(d\alpha) = 0.$ □

Deux exemples pour illustrer, l'un classique, l'autre plus exotique.

2.2. <u>Exemple</u> : Soit, dans $\mathbb{R}^2$, l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si on note (x,y) les coordonnées, la base de $\Omega^1(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$-module sera $\{dx, dy\}$. La forme différentielle $\omega = f\, dx + g\, dy \in \Omega^1(U)$, où $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, est d'une grande célébrité (forme "angle") sous la notation incorrecte mais universelle

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y\, dx + x\, dy).$$

2.3. <u>THEOREME</u> : $d\omega = 0$.

<u>Démonstration</u> : Immédiate par calcul. □

Cette condition, qui signifie que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, est, à cause du Lemme de Schwarz, nécessaire pour que ω soit la différentielle d'une fonction. Mais la condition n'est pas suffisante (cf. §4), et en fait ω n'a pas d'antécédent par d. Pour se convaincre de cette propriété, ainsi que de l'utilité générale de ω, voir 7.4 et 7.5.

Pour une généralisation à $\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, voir IV.6.5.

2.4. <u>Exemple</u> : Soit un entier $n \geq 1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$. Dans cette perspective matricielle il est commode d'indexer par des couples les vecteurs de la base duale : ε^*_{ij} est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à la matrice M associe son coefficient de i^{e} ligne et de j^{e} colonne. De même pour tout ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la base de $\Omega^1(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$-module sera notée $\{dx_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Ainsi $dx_{ij}(M) = \varepsilon^*_{ij}$ pour toute $M \in U$.

Sur cette lancée, on est conduit à écrire des <u>matrices de formes différentielles</u> dont chaque coefficient est un élément de $\Omega^*(U)$. Par exemple, la matrice $(dx_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ à coefficients dans $\Omega^1(U)$ sera notée dM pour rester dans l'abus de notation habituel. On obtient ainsi une algèbre sur $\mathbb{R}$: c'est l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_n(\Omega^*(U))$, qu'on notera $\mathcal{M}^*_n(U)$; remarquer qu'elle est graduée par les sous-espaces vectoriels $\mathcal{M}^k_n(U) = \mathcal{M}_n(\Omega^k(U))$, $k \in \mathbb{N}$.

Mieux encore, la structure multiplicative de $\Omega^*(U)$ permet de définir un produit sur $\mathcal{M}^*_n(U)$ dont les propriétés sont analogues à celles du produit de matrices "ordinaires", <u>à cela près</u> que le produit des formes différentielles reste évidemment anticommutatif. (Pour alléger l'écriture, bien assez lourde déjà, on sous-entend les $\wedge$).

Enfin, si $\alpha = (\alpha_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n^k(U)$ -où donc les $\alpha_{ij} \in \Omega^k(U)$-, on note $d\alpha$ la matrice $(d\alpha_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n^{k+1}(U)$.

Sans étudier systématiquement (pour l'instant ?...) la situation ainsi créée, deux remarques :

si $\alpha \in \mathcal{M}_n^p(U)$, $\beta \in \mathcal{M}_n^q(U)$, il reste vrai que $d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^p \alpha\, d\beta$; par contre il n'est évidemment par vrai en général que $\alpha\alpha = 0$.

Cela étant, soit $U = GL(n,\mathbb{R})$, formé des matrices inversibles (c'est bien un ouvert par continuité de la fonction déterminant) et $\chi : U \to U : M \mapsto M^{-1}$. Ainsi $\chi\, dM \in \mathcal{M}_n^1(U)$: les usages (cf. 2.2) pousseraient à noter $M^{-1}\, dM$ plutôt que $\chi\, dM$.

On pose $\alpha_{n,p} = \mathrm{Tr}((\chi\, dM)^p) \in \Omega^p(U)$ (où Tr désigne la <u>trace</u>, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux).

<u>Exemple</u> (n = 2, p = 1) : Si on note $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, $M^{-1} = \frac{1}{xt - yz}\begin{pmatrix} t & -z \\ -y & x \end{pmatrix}$ et $\alpha_{2,1} = \frac{1}{xt-yz}(t\, dx - z\, dy - y\, dz + x\, dt)$ (notation comme en 2.2).

Dans ce cas, un calcul direct montre que $d\alpha_{2,1} = 0$: si $\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{xt-yz}$ et $\beta = t\, dx - z\, dy - y\, dz + x\, dt$, $d\phi = -\phi^2\, \beta$ et $d\beta = 0$.

La situation dans le cas général est la suivante :

2.5. <u>THEOREME</u> : Pour tous entiers $n \geq 1$, $p \geq 1$, $\alpha_{n,p} = 0$ si p est pair, $d\alpha_{n,p} = 0$ si p est impair.

<u>Démonstration</u> : Dans une algèbre de matrices à coefficients dans un anneau gradué anticommutatif, $\mathrm{Tr}(AB) = (-1)^{pq}\, \mathrm{Tr}(BA)$ si les coefficients de A sont de degré p et ceux de B de degré q : ainsi $\alpha_{n,p} = \mathrm{Tr}((\chi\, dM)(\chi\, dM)^{p-1}) = (-1)^{p-1}\alpha_{n,p}$, d'où $\alpha_{n,2q} = 0$.

Par ailleurs, notant I_n la matrice-unité, de $M^{-1}M = I_n$ on tire $d\chi\, M + M^{-1}\, dM = 0$, ou $d\chi = -M^{-1}\, dM\, M^{-1}$. La remarque précédente relative à la différentielle d'un produit, et le fait que Tr commute à d, montrent alors que $d\alpha_{n,2q-1} = -\alpha_{n,2q}$, d'où la seconde assertion. □

<u>REMARQUE</u> : On peut montrer que, pour p impair, $p \not\equiv 1$ mod. 4 et n assez grand, $\alpha_{n,p}$ n'est pas exacte (cf. [10]).

3. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E de dimension n, V un ouvert d'un espace vectoriel F de dimension p. On souhaite pouvoir associer à toute application de classe C^∞ $\phi : U \to V$ un morphisme d'ADG au niveau des Ω^*.

En degré 0 on obtient immédiatement par composition une

$$\phi^* : \Omega^0(V) \to \Omega^0(U) : f \mapsto f \circ \phi$$

qui vérifie $\phi^*(fg) = \phi^*(f).\phi^*(g)$.

Le morphisme espéré devra donc être en sens inverse de ϕ (cas <u>contravariant</u>). Pour l'étendre aux degrés supérieurs, commençons par observer son comportement sous différentiation :

si $x \in U$, $(f \circ \phi)'(x) = f'(\phi(x)) \circ \phi'(x)$, ce que l'on peut réécrire sous la forme

$${}^t\phi'(x)(f'(\phi(x))) = ({}^t\phi'(x) \circ f' \circ \phi)(x) .$$

(Par définition de la transposée, pour tous $\lambda \in \mathscr{L}(E,F)$, $\xi \in F^* = \mathscr{L}(F,\mathbb{R})$, $h \in E$, $\langle \xi, \lambda.h\rangle = \langle {}^t\lambda.\xi, h\rangle$; ici $\lambda = \phi'(x)$, $\xi = f'(\phi(x))$.)

On est alors conduit à définir, pour toute $\alpha \in \Omega^1(V)$, $\phi^*(\alpha) \in \Omega^1(U)$ en posant

$$\phi^*(\alpha)(x) = ({}^t\phi'(x) \circ \alpha \circ \phi)(x) \quad \text{pour} \quad x \in U :$$

on assure ainsi que $d(\phi^*(f)) = \phi^*(df)$.

Certes cette définition manque d'élégance formelle dans la mesure où x reste "emmêlé" à l'intérieur de l'expression. Mais toute tentative de le démêler (p.ex. en se servant de diagrammes) n'aboutit en fait qu'à compliquer encore la situation. D'autre part la généralisation à tous les degrés se fait sans réelle difficulté, comme suit :

3.1. THEOREME : Etant donné une application de classe C^∞ $\phi : U \to V$ où U et V sont des ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie, il existe une unique $\phi^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ de degré 0 telle que

i) ϕ^* soit $\mathbb{R}$-linéaire ,

ii) $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$,

iii) $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$ (en notant d les deux différentielles extérieures),

iv) $\phi^*(f) = f \circ \phi$ si $f \in \Omega^0(V)$.

De plus, si T est un ouvert d'un troisième espace vectoriel de dimension finie et $\psi : T \to U$ une application de classe C^∞,

v) $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

Enfin, si $U = V$,

vi) $(Id_U)^* = Id_{\Omega^*(U)}$.

(Les conditions (i) à (iii) assurent que ϕ^* est un morphisme d'ADG).

Démonstration :

I. Unicité, (v) et (vi).

Soit d'abord $\alpha = f\, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k \in \Omega^k(V)$ où $f, g_1, \ldots, g_k \in \Omega^0(V)$. Toute ϕ^* satisfaisant (ii), (iii) et (iv) vérifiera nécessairement

$$\begin{aligned} \phi^*(\alpha) &= \phi^*(f)\ \phi^*(dg_1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(dg_k) \\ &= \phi^*(f)\ d\phi^*(g_1) \wedge \ldots \wedge d\phi^*(g_k) \\ &= (f \circ \phi)\ d(g_1 \circ \phi) \wedge \ldots \wedge d(g_k \circ \phi) : \end{aligned}$$

donc, en vertu de (1.7) et de (i), deux morphismes satisfaisant les conditions de l'énoncé coïncident partout.

De même $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ puisque toutes deux doivent envoyer α sur $(f \circ \phi \circ \psi)\ d(g_1 \circ \phi \circ \psi) \wedge \ldots \wedge d(g_k \circ \phi \circ \psi)$.

Pour (vi), c'est trivial.

II. <u>Existence.</u>

Sur $\Omega^0(V)$, ϕ^* est définie par (iv).

Si $k \geq 1$, $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $x \in U$, on pose

$$\phi^*(\alpha)(x) = (\Lambda^k({}^t\phi'(x))).(\alpha(\phi(x))) \qquad \text{(cf. I.8.14)} .$$

Alors

i) est évident.

ii) Une démonstration directe à base de diagrammes est possible, mais sa démesure nous conduit à préférer une approche calculatoire.

Supposons -sans perte de généralité- que $F = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $\{\eta_1,\dots,\eta_p\}$; notons $\{dy_1,\dots,dy_p\}$ la base de $\Omega^1(V)$ en tant que $\Omega^0(V)$-module qui en résulte. Par définition,

$$\begin{aligned}\phi^*(dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_k})(x) &= (\Lambda^k({}^t\phi'(x))).(dy_{i_1}(\phi(x))\wedge\dots\wedge dy_{i_k}(\phi(x)))\\ &= ({}^t\phi'(x).\eta^*_{i_1})\wedge\dots\wedge({}^t\phi'(x).\eta^*_{i_k}) .\end{aligned}$$

Cette égalité a lieu que $(i_1,\dots,i_k) \in J^k_p$ ou non, de sorte que $\phi^*(dy_I \wedge dy_J) = \phi^*(dy_I) \wedge \phi^*(dy_J)$ dans tous les cas.

De même, pour $\alpha \in \Omega^0(V)$ et que $I \in J^k_p$ ou non,

$$\begin{aligned}\phi^*(\alpha\, dy_I)(x) &= ({}^t\phi'(x)\wedge\dots\wedge{}^t\phi'(x)).(\alpha(\phi(x))\, dy_{i_1}(\phi(x))\wedge\dots\wedge dy_{i_k}(\phi(x)))\\ &= \alpha(\phi(x))({}^t\phi'(x).\eta^*_{i_1})\wedge\dots\wedge({}^t\phi'(x).\eta^*_{i_k})\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\phi^*(\alpha\, dy_I) = \phi^*(\alpha)\,\phi^*(dy_I)$.

Soit alors $\alpha = \sum_{I\in J^r_p} \alpha_I\, dy_I \in \Omega^r(V)$ et $\beta = \sum_{J\in J^s_p} \beta_J\, dy_J \in \Omega^s(V)$ où $\alpha_I, \beta_J \in \Omega^0(V)$. En vertu de (i),

$$\phi^*(\alpha) = \sum_{I\in J_p^r} \phi^*(\alpha_I\, dy_I)$$

$$= \sum_{I\in J_p^r} \phi^*(\alpha_I)\, \phi^*(dy_I)$$

comme on vient de le voir. De même

$$\phi^*(\beta) = \sum_{J\in J_p^s} \phi^*(\beta_J)\, \phi^*(dy_J)\ .$$

Il en résulte, en utilisant de nouveau les remarques ci-dessus, ainsi que (iv) et (i), que

$$\phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta) = \sum_I \sum_J \phi^*(\alpha_I)\, \phi^*(\beta_J)\, \phi^*(dy_I) \wedge \phi^*(dy_J)$$

$$= \sum_I \sum_J \phi^*(\alpha_I\, \beta_J)\, \phi^*(dy_I \wedge dy_J)$$

$$= \sum_I \sum_J \phi^*(\alpha_I\, \beta_J\, dy_I \wedge dy_J)$$

$$= \phi^*(\sum_I \sum_J \alpha_I\, \beta_J\, dy_I \wedge dy_J)$$

$$= \phi^*(\alpha \wedge \beta)\ .$$

iii) On rappelle que, à proprement parler, dy_i est la dérivée de $\pi_i^!|_V : V \to \mathbb{R} : (y_1,\dots,y_p) \mapsto y_i$.

Dans l'introduction au présent théorème, nous avons vu que notre définition assure

$$\phi^*(df) = d(\phi^*(f)) \quad \text{pour toute} \quad f \in \Omega^0(V)\ :$$

d'où $d(\phi^*(dy_i)) = d(\phi^*(d(\pi_i^!|_V)))$

$= d(d(\phi^*(\pi_i^!|_V))) = 0$.

Soit alors $\alpha = \sum_{I\in J_p^k} \alpha_I\, dy_I \in \Omega^k(V)$ où $\alpha_I \in \Omega^0(V)$. D'après (ii), on a

$$\phi^*(\alpha) = \sum_{I \in J_p^k} \phi^*(\alpha_I)\, \phi^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \phi^*(dy_{i_k}) \;;$$

et $$d(\phi^*(\alpha)) = \sum_{I \in J_p^k} d(\phi^*(\alpha_I)) \wedge \phi^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \phi^*(dy_{i_k})$$

puisqu'on vient de voir que tous les autres termes sont nuls.

Simultanément, $d\alpha = \sum_{I \in J_p^k} d\alpha_I \wedge dy_I$; et, comme ci-dessus,

$$\phi^*(d\alpha) = \sum_{I \in J_p^k} d(\phi^*(\alpha_I)) \wedge \phi^*(dy_I) \;.$$

De là $d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$, en utilisant (ii). □

Lorsque des bases sont données pour E et F, on peut obtenir des formules explicites donnant l'image réciproque d'une forme différentielle. Nous terminons ce paragraphe en les calculant.

Supposons, sans perte de généralité, que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, munis de leurs bases canoniques respectives $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ et $\{\eta_1,\ldots,\eta_p\}$. La dérivée $\phi'(x)$ se représente alors par sa matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \ldots\ldots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_p}{\partial x_1}(x) & \ldots\ldots & \dfrac{\partial \phi_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(cf. 0.1.).}$$

Pour une 1-forme $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, dy_i \in \Omega^1(V)$ où $\alpha_i \in \Omega^0(V)$, il est immédiat que

$$\phi^*(\alpha)(x) = {}^t\phi'(x).(\alpha(\phi(x))) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)\, \alpha_i(\phi(x)) \right) \varepsilon_j^* \;.$$

Autrement dit : $\phi^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, dx_j$ où $\beta_j = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$.

Pour une k-forme, $k \geq 2$, le calcul est un peu plus compliqué, mais relève de la même technique. Soit d'abord $I = (i_1,\ldots,i_k) \in J_p^k$; pour développer

$$\begin{aligned} \Lambda^k({}^t\phi'(x)).(\eta_I^*) &= ({}^t\phi'(x).\eta_{i_1}^*) \wedge\ldots\wedge ({}^t\phi'(x).\eta_{i_k}^*) \\ &= \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial x_r}(x)\, \varepsilon_r^*\right] \wedge\ldots\wedge \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \phi_{i_k}}{\partial x_r}(x)\, \varepsilon_r^*\right] \end{aligned}$$

on observe que le coefficient de ε_J^*, où $J = (j_1,\ldots,j_k) \in J_n^k$, n'est autre que le déterminant

$$D_J^I(\phi)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial x_{j_1}}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial \phi_{i_k}}{\partial x_{j_1}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial x_{j_k}}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial \phi_{i_k}}{\partial x_{j_k}}(x) \end{vmatrix}$$

extrait de la transposée de la matrice jacobienne : les signatures des permutations qui interviennent dans le développement interviennent identiquement dans le déterminant. Il s'ensuit que

$$\phi^*(dy_I)(x) = \sum_{J \in J_n^k} D_J^I(\phi)(x)\, \varepsilon_J^*$$

ou

$$\phi^*(dy_I) = \sum_{J \in J_n^k} D_J^I(\phi)\, dx_J .$$

Soit alors $\alpha = \sum_{I \in J_p^k} \alpha_I \, dy_I \in \Omega^k(V)$ où $\alpha_I \in \Omega^0(V)$. On a

$$\phi^*(\alpha) = \sum_{I\in J_p^k} \phi^*(\alpha_I)\ \phi^*(dy_I)$$

$$= \sum_{I\in J_p^k} (\alpha_I \circ \phi) \sum_{J\in J_n^k} D_J^I(\phi)\ dx_J\ .$$

Donc, en toute dimension :

3.2. CALCUL EXPLICITE.

Si $\alpha = \sum_{I\in J_p^k} \alpha_I\, dy_I \in \Omega^k(V)$ où $\alpha_I \in \Omega^0(V)$, $\phi^*(\alpha) = \sum_{J\in J_n^k} \beta_J\, dx_J \in \Omega^k(U)$ où

$\beta_J \in \Omega^0(U)$ est donné par $\beta_J = \sum_{I\in J_p^k} (\alpha_I \circ \phi)\ D_J^I(\phi)$ avec

$$D_J^I(\phi) = D^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}(\phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial\phi_{i_k}}{\partial x_{j_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\phi_{i_1}}{\partial x_{j_k}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial\phi_{i_k}}{\partial x_{j_k}} \end{vmatrix} .$$

4. COHOMOLOGIE DE DE RHAM.

On note $d_k = d\big|_{\Omega^k(U)} : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$. Comme avec toute ADG, la méthode classique pour étudier $\Omega^*(U)$ consiste à introduire les espaces vectoriels

$$Z^k(U) = \operatorname{Ker} d_k \qquad (k \in \mathbb{N}),$$
$$B^k(U) = \operatorname{Im}\ d_{k-1} \qquad (k \geq 1),$$
$$B^0(U) = \{0\}.$$

Une k-forme élément de $Z^k(U)$ est dite fermée ;
Une k-forme élément de $B^k(U)$ est dite exacte.
On a vu (2.1.(iv)) que $B^k(U) \subset Z^k(U)$, mais la réciproque est fausse en général.
C'est même précisément l'"excédent" de Z^k sur B^k à quoi on s'intéresse en posant la

4.1. DEFINITION : On appelle $k^{\text{ème}}$-espace vectoriel de cohomologie de De Rham de U le quotient $H^k(U) = Z^k(U)/B^k(U)$. Pour toute $\omega \in Z^k(U)$, on note $[\omega]$ sa classe dans $H^k(U)$.

On pose $H^*(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^k(U)$.

4.2. REMARQUE : Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H^k(U) = \{0\}$ dès que $k > n$.

4.3. REMARQUE : Si U est connexe, une fonction réelle f de classe C^∞ sur U vérifie la condition $df = 0$ ssi elle est constante. C'est dire que l'application $Z^0(U) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(x)$ (où x est n'importe quel point de U) est un isomorphisme.

Il en résulte que $H^0(U) \cong \mathbb{R}$.

De manière plus générale, si U a m composantes connexes, $H^0(U) \cong \mathbb{R}^m$.

Prévisible, et rassurant, est le

4.4. THEOREME : Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\phi : U \to V$ une application de classe C^∞, le morphisme d'ADG

$$\phi^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$$

induit une application linéaire de degré 0

$$\phi^* : H^*(V) \to H^*(U) .$$

Si T est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\psi : T \to U$ une application de classe C^∞, alors

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^* : H^*(V) \to H^*(T) .$$

Si $n = p$ et $U = V$, alors

$$(Id_U)^* = Id_{H^*(U)} : H^*(U) \to H^*(U) .$$

REMARQUE : Il n'y a guère de risque de confusion à utiliser la même notation au niveau de H^* qu'au niveau d'Ω^* : le contexte lève l'ambiguïté.

Démonstration : L'assertion (iii) du théorème 3.1. garantit que $\phi^*(Z^k(V)) \subset Z^k(U)$ et $\phi^*(B^k(V)) \subset B^k(U)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le présent théorème s'en déduit par des techniques élémentaires d'algèbre linéaire. □

5. HOMOTOPIE.

On s'intéresse ici à la situation créée en faisant varier une forme différentiablement en fonction d'un paramètre. Du point de vue de la cohomologie, le point essentiel est le corollaire 5.9.

5.1. DEFINITION : Une k-forme différentielle dépendant d'un paramètre est une application de classe C^∞ $\alpha : U \times \mathbb{R} \to \Lambda^k(E^*)$ où U est, comme précédemment, un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E.

Si on pose $\alpha_t(x) = \alpha(x,t)$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_t \in \Omega^k(U)$ et $t \mapsto \alpha_t$ est de classe C^∞.

On note $\Omega P^k(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes dépendant d'un paramètre, et $\Omega P^*(U) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega P^k(U)$.

Si l'on veut éviter une lourdeur d'expression intolérable, des identifications, d'ailleurs classiques, sont indispensables. Pour nous prémunir contre les confusions qui pourraient résulter de ces légers abus de notation, nous commençons par examiner en détail la

5.2. STRUCTURE DE $\Omega^*(U \times \mathbb{R})$.

Conformément à la tradition, on considère E comme sous-espace de $E \times \mathbb{R}$ avec l'"inclusion"

$$\iota_E : E \to E \times \mathbb{R} : x \mapsto (x,0)$$

et la projection $\pi_E : E \times \mathbb{R} \to E : (x,t) \mapsto x$. Si $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ est une base de E, $E \times \mathbb{R}$ admet la base $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\theta\}$ où $\theta = (0,1)$ et ε_i "=" $(\varepsilon_i,0)$ -c'est-à-dire qu'on traite ι_E effectivement comme une inclusion. De façon analogue, E^* apparait comme sous-espace de $(E \times \mathbb{R})^*$, avec ${}^t\pi_E$ pour "inclusion" et les bases duales $\{\varepsilon_1^*,\ldots,\varepsilon_n^*\}$ et $\{\varepsilon_1^*,\ldots,\varepsilon_n^*,\theta^*\}$ respectivement.

Sur cette lancée, on note dx_i aussi bien la forme $((x,t) \mapsto \varepsilon_i^*) \in \Omega^1(U \times \mathbb{R})$ que la forme $(x \mapsto \varepsilon_i^*) \in \Omega^1(U)$ -cependant que, bien entendu, $dt : (x,t) \mapsto \theta^*$-, de telle sorte que $\{dx_1,\ldots,dx_n,dt\}$ est une base de $\Omega^1(U \times \mathbb{R})$ en tant qu'$\Omega^0(U \times \mathbb{R})$-module et $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$ une base de $\Omega^1(U)$ en tant qu'$\Omega^0(U)$-module.

Si on ajoute l'"inclusion"

$$\Omega^0(U) \subset \Omega^0(U \times \mathbb{R}) \ : \ \lambda \mapsto \lambda \circ (\pi_E|_{U\times\mathbb{R}})$$

on obtient des inclusions $\Omega^k(U) \subset \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ pour tout entier k.

(Tout ce qui précède revient à confondre fonction constante par rapport à une de ses variables et fonction à une variable de moins...).

Enfin il est clair que les deux différentielles coïncident sur $\Omega^0(U)$, et par conséquent sur $\Omega^*(U)$, ce qui fait au bout du compte de $\Omega^*(U)$ une sous-ADG de $\Omega^*(U \times \mathbb{R})$.

De ce point de vue, $\Omega P^*(U)$ apparait comme un compromis : $\Omega P^1(U)$ est l'$\Omega^0(U \times \mathbb{R})$-module sur $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$ seulement, et $\Omega P^*(U)$ est son $\Omega^0(U \times \mathbb{R})$-algèbre extérieure. C'est une sous-algèbre de $\Omega^*(U \times \mathbb{R})$, mais ce n'est pas une sous-ADG étant donné que $d(\Omega P^0(U)) \not\subset \Omega P^1(U)$.

Plus précisément, soit $f \in \Omega P^0(U) = \Omega^0(U \times \mathbb{R})$. Alors
$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$, et $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ en général. Toutefois, si on pose
$\xi f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, et, pour $\alpha = \sum_{I\in J_n^k} \alpha_I \, dx_I$ où $\alpha_I \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$,
$\xi\alpha = \sum_{I\in J_n^k} \xi\alpha_I \wedge dx_I$ (ξ étant ainsi la "x-composante" de la différentielle), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\xi(\Omega P^k(U)) \subset \Omega P^{k+1}(U)$$

De là un utile

5.3. LEMME : Si $k \geq 1$, toute forme $\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ peut s'écrire de façon unique $\omega = \alpha + \beta \wedge dt$ où $\alpha \in \Omega P^k(U)$ et $\beta \in \Omega P^{k-1}(U)$.

De plus $d\omega = \lambda + \mu \wedge dt$ où $\lambda = \xi\alpha \in \Omega P^{k+1}(U)$ et $\mu = \xi\beta + (-1)^k \frac{\partial\alpha}{\partial t} \in \Omega P^k(U)$.

Démonstration : Un élément de la base de $\Omega^k(U \times \mathbb{R})$ en tant qu'$\Omega^0(U \times \mathbb{R})$-module est soit de la forme $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, soit de la forme $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}} \wedge dt$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{k-1} \leq n$. L'unique développement

$$\omega = \sum_{I \in J_n^k} \alpha_I \, dx_I + \sum_{J \in J_n^{k-1}} \beta_J \, dx_J \wedge dt$$

où $\alpha_I, \beta_J \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$, fournit donc $\alpha = \sum_{I \in J_n^k} \alpha_I \, dx_I$ et $\beta = \sum_{J \in J_n^{k-1}} \beta_J \, dx_J$ tels qu'annoncés.

On a alors $d\omega = d\alpha + d\beta \wedge dt$ avec $d\alpha = \xi\alpha + \sum_{I \in J_n^k} \frac{\partial\alpha_I}{\partial t} dt \wedge dx_I$ et $d\beta = \xi\beta + \sum_{J \in J_n^{k-1}} \frac{\partial\beta_J}{\partial t} dt \wedge dx_J$, d'où le second résultat, en notant

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \sum_{I \in J_n^k} \frac{\partial\alpha_I}{\partial t} dx_I \, . \quad \square$$

Un dernier préliminaire technique est consacré à l'intégration des formes différentielles dépendant d'un paramètre. (Une notion plus générale d'intégrale pour les formes différentielles sera introduite plus loin (VI.1.18). Notre propos ici est beaucoup moins ambitieux).

5.4. DEFINITION : Soit $\alpha \in \Omega P^k(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$. On écrit $\alpha = \sum_{I \in J_n^k} \alpha_I \, dx_I$ avec $\alpha_I \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$ et $\alpha_t(x) = \alpha(x,t)$. Alors $\int_a^b \alpha_t \, dt$ est définie comme étant la forme $\sum_{I \in J_n^k} \beta_I \, dx_I \in \Omega^k(U)$ où $\beta_I \in \Omega^0(U)$ est la fonction $\beta_I : x \to \int_a^b \alpha_I(x,t) \, dt$.

REMARQUE : Vu le contexte, la notation "dt" dans l'intégrale est aussi malvenue que possible pour l'instant (cf.p.ex.5.3).On ne peut y échapper pour des raisons historiques.

Le théorème espéré de "différentiation sous le signe $\int$" prend la forme suivante :

5.5. LEMME : Si $\alpha \in \Omega P^k(U)$, alors, dans $\Omega^{k+1}(U)$,

$$d\left(\int_a^b \alpha_t \, dt\right) = \int_a^b (\xi\alpha)_t \, dt \, .$$

Démonstration : Avec les notations de 5.4., $\int_a^b \alpha_t \, dt = \sum_{I \in J_n^k} \beta_I \, dx_I$ où $\beta_I \in \Omega^0(U)$ est indépendant de t. De là

$$d\left(\int_a^b \alpha_t \, dt\right) = \sum_{I \in J_n^k} d\beta_I \wedge dx_I$$

$$= \sum_{I \in J_n^k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \beta_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \, .$$

(Bien entendu, beaucoup de termes de cette double somme sont nuls ; peu importe).
D'un autre côté,

$$\xi\alpha = \sum_{I \in J_n^k} \xi\alpha_I \wedge dx_I = \sum_{I \in J_n^k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \, .$$

(Même remarque).

Le lemme est donc conséquence du théorème "élémentaire" :

$$\frac{\partial \beta_I}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_i}(x,t) \, dt \, . \quad \square$$

C'est alors que le concept-titre de ce paragraphe apparaît dans deux définitions, qui à première vue n'ont pas l'air d'avoir grand'chose à voir l'une avec l'autre :

5.6. DEFINITION : Un opérateur d'homotopie pour U est une application $\mathbb{R}$-linéaire de degré (-1) $K : \Omega^*(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^*(U)$ telle que

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^*$$

où l'on note d les deux différentielles et J_i (i=0,1) l'inclusion $x \mapsto (x,i) : U \to U \times \mathbb{R}$.

5.7. DEFINITION : Soit U,V des ouverts de deux espaces vectoriels de dimension finie. On dit que deux applications de classe C^∞ $f_0, f_1 : U \to V$ sont (différentiablement) homotopes, ce qui se note $f_0 \simeq f_1$, ssi il existe une application $f : U \times \mathbb{R} \to V$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in U$, $f_0(x) = f(x,0)$ et $f_1(x) = f(x,1)$.

En fait ces deux notions sont très proches comme le prouve la démonstration des deux résultats fondamentaux du paragraphe :

5.8. THEOREME : Il existe toujours un opérateur d'homotopie.

5.9. COROLLAIRE : Si $f_0 \simeq f_1$, alors $f_0^* = f_1^* : H^*(V) \to H^*(U)$.

Démonstration de 5.9 : L'hypothèse signifie précisément que $f_i = f \circ J_i$ $(i = 0,1)$; supposant 5.8. démontré, $f_1^* - f_0^* = (J_1^* - J_0^*) \circ f^* = (d \circ K + K \circ d) \circ f^*$ au niveau d'Ω^*.

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha \in \Omega^k(V) \text{ avec } d\alpha = 0,\ (f_1^* - f_0^*)(\alpha) &= d \circ K \circ f^*(\alpha) + K \circ d \circ f^*(\alpha) \\ &= d(K \circ f^*(\alpha)) + K \circ f^*(d\alpha) \qquad (3.1.(iii)) \\ &= d\beta + 0 \quad \text{avec} \quad \beta \in \Omega^{k-1}(U), \end{aligned}$$

d'où $(f_1^* - f_0^*)(Z^k(V)) \subset B^k(U)$ et, passant à la cohomologie de De Rham, $f_1^* - f_0^* = 0$ au niveau de H^*.

Démonstration de 5.8. : Soit $\omega = \alpha + \beta \wedge dt \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ (cf. 5.3.). Pour calculer $J_i^*(\omega)$, on observe que pour tout $x \in U$, $J_i'(x) = \iota_E$, donc que la matrice de ${}^tJ_i'(x)$ est

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{E^*} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} .$$

Du fait que ${}^tJ_i'(x)(\theta^*) = 0$ résulte que $J_i^*(dt) = 0$ et $J_i^*(\omega) = J_i^*(\alpha + \beta \wedge dt) = J_i^*(\alpha)$.

Du fait que ${}^tJ_i'(x)\big|_{E^*} = \mathrm{Id}_{E^*}$ résulte que $J_i^*(\alpha)(x) = \alpha(x,i)$ pour tout $x \in U$.

Finalement : $(J_1^* - J_0^*)(\omega) : x \mapsto \alpha(x,1) - \alpha(x,0)$.

Pour une telle ω, on pose alors $K(\omega) = (-1)^{k-1} \int_0^1 \beta_t \, dt$.

(Noter que si l'on veut éviter le signe, on peut toujours écrire $\omega = \alpha + dt \wedge \gamma$ et adapter la démonstration). On a $d(K(\omega)) = (-1)^{k-1} \int_0^1 (\xi\beta)_t \, dt$ d'après 5.5. . Par ailleurs (notations de 5.3.), $d\omega = \lambda + \mu \wedge dt$ et

$$K(d\omega) = (-1)^k \int_0^1 \mu_t \, dt \qquad (\text{car } d\omega \in \Omega^{k+1}(U \times \mathbb{R}))$$

$$= (-1)^k \int_0^1 (\xi\beta)_t \, dt + \int_0^1 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_t dt$$

par définition de μ.

De là $\quad (d \circ K + K \circ d)(\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_t dt$. Or par définition, $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_t(x) = \frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t)$,

d'où $(d \circ K + K \circ d)(\omega) : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t) \, dt = \alpha(x,1) - \alpha(x,0)$. □□

6. COHOMOLOGIE DES ESPACES $\mathbb{R}^n$.

Dès ce premier calcul, l'instrument essentiel est l'homotopie, qui permet de tout ramener au cas où $n = 0$.

On établit d'abord ce résultat partiel :

6.1. <u>LEMME</u> :

$$H^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R} .$$

Pour tout entier $k > 0$,

$$H^k(\mathbb{R}^0) = \{0\} .$$

<u>Démonstration</u> : Pour $k \geq 1$, $\Lambda^k(\mathbb{R}^0) = \{0\}$, d'où $\Omega^k(\mathbb{R}^0) = \{0\}$, d'où $H^k(\mathbb{R}^0) = \{0\}$.

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}^0$ étant dérivable (cf. 0.1.), $\Omega^0(\mathbb{R}^0) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^0,\mathbb{R})$ qui est canoniquement isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) à $\mathbb{R}$. La différentielle ne pouvant être que nulle, $Z^0(\mathbb{R}^0) = \Omega^0(\mathbb{R}^0)$, d'où $H^0(\mathbb{R}^0) = Z^0(\mathbb{R}^0)/B^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R}/\{0\} = \mathbb{R}$. (cf. 4.3). □

Pour passer au cas général, on utilise l'injection canonique $i : \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^n : 0 \mapsto 0$ et la projection canonique $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^0 : x \mapsto 0$. Il est clair que $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^0}$.

6.2. <u>LEMME</u> : La composée $q = i \circ p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto 0$ est homotope à l'identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

<u>Démonstration</u> : On définit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ par $f(x,t) = tx$. Cette application est notoirement de classe C^∞. De plus, $f_0(x) = f(x,0) = 0$, donc $f_0 = q$; et $f_1(x) = f(x,1) = x$, donc $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. □

6.3. <u>THEOREME</u> : Pour tout entier n,

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \{0\} & \text{si } k \geq 1 . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Si $n = 0$, le résultat a été démontré en 6.1..

Si $n \geq 1$, le Lemme 6.2. montre que $i^* : H^*(\mathbb{R}^n) \to H^*(\mathbb{R}^0)$ et $p^* : H^*(\mathbb{R}^0) \to H^*(\mathbb{R}^n)$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre : en effet (cf. 4.4 et 5.9) $p^* \circ i^* = (i \circ p)^* = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})^* = \mathrm{Id}_{H^*(\mathbb{R}^n)}$; $i^* \circ p^* = (p \circ i)^* = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^0})^* = \mathrm{Id}_{H^*(\mathbb{R}^0)}$. □

7. COHOMOLOGIE DE $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Bien que des méthodes plus puissantes doivent nous permettre (V.2.4) de déterminer directement cette cohomologie -et même celle de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour tout entier n- les calculs de ce paragraphe sont loin de manquer d'intérêt en dépit, ou plutôt à cause, de leur caractère artisanal.

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

En vertu des remarques 4.2 et 4.3, $H^n(U) = \{0\}$ si $n \geq 3$ et $H^0(U) = \mathbb{R}$. Pour le reste, la forme de U donne l'envie irrésistible de "passer en coordonnées polaires". Rigoureusement, cela se fait ainsi :

Soit $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (donc $\Omega^n(V) = \{0\}$ pour $n \geq 3$) et $\phi : V \to U : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Il est clair que ϕ est de classe C^∞, surjective et que $\phi \circ \tau = \phi$ si τ est la translation $V \to V : (r,\theta) \mapsto (r, \theta + 2\pi)$.

De cette dernière remarque résulte que $\phi^*(\Omega^*(U)) \subset \Theta^*$ où Θ^* est la sous-algèbre (et même sous-ADG) de $\Omega^*(V)$ invariante par l'action de τ^*. Pour décrire Θ^* :

7.1. <u>LEMME</u> : Soit $f \in \Omega^0(V)$, $\alpha = a\,dr + b\,d\theta \in \Omega^1(V)$, $\omega = c\,dr \wedge d\theta \in \Omega^2(V)$. Alors

$f \in \Theta^0$ ssi $f \circ \tau = f$,

$\alpha \in \Theta^1$ ssi $a \circ \tau = a$ <u>et</u> $b \circ \tau = b$,

$\omega \in \Theta^2$ ssi $c \circ \tau = c$.

<u>Démonstration</u> : Evidente. □

En fait,

7.2. <u>THEOREME</u> : L'homomorphisme ϕ^* induit par le changement de coordonnées réalise un isomorphisme entre $\Omega^*(U)$ et Θ^*.

<u>Démonstration</u> :

<u>Injectivité</u>.

Sur $\Omega^0(U)$, elle résulte de la surjectivité de ϕ, puisque $\phi^*(f) = f \circ \phi$.

Sur $\Omega^1(U)$: soit $\alpha = a\,dx + b\,dy$ où a et b sont des fonctions réelles de classe C^∞ sur U. Alors $\phi^*(\alpha) = u\,dr + v\,d\theta$ avec

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} u(r,\theta) = a \circ \phi(r,\theta)\cos\theta + b \circ \phi(r,\theta)\sin\theta \\ v(r,\theta) = r(-a \circ \phi(r,\theta)\sin\theta + b \circ \phi(r,\theta)\cos\theta). \end{cases}$$

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0,$

de $u = v = 0$ on déduit que $a \circ \phi = b \circ \phi = 0$, d'où $a = b = 0$ par surjectivité de ϕ.

Sur $\Omega^2(U)$: soit $\omega = c\, dx \wedge dy$ où c est une fonction réelle de classe C^∞ sur U. Alors $\phi^*(\omega) = w\, dr \wedge d\theta$ avec $w(r,\theta) = r.\, c \circ \phi(r,\theta)$, et ici encore $w = 0$ implique $c = 0$.

Surjectivité.

A défaut d'une réciproque pour ϕ (qui bien sûr n'existe pas) on démontre sans peine sinon avec plaisir le

7.3. LEMME TECHNIQUE :

i) Les fonctions

$$\lambda : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Arccotg} \frac{x}{y} & \text{si } y > 0 \\ \pi + \operatorname{Arccotg} \frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

coïncident sur les trois premiers quadrants (ouverts) et diffèrent de 2π sur le quatrième.

ii) En tout point où elle(s) est/sont définie(s), $\lambda \circ \phi(r,\theta)$ et/ou $\mu \circ \phi(r,\theta)$ est/sont égale(s) à θ modulo 2π.

Soit alors $f \in \Theta^0$, $(x,y) \in U$. Si $x \neq 0$ on pose $g_1(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}, \lambda(x,y))$; si $y \neq 0$, on pose $g_2(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}, \mu(x,y))$. Il est clair que g_1 et g_2 sont de classe C^∞ et, d'après 7.3(i), sont égales sur l'intersection des ouverts où elles sont définies : d'où une application $g \in \Omega^0(U)$ coïncidant avec g_1 et/ou g_2 en tout point de U. D'après 7.3(ii), $g \circ \phi = f$.

Si $\alpha \in \Theta^1$, $\alpha = u\, dr + v\, d\theta$ avec $u,v \in \Theta^0$ d'après 7.1. Soit $h,k \in \Omega^0(U)$ les antécédents respectifs de u,v (construits comme ci-dessus). Un calcul direct (cf. le système (I)) montre que, si

$$a(x,y) = h(x,y)\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - k(x,y)\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

et $$b(x,y) = k(x,y)\,\frac{x}{x^2+y^2} + h(x,y)\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

la forme $\beta = a\,dx + b\,dy \in \Omega^1(U)$ vérifie $\phi^*(\beta) = \alpha$.

Si $\omega \in \Theta^2$, $\omega = w\,dr \wedge d\theta$ avec $w \in \Theta^0$. Soit $z \in \Omega^0(U)$ l'antécédent de w. On pose $c(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,z(x,y)$ et $\sigma = c\,dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$ vérifie $\phi^*(\sigma) = \omega$. □

Il est maintenant très commode de décrire la cohomologie de U en utilisant Θ^*. Pour la dimension 1, on considère la forme linéaire $A : \Omega^1(V) \to \mathbb{R}$ définie par $A(\alpha) = \int_0^{2\pi} b(1,\theta)\,d\theta$ si $\alpha = a\,dr + b\,d\theta$. (C'est, explicitée en coordonnées polaires, l'intégration le long du cercle unité).

7.4. <u>THEOREME</u> : La restriction I de A à $\Theta^1 \cap Z^1(V)$ est surjective et Ker I = $d(\Theta^0)$.

<u>Démonstration</u> : Il est immédiat que $d\theta \in \Theta^1 \cap Z^1(V)$; or $I(d\theta) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, d'où la surjectivité par linéarité de I.

Si $f \in \Theta^0$, $df = \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,d\theta$ et $\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(1,\theta)\,d\theta = f(1,2\pi) - f(1,0) = 0$.

Réciproquement, soit $\alpha = a\,dr + b\,d\theta \in \Theta^1$ telle que $d\alpha = \left(\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial \theta}\right) dr \wedge d\theta = 0$ et que $\int_0^{2\pi} b(1,\theta)\,d\theta = 0$. Pour que $df = \alpha$, il faut que $\frac{\partial f}{\partial r} = a$, d'où

$f(r,\theta) = \int_1^r a(s,\theta)\,ds + \lambda(\theta)$ avec λ de classe C^∞. De là

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) &= \int_1^r \frac{\partial a}{\partial \theta}(s,\theta)\,ds + \frac{d\lambda}{d\theta}(\theta)\\ &= \int_1^r \frac{\partial b}{\partial r}(s,\theta)\,ds + \frac{d\lambda}{d\theta}(\theta)\\ &= b(r,\theta) - b(1,\theta) + \frac{d\lambda}{d\theta}(\theta)\,.\end{aligned}$$

On prendra donc $\lambda(\theta) = \int_0^\theta b(1,t)\,dt$, d'où $f(r,\theta) = \int_1^r a(s,\theta)\,ds + \int_0^\theta b(1,t)\,dt$ et l'on a bien

$$f(r,\theta+2\pi) - f(r,\theta) = \int_1^r [a(s,\theta+2\pi) - a(s,\theta)]ds + \int_\theta^{\theta+2\pi} b(1,t)\,dt = 0$$

par périodicité de a et b. □

7.5. <u>COROLLAIRE</u> : Si, comme il est d'usage, on note pour $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\int_{S^1} \alpha = A(\phi^*(\alpha))$, l'application $J : \Omega^1(U) \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \int_{S^1} \alpha$ induit un isomorphisme entre $H^1(U)$ et $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : L'isomorphisme ϕ^* transporte $Z^1(U)$ sur $Z^1(V) \cap \Theta^1$, $B^1(U)$ sur $d(\Theta^0)$ et $J|_{Z^1(U)}$ sur I. Le Théorème 7.4 assure alors que $J|_{Z^1(U)}$ est surjective et que son noyau est $B^1(U)$, d'où l'isomorphisme annoncé en passant au quotient.

[N.B. : c'est la forme $\frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$ dont l'image par ϕ^* est $d\theta$] . □

La situation est encore plus simple en dimension 2 :

7.6. <u>THEOREME</u> : On a l'égalité $d(\Theta^1) = \Theta^2$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\omega = c\,dr \wedge d\theta$ avec $c \in \Theta^0$. Il suffit de poser par exemple

$$b(r,\theta) = \int_1^r c(s,\theta)\,ds \quad \text{et} \quad \alpha = b\,d\theta :$$

on a bien $b(r,\theta+2\pi) = b(r,\theta)$, d'où $\alpha \in \Theta^1$, et $d\alpha = \frac{\partial b}{\partial r}\,dr \wedge d\theta = \omega$. □

7.7. <u>COROLLAIRE</u> : La cohomologie de U est nulle en dimension 2.

<u>Démonstration</u> : L'image par ϕ^* de $\Omega^2(U)$ est Θ^2 et celle de $B^2(U)$ est $d(\Theta^1)$. Comme $B^2(U) \subset Z^2(U) \subset \Omega^2(U)$, on a $B^2(U) = Z^2(U) = \Omega^2(U)$ et $H^2(U) = \{0\}$. □

En résumé,

$$H^0(U) \cong H^1(U) \cong \mathbb{R},$$
$$H^n(U) = \{0\} \text{ pour } n \geq 2.$$

8. FORMES DIFFÉRENTIELLES À SUPPORT COMPACT.

En prévision de développements futurs (ch. V et VI) on fait ici un sort particulier aux formes différentielles à support compact celles-ci permettent de définir une notion de cohomologie à supports compacts qui présente une certain ressemblance avec la cohomologie "ordinaire", quoique sa structure soit moins riche.

Soit toujours U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie, et $\alpha \in \Omega^k(U)$. On rappelle que le support de celle-ci, noté Supp α, est l'adhérence de $\{x \in U \mid \alpha(x) \neq 0\}$. (Les formes à support compact sont donc celles qui s'annulent en dehors d'un compact de U).

Il est clair que les k-formes à support compact constituent un sous-espace vectoriel de $\Omega^k(U)$, noté $\Omega_C^k(U)$. On pose $\Omega_C^*(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_C^k(U)$.

En fait,

8.1. LEMME : Le sous-espace $\Omega_C^*(U)$ est une sous-ADG et même un idéal de $\Omega^*(U)$.

Démonstration : Le seul point qui ne soit pas trivial est que $d(\Omega_C^*(U)) \subset \Omega_C^*(U)$. Pour voir que le support "ne peut que rétrécir" sous l'action de d, soit $\alpha \in \Omega_C^k(U)$, $K = \text{Supp}\,\alpha$, $V = U \setminus K$, $\iota : V \to U$ l'inclusion. Par définition (utiliser p.ex. 3.2 en remarquant que la dérivée de ι est l'identité en tout point de V), $\iota^*(\alpha) = \alpha|_V = 0$; et $(d\alpha)|_V = \iota^*(d\alpha) = d(\iota^*(\alpha)) = 0$, ce qui montre que Supp $(d\alpha) \subset K$. $\square$

On peut alors poser les

8.2. DEFINITIONS : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_C^k(U) = \Omega_C^k(U) \cap Z^k(U)$ et, si $k \geq 1$, $B_C^k(U) = d(\Omega_C^{k-1}(U))$. (Remarquer que ce n'est pas simplement $\Omega_C^k(U) \cap B^k(U)$: le support de l'antécédent par d aussi doit être compact). Si $k = 0$, $B_C^0(U) = \{0\}$.

La cohomologie de De Rham à supports compacts est définie par

$$H_C^k(U) = Z_C^k(U)/B_C^k(U)$$

et $$H_C^*(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_C^k(U).$$

8.3. <u>REMARQUE IMPORTANTE</u> : Il est hors de question d'espérer pour une application de classe C^∞ $\phi : U \to V$ entre ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie, des homomorphismes entre $\Omega_c^*(V)$ et $\Omega_c^*(U)$, ni entre $H_c^*(V)$ et $H_c^*(U)$, à la manière de 3.1 et 4.4. En effet, le support de l'image réciproque d'une forme à support compact n'est en général pas compact (exemple des plus simples : $U = V = \mathbb{R}$; $k = 0$, $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$, $f \neq 0$; $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante telle que $f \circ \phi \neq 0$; alors $\mathrm{Supp}\, \phi^*(f) = \mathbb{R}$!).

Si l'on veut malgré tout développer une théorie analogue, il faudra donc imposer des conditions restrictives sur ϕ : cf. IV.7.6.

Il y a cependant un cas assez intéressant où l'on peut introduire un morphisme entre cohomologies à support compact, mais alors dans le sens <u>covariant</u> :

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E de dimension finie, α une k-forme à support compact $K \subset U$: $\alpha \in \Omega_c^k(U)$. Si V est un ouvert de E contenant U et $\iota : U \to V$ l'inclusion, on définit une k-forme $\iota_*(\alpha) \in \Omega^k(V)$ en posant $\iota_*(\alpha)|_U = \alpha$ et $\iota_*(\alpha)|_{V \setminus U} = 0$. En effet, le fait que $\mathrm{Supp}\, \alpha \subset U$ garantit que $\iota_*(\alpha)$ est de classe C^∞. De plus $\mathrm{Supp}\, (\iota_*(\alpha)) = \mathrm{Supp}\, \alpha = K$ qui est aussi un compact de V, donc $\iota_*(\alpha) \in \Omega_c^k(V)$.

On obtient alors le

8.4. <u>THEOREME</u> : Toute inclusion $\iota : U \subset V$ entre ouverts d'un même espace vectoriel de dimension finie induit un <u>monomorphisme</u> d'ADG

$$\iota_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(V)$$

et une application linéaire de degré 0

$$\iota_* : H_c^*(U) \to H_c^*(V) .$$

<u>Démonstration</u> : Que, pour $f \in \Omega_c^0(U)$, $\iota_*(df) = d(\iota_*(f))$ est classique. Cette propriété passe aux dimensions supérieures à l'aide de bases. Le reste, au niveau de Ω_c^*, est trivial. Il en résulte que $\iota_*(Z_c^k(U)) \subset Z_c^k(V)$ et que $\iota_*(B_c^k(U)) \subset B_c^k(V)$, d'où ι_* au niveau de H_c^*. □

Pour finir, et à titre d'exemples élémentaires, le calcul de $H_c^*(\mathbb{R}^0)$ et de $H_c^*(\mathbb{R})$.

8.5. <u>THEOREME</u> : $H_c^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R}$.

Pour tout entier $k > 0$, $H_c^k(\mathbb{R}^0) = \{0\}$.

<u>Démonstration</u> : Comme $\mathbb{R}^0$ est compact (c'est le seul parmi les $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$...), $H_c^*(\mathbb{R}^0) = H^*(\mathbb{R}^0)$. □

8.6. <u>THEOREME</u> : $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Pour tout entier $k \neq 1$, $H_c^k(\mathbb{R}) = \{0\}$.

<u>Démonstration</u> : On sait (cf. 1.5) que $\Omega^n(\mathbb{R})$, et donc $\Omega_c^n(\mathbb{R})$, sont nuls pour $n \geq 2$. Par conséquent $H_c^n(\mathbb{R}) = \{0\}$ si $n \geq 2$.

La seule fonction constante sur $\mathbb{R}$ à support compact est la fonction nulle : ainsi $Z_c^0(\mathbb{R}) = \{0\}$, et $H_c^0(\mathbb{R})$ aussi.

Par compacité des supports, la forme linéaire $I : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f\,dx \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (notation toujours inconfortable !) est bien définie et il est clair qu'elle est surjective. De même, si f est à support compact, $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f dont le support est compact ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$: autrement dit, $B_c^1(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} I$, d'où $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ puisque $Z_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R})$. □

8.7. <u>REMARQUES</u> : Les moyens du chapitre V nous permettront de calculer $H_c^*(\mathbb{R}^n)$ pour tout entier n (cf. V. 4.19).

Le fait que $H_c^*(\mathbb{R}^0) \neq H_c^*(\mathbb{R})$ confirme -s'il en était besoin- que la cohomologie à supports compacts n'est pas une "vraie" cohomologie.