

CHAPITRE III

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Au chapitre précédent ont été définies les formes différentielles sur des ouverts de \mathbb{R}^n et la cohomologie de De Rham de ceux-ci. Le chapitre prochain sera consacré à l'extension de ces notions à une famille plus générale d'objets mathématiques : les variétés différentiables. Il s'agit d'espaces topologiques qui localement ressemblent fort à \mathbb{R}^n (cf. Définition 1.1), garantie étant donnée de surcroît que les diverses images locales se recollent de façon satisfaisante (cf. Définition 5.2). On peut alors définir des formes différentielles sur les variétés par une méthode de "patch-work" (voir le Chapitre IV) et en déduire une notion de cohomologie de De Rham dans ce cadre élargi.

Nous donnons dans le présent chapitre, avec les définitions nécessaires, une liste d'exemples destinés à montrer qu'on couvre ainsi un nombre assez élevé de cas classiques.

Pour ces exemples, on a cherché à être aussi descriptif que possible et on a préféré des démonstrations ad hoc, fussent-elles un peu longues, à un recours aux grandes théories qui nous auraient éloignés de notre point de vue sans pouvoir être pour autant traitées de façon satisfaisante (c'est ainsi que le mot même de groupe de Lie n'apparaît pas).

1. VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES.

1.1. DEFINITION : Soit M un espace topologique, n un entier positif. On dira que M est une variété topologique de dimension n (ou n -variété) ssi

- (i) la topologie de M est séparée,
- (ii) la topologie de M possède une base dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe une famille dénombrable \mathcal{F} d'ouverts de M telle que tout ouvert de M soit la réunion d'une sous-famille de \mathcal{F}),
- (iii) pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U voisinage de x dans M , un ouvert A de \mathbb{R}^n et un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow A$. Un tel triplet (U, ϕ, A) s'appelle une carte de la variété M en x .

1.2. REMARQUE :

1) L'intérêt majeur de la condition (ii) est de permettre la construction capitale du Chapitre IV, §5.

2) Se garder de croire hâtivement que (i) soit une conséquence de (iii) (cf. [18]).

3) Ce n'est pas non plus une conséquence de (ii) en dépit d'une terminologie trompeuse (en effet la condition (ii) s'exprime en disant que M est séparable).

4) La dimension n est déterminée de manière unique, comme on le verra plus loin (V.5.3).

5) On peut donner à n la valeur 0 dans la définition en convenant que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$: une 0-variété est un espace topologique discret dénombrable.

Comme conséquences immédiates de la définition, mentionnons :

1.3. THEOREME : Un ouvert M d'un espace vectoriel E de dimension finie n est une n -variété. (En particulier, \mathbb{R}^n est une n -variété).

Démonstration : Supposons d'abord $E = \mathbb{R}^n$. Alors :

- (i) est bien connu ;
- (ii) pour \mathcal{F} , prendre par exemple la famille des boules ouvertes contenues dans M , de rayon rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles ;

(iii) pour tout $x \in M$, prendre $U = A = M$ et $\phi = \text{Id}_M$.

Si $E \neq \mathbb{R}^n$, le choix de n'importe laquelle des normes équivalentes sur E et de n'importe quelle base de E fournit respectivement la topologie de E et un homéomorphisme avec \mathbb{R}^n , à travers lequel la structure de variété définie ci-dessus se transporte. \square

1.4. THEOREME : Soit M une n -variété, N un ouvert de M . Alors N est une n -variété.

Démonstration :

(i) Classique ;

(ii) évident par la famille $\{V \cap N \mid V \in \mathcal{F}\}$;

(iii) soit $x \in M$, (U, ϕ, A) une carte de M en x . Alors $(U \cap N, \phi|_{U \cap N}, \phi(U \cap N))$ est une carte de N en x . \square

1.5. THEOREME : Si M est une n -variété et M' , une n' -variété, alors $M \times M'$ est une $(n+n')$ -variété.

Démonstration : Soit $x \in M$, (U, ϕ, A) une carte de M en x ; $x' \in M'$, (U', ϕ', A') une carte de M' en x' . Alors, en $(x, x') \in M \times M'$, $(U \times U', \phi \times \phi', A \times A')$ est une carte de $M \times M'$. \square

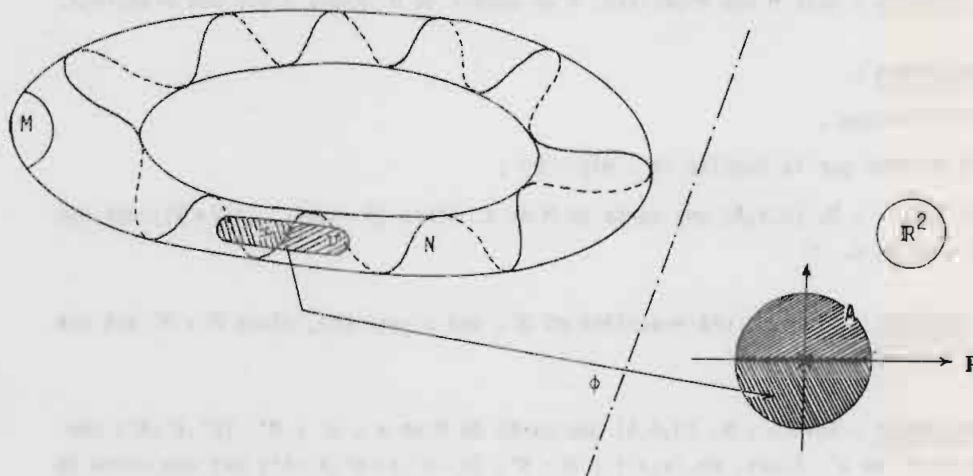
Nous aurons besoin à plusieurs reprises dans la suite (cf. V.4.4) de la notion de sous-variété. Nous en donnons donc ici la définition, mais nous ne l'exploiterons pas trop systématiquement dans les exemples qui vont suivre.

1.6. DEFINITION : Soit une n -variété M , un sous-espace N de M et un entier $p < n$. On dit que N est une sous-variété de M de dimension p ssi pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, ϕ, A) de M en x telle que $\phi(x) = 0$ (ce qui n'est pas une restriction puisque les translations de \mathbb{R}^n sont des homéomorphismes) et telle que $\phi|_{U \cap N}$ soit un homéomorphisme de $U \cap N$ sur $A \cap \mathbb{R}^p$ (où \mathbb{R}^p est considéré comme sous-espace de \mathbb{R}^n par l'"inclusion" $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.)

L'entier $n-p$ s'appelle codimension de N (dans M).

Le sous-espace N est alors une p -variété en bonne et due forme.

FIGURE avec $n = 2$, $p = 1$.



2. PREMIERS EXEMPLES.

2.1. Exemple : Le cercle S^1 est une variété topologique de dimension 1.

Démonstration :

(i) et (ii) comme sous-espace de \mathbb{R}^2 .

(iii) On identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et S^1 à $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. L'application $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : \theta \rightarrow \exp(2i\pi\theta)$ est notoirement continue, ouverte et surjective. Pour tout $x \in S^1$, prendre alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \exp(2i\pi\theta)$, $U = S^1 \setminus \{x\}$, $A =]\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}[$, $\phi = \{e|_A\}^{-1}$. (cf. aussi 2.2). \square

2.2. Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sphère S^n est une variété topologique de dimension n .

Démonstration :

(i) et (ii) comme sous-espace de \mathbb{R}^{n+1} puisque
 $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

Pour (iii), il y a deux méthodes classiques (mais cf. aussi le §3) :

1°) On introduit les projections stéréographiques : soit $v = (0, 0, \dots, 0, 1)$ le "pôle nord" de la sphère S^n et E le "plan équatorial" (d'équation $x_{n+1} = 0$). Une droite passant par v et non parallèle à E coupe E en un (unique) point et recoupe S^n en un (unique) point distinct de v (voir Figure 6.4). Le procédé définit ainsi deux applications :

$$\phi_v : S^n \setminus \{v\} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

et $\psi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{v\} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1} (2x_1, \dots, 2x_n, (x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1))$.

On vérifie sans peine excessive que ϕ_v et ψ_v sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre. Le triplet $(S^n \setminus \{v\}, \phi_v, \mathbb{R}^n)$ est ainsi une carte de S^n .

La projection stéréographique de pôle sud $\sigma = (0, \dots, 0, -1)$ fournit une carte $(S^n \setminus \{\sigma\}, \phi_\sigma, \mathbb{R}^n)$ et, comme $S^n = (S^n \setminus \{v\}) \cup (S^n \setminus \{\sigma\})$, la structure de variété est assurée.

2°) On peut aussi introduire, pour tout $i = 1, \dots, n+1$, les ouverts hémisphériques $H_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}$ et $H_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$. Si on note D^n la boule-unité (ouverte) de \mathbb{R}^n , on obtient par projection orthogonale parallèlement au $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées les homéomorphismes

$$\phi_i^+ : H_i^+ \rightarrow D^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

et

$$\phi_i^- : H_i^- \rightarrow D^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) ,$$

les inverses respectifs étant

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_i, \dots, x_n)$$

et

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -\sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_i, \dots, x_n) .$$

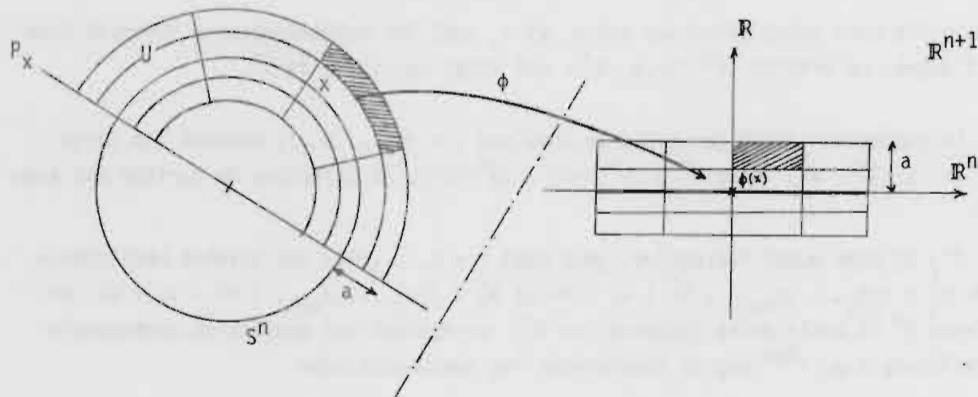
(Voir Figure 3.1).

Les cartes (H_i^+, ϕ_i^+, D^+) et (H_i^-, ϕ_i^-, D^-) donnent elles aussi la structure de variété topologique de S^n puisque $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (H_i^+ \cup H_i^-)$. \square

2.3. REMARQUE : La sphère S^n est en fait une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} . On pourra vérifier que la construction suivante fournit des cartes qui satisfont aux conditions de 1.6 : pour $x \in S^n$, soit P_x l'hyperplan orthogonal à x ; celui-ci étant isomorphe (en tant qu'espace vectoriel normé) à \mathbb{R}^n , la projection parallèlement à la droite Rx fournit une application continue $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; on prend un nombre réel a , $0 < a < 1$, et on note U l'intersection de la couronne ouverte comprise entre les sphères de rayons $1-a$ et $1+a$ avec le demi-espace ouvert qui contient x ; on définit

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \mapsto \left(\pi\left(\frac{y}{\|y\|}\right), \|y\| - 1 \right) ;$$

alors $\phi(U) = D^n \times]-a, +a[$ et $\phi(U \cap S^n) = D^n$.



Les exemples suivants sont les classiques espaces projectifs réels et complexes. Introduits à l'origine pour simplifier et unifier les énoncés de géométrie élémentaire (voir [1] ch.4), ils jouent un rôle considérable en topologie algébrique de même que leurs généralisations, les Grassmanniennes (cf. 4.15 et la suite).

Tout d'abord du point de vue ensembliste :

2.4. DEFINITIONS : Pour tout entier n , le $n^{\text{ème}}$ espace projectif réel, noté $\mathbb{R}P^n$, est l'ensemble des droites passant par l'origine (sous-espaces vectoriels de dimension 1) de \mathbb{R}^{n+1} .

Pour tout entier n , le $n^{\text{ème}}$ espace projectif complexe, noté $\mathbb{C}P^n$, est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension (complexe) 1 de \mathbb{C}^{n+1} .

(Noter que la définition s'applique si $n = 0$, et que $\mathbb{R}P^0$ et $\mathbb{C}P^0$ sont réduits à un point).

Nous allons munir ces ensembles de structures naturelles de variétés topologiques, en regardant successivement le cas réel et le cas complexe. Dans chacun de ces cas deux méthodes sont possibles, dont nous montrerons l'équivalence. Nous extrayons de la démonstration et élevons à la dignité de lemme indépendant les deux résultats suivants qui resserviront plusieurs fois :

2.5. LEMME : Soit X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X ; son graphe $\{(x,y) \in X^2 \mid x \mathcal{R} y\}$ est noté $\text{Gr } \mathcal{R}$, le quotient, muni de sa topologie canonique, est noté X/\mathcal{R} et la projection, continue par définition, $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$. Alors :

Si $\text{Gr } \mathcal{R}$ est fermé dans X^2 et si p est ouverte, X/\mathcal{R} est séparé.

Démonstration : Soit ξ, η deux points distincts de X/\mathcal{R} ; soit x, y des antécédents respectifs dans X : $p(x) = \xi$, $p(y) = \eta$. Alors $(x, y) \notin \text{Gr } \mathcal{R}$ et, $\text{Gr } \mathcal{R}$ étant fermé, il existe des voisinages ouverts V_x de x et V_y de y dans X tels que $(V_x \times V_y) \cap \text{Gr } \mathcal{R} = \emptyset$. Il s'ensuit que $p(V_x) \cap p(V_y) = \emptyset$ (dans le cas contraire, il existerait un $z \in V_x$ et un $t \in V_y$ tels que $p(z) = p(t)$, d'où $(z, t) \in (V_x \times V_y) \cap \text{Gr } \mathcal{R}$). Bien entendu, $\xi \in p(V_x)$ et $\eta \in p(V_y)$. Enfin, p étant ouverte, $p(V_x)$ et $p(V_y)$ sont ouverts dans X/\mathcal{R} . \square

2.6. LEMME : Soit X un espace topologique, G un groupe topologique opérant continûment sur X . La projection $p : X \rightarrow X/G$ est ouverte.

Démonstration : Soit V un ouvert de X . Par définition, $p(V)$ est ouvert dans X/G ssi $p^{-1}(p(V))$ est ouvert dans X . Or $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} g.V$ où $g.V$ désigne $\{g.x \mid x \in V\}$, lequel est homéomorphe à V , donc ouvert, par continuité de l'action de G . \square

Revenant aux projectifs, on commence par le

CAS REEL.

Deux relations peuvent être définies :

- d'une part sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: $x \mathcal{R} y$ ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$;
- d'autre part sur S^n : $x \mathcal{Y} y$ ssi $y = \pm x$. Il est immédiat qu'il s'agit de relations d'équivalence. Les classes consistent en droites (privées de l'origine) dans le premier cas, en paires de points antipodaux dans le deuxième cas. Il est clair aussi que les deux quotients sont en bijection entre eux et avec $\mathbb{R}P^n$ (par les correspondances : droite passant par l'origine \leftrightarrow droite privée de l'origine \leftrightarrow points (antipodaux) d'intersection avec la sphère). Qui mieux est :

2.7. THEOREME : La bijection entre S^n/\mathcal{Y} et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathcal{R}$, mentionnée ci-dessus est un homéomorphisme pour les topologies-quotients. Les quotients sont des espaces compacts.

Démonstration : Cette bijection, notée ϕ , figure dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 S^n/\mathcal{Y} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathcal{R}
 \end{array}$$

où i désigne l'inclusion et p, q , les projections canoniques.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathcal{R}$, $p^{-1}(\phi^{-1}(U)) = i^{-1}(q^{-1}(U)) = q^{-1}(U) \cap S^n$ est ouvert dans S^n , donc $\phi^{-1}(U)$ est ouvert dans S^n/\mathcal{Y} : ainsi, ϕ est continue.

Le produit par les scalaires dans \mathbb{R}^{n+1} induit une action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et une action du groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$ sur S^n qui sont continues et qui définissent respectivement les relations \mathcal{R} et \mathcal{Y} : ainsi, par application de 2.6, p et q sont ouvertes.

Soit l'application, évidemment continue, $\gamma : (S^n)^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x+y\| \cdot \|x-y\|$. Le graphe de \mathcal{Y} est $Gr \mathcal{Y} = \gamma^{-1}(\{0\})$, qui est fermé dans $(S^n)^2$.

Soit l'application, évidemment continue,

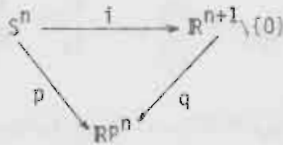
$$\phi : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R} : ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i < j} \left| \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{array} \right|^2 .$$

Le graphe de \mathcal{R} est $\text{Gr } \mathcal{R} = \delta^{-1}(\{0\})$, qui est fermé dans $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})^2$.

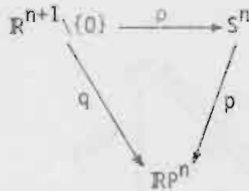
Le Lemme 2.5 assure alors que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathcal{R}$ et S^n / \mathcal{Y} sont séparés. De plus, S^n étant compacte, S^n / \mathcal{Y} est compact.

Enfin ϕ , bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé, est un homéomorphisme entre espaces compacts. \square

Ce théorème nous permet de définir la topologie de $\mathbb{R}P^n$ par l'un ou l'autre procédé suivant la commodité du moment. Ce faisant l'homéomorphisme ϕ est regardé comme une identification, c'est-à-dire que, par abus d'écriture, on réduit le diagramme précédent à



(La réciproque de ϕ donnerait lieu au diagramme commutatif



où $p : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$).

Le (provisoire) parachèvement est alors le

2.8. THEOREME : Pour tout entier n , $\mathbb{R}P^n$ est une variété topologique compacte de dimension n .

Démonstration : La condition (i), et la compacité, ont été démontrées en 2.7.

(ii) Soit $(X_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de S^n ; la projection p étant ouverte (cf. 2.7), $p(X_r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$ pour tout r . Si U est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$, il existe une suite d'entiers (r_j) telle que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_{r_j}$ et, par surjectivité de p ,

$$U = p(p^{-1}(U)) = p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_{r_j}\right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} p(X_{r_j}) .$$

Par conséquent, $\{p(X_{r_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ est une base de la topologie de $\mathbb{R}P^n$.

(iii) Pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, soit $L_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$. Il est clair que L_i est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Soit $U_i = q(L_i)$, où q désigne toujours la projection sur $\mathbb{R}P^n$ introduite en 2.7. On observe que $q^{-1}(U_i) = q^{-1}(q(L_i)) = L_i$ puisque si $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in (y_1, \dots, y_{n+1})$ avec $y_i \neq 0$, alors $x_i \neq 0$. Par conséquent U_i est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$.

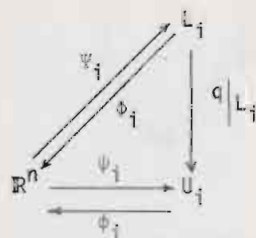
On définit alors

$$\phi_i : L_i \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

et

$$\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow L_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) ,$$

puis $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\phi_i = \phi_i \circ q|_{L_i}$ (la possibilité de factoriser est triviale) et $\psi_i = q \circ \psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$:



(N.B. : dans le cas $n = 2$, ψ_3 est le "passage aux coordonnées homogènes" de la géométrie projective classique).

On voit sans peine que ϕ_i et ψ_i sont des bijections réciproques.

Comme $q|_{L_i}$ est continue par définition et ouverte par application de 2.6 (car l'action de \mathbb{R}^* sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se restreint en une action sur L_i), la continuité de ϕ_i et celle de ψ_i résultent respectivement de la continuité de ϕ_i et de celle de ψ_i , qui sont triviales.

Le triplet $(U_i, \phi_i, \mathbb{R}^n)$ est donc une carte de $\mathbb{R}P^n$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{n+1} L_i$, ce qui implique que $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ par surjectivité de q . \square

CAS COMPLEXE

Les deux relations sont ici :

- sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : x \sim y$ ssi il existe un $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $y = \lambda x$;
- sur S^{2n+1} , qui est la sphère-unité de \mathbb{C}^{n+1} , celui-ci étant isomorphe à \mathbb{R}^{2n+2} en tant qu'espace euclidien : $x \sim y$ ssi il existe un $\lambda \in S^1$ tel que $y = \lambda x$ (en prenant $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$).

Les classes consistent respectivement en \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension 1 privés de l'origine et en cercles.

De façon analogue au cas réel :

2.9. THEOREME : L'injection $i' : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induit par passage aux quotients un homéomorphisme $\phi' : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \rightarrow S^{2n+1} / \sim$ entre espaces compacts.

Démonstration : Calquée sur 2.7, les groupes \mathbb{R}^* et $\{+1, -1\}$ étant remplacés par \mathbb{C}^* et S^1 respectivement, l'application δ par l'application δ' qui a la même définition formelle (mais pour des variables complexes) et γ par $\delta' \Big|_{(S^{2n+1})^2}$. \square

On définit la topologie de $\mathbb{C}P^n$ par l'une ou l'autre méthode et cette fois :

2.10. THEOREME : Pour tout entier n , $\mathbb{C}P^n$ est une variété topologique compacte de dimension $2n$.

Démonstration : Imitée de 2.8 en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{C} ; la dimension est $2n$ parce que \mathbb{C}^n est isomorphe à \mathbb{R}^{2n} en tant qu'espace euclidien. \square

3. LE THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES.

La deuxième méthode employée dans le cas des sphères (2.2(iii) 2°)) est susceptible de systématisation, et fournit un moyen de démonstration commode qu'on utilisera

dans la suite. La situation classique est la suivante :

Soit : n, p deux entiers tels que $1 \leq p < n$; W un ouvert de \mathbb{R}^n ; p fonctions de classe C^∞ $f_1 : W \rightarrow \mathbb{R} \dots, f_p : W \rightarrow \mathbb{R}$; un point $(a_1, \dots, a_n) \in W$ tel que

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_p(a_1, \dots, a_n) = 0$$

et tel que la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ soit de rang maximum p .

Sans perte de généralité on peut supposer que le déterminant formé par les p colonnes de droite est non nul et adapter les notations en conséquence : on pose $q = n - p$, on appelle principales les q premières coordonnées, on note pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{q+j} = y_j$, $x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(x_1, \dots, x_n) = (x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$. De même et en particulier, $a_{q+j} = b_j$, $a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^q$, $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(a_1, \dots, a_n) = (a, b) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$. Les hypothèses se réécrivent donc :

$$f_1(a, b) = \dots = f_p(a, b) = 0 ;$$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right|_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \neq 0 .$$

3.1. THEOREME : (des fonctions implicites). Sous ces hypothèses, il existe un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ vérifiant les conditions suivantes :

1) si A est la boule ouverte $\hat{B}(a, \varepsilon)$ dans \mathbb{R}^q et B la boule ouverte $\hat{B}(b, \eta)$ dans \mathbb{R}^p ,

$$A \times B \subset W ;$$

2) sur A est défini un unique p -uplet de fonctions

$$\begin{array}{l} \psi_1 : A \rightarrow \mathbb{R} \\ \dots \\ \psi_p : A \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

telles que :

(i) pour tout $x = (x_1, \dots, x_q) \in A$, $(\psi_1(x), \dots, \psi_p(x)) \in B$,

(ii) pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_q) \in A$,

$$f_i(x_1, \dots, x_q, \psi_1(x), \dots, \psi_p(x)) = 0.$$

Les fonctions ainsi définies sont de classe C^∞ .

REMARQUES :

1°) Dans (2), aucune restriction autre que (i) et (ii) n'est imposée aux ψ_i : il en résulte que, pour tout $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $f_1(x, y) = \dots = f_p(x, y) = 0$ (à savoir $y = (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x))$). En particulier $(\psi_1(a), \dots, \psi_p(a)) = b$.

2°) Le théorème signifie que localement les p coordonnées non principales s'expriment comme fonctions des q coordonnées principales - d'où son nom.

3°) C'est bien là la situation de 2.2. (iii) 2°. Dans ce cas et pour garder les notations du présent théorème, n est remplacé par $n+1$, $W = \mathbb{R}^{n+1}$, $p = 1$, $q = n$, $f_1(x, y) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 - 1$, la matrice jacobienne est $(2x_1, \dots, 2x_n, 2y_1)$; les hypothèses du théorème sont satisfaites par tout point de $H_{n+1}^+ \cup H_{n+1}^-$; pour fixer les idées, soit $(a_1, \dots, a_n, b_1) \in H_{n+1}^-$: on a bien $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) = 2b_1 \neq 0$. N'importe quel $\varepsilon > 0$ tel que la boule $\overset{\circ}{B}(a, \varepsilon)$ soit contenue dans la boule-unité de \mathbb{R}^n et n'importe quel η tel que $0 < \eta < -b_1$ répondent à la question, l'unique fonction ψ_1 étant définie par $\psi_1(x_1, \dots, x_n) = -\sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}$.

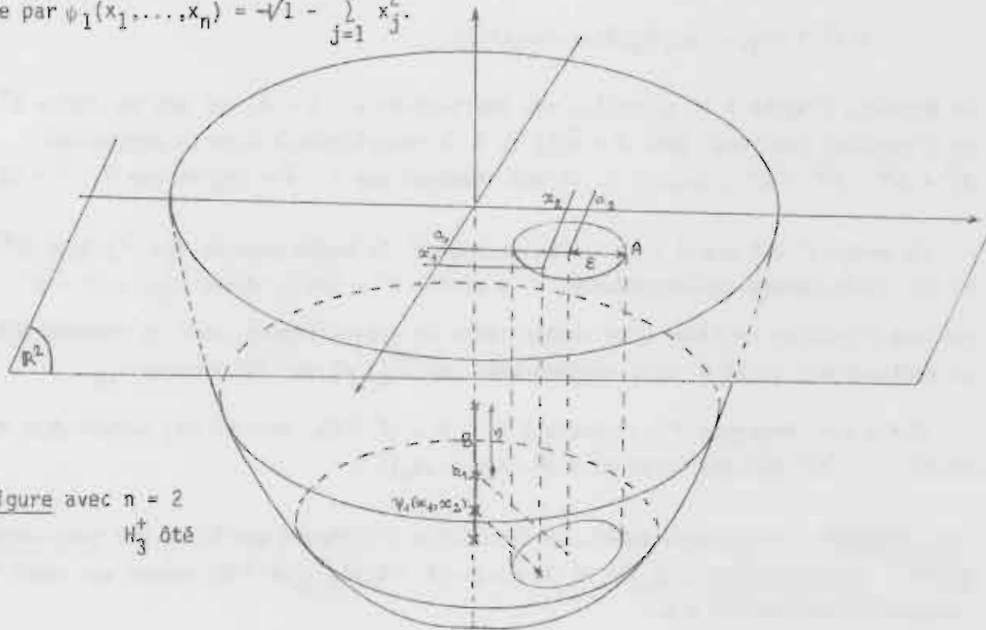


Figure avec $n = 2$
 H_3^+ ôté

Démonstration : Se trouve dans tout cours d'Analyse. Voir en particulier [4] Ch. X §2 pour une formulation particulièrement voisine.

3.2. COROLLAIRE : Si M est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

où n, p sont des entiers tels que $1 \leq p < n$ et les f_i des fonctions de classe C^∞ , à valeurs réelles, définies sur un ouvert W de \mathbb{R}^n et telles que la jacobienne soit de rang p en tout point de M , alors M est une $(n-p)$ -variété.

Démonstration : Les conditions (i) et (ii) de 1.1 sont vérifiées parce que $M \subset \mathbb{R}^n$.

(iii) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in M$ tel que le déterminant formé par les p colonnes de droite de la jacobienne soit non nul (on peut toujours supposer cela, au réordonnement près des coordonnées). On reprend alors les notations du théorème précédent.

Si pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ on pose

$$\tilde{\psi}(x) = (x_1, \dots, x_q, \psi_1(x), \dots, \psi_p(x)),$$

on définit, d'après 3.1. (2)(iii), une application $\tilde{\psi} : A \rightarrow M$, qui est de classe C^∞ , et a fortiori continue. Soit $U = \tilde{\psi}(A)$ et π la restriction à U de la projection $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q : (x, y) \mapsto x$. Il est immédiat que $\pi \circ \tilde{\psi} = \text{Id}_A$ et que $\tilde{\psi} \circ \pi = \text{Id}_U$.

On prend ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et on note A' la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(a, \varepsilon')$ dans \mathbb{R}^q , F' la boule fermée correspondante, $U' = \tilde{\psi}(A')$, $K' = \tilde{\psi}(F')$. Alors $\tilde{\psi}|_{F'} : F' \rightarrow K'$ est une bijection continue d'un compact dans un espace séparé, donc un homéomorphisme ; en particulier, U' et A' sont homéomorphes par $\tilde{\psi}|_{A'}$, et par son inverse $\pi|_{U'}$.

Enfin (cf. Remarque 1°) ci-dessus) $U' = M \cap (A' \times B)$, donc U' est ouvert dans M , et $(U', \pi|_{U'}, A')$ est une carte de M en (a_1, \dots, a_n) . \square

3.3. REMARQUE : Plus précisément, le Corollaire 3.2 prouve que M est une sous-variété de \mathbb{R}^n : au point $(a_1, \dots, a_n) \in M$, la carte $(A' \times B, \text{Id}_{A' \times B}, A' \times B)$ répond aux conditions de la définition 1.6.

4. SUITE DES EXEMPLES.

Les résultats du paragraphe précédent nous permettent d'ajouter à notre liste : les groupes classiques, les variétés de Stiefel, les Grassmanniennes.

D'abord ce qui n'est en fait qu'un rappel :

4.1. Exemple : Pour tout entier n , le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices $n \times n$, inversibles, à coefficients réels est une variété topologique de dimension n^2 et le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ des matrices $n \times n$, inversibles, à coefficients complexes, une variété topologique de dimension $2n^2$.

Démonstration : En tant que \mathbb{R} -espaces vectoriels, les groupes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients respectivement réels et complexes sont de dimensions respectives n^2 et $2n^2$. Par ailleurs la fonction déterminant est notoirement continue, et $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$) est formé des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) dont le déterminant est non nul : il s'agit donc d'ouverts. On applique 1.3. \square

Dans le cas réel, considérons alors le groupe $O(n)$ formé des matrices orthogonales :

4.2. DEFINITION : Soit n un entier non nul. Une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^tX.X = I_n$ (où I_n désigne la matrice-identité). Autrement dit, les "vecteurs-colonnes" -ou, d'ailleurs, les vecteurs-lignes- de X forment une base de \mathbb{R}^n orthonormée pour le produit scalaire euclidien.

4.3. THEOREME : Pour tout entier non nul n , $O(n)$ est une variété topologique de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration : Pour tout couple d'entiers i, j tels que $1 \leq i \leq j \leq n$, l'application

$$\phi_{ij} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj} - \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et x_{ki} l'élément de X situé à la k^e ligne et à la i^e colonne, est évidemment de classe C^∞ . Il est clair, par symétrie de ${}^tX.X$, que $O(n)$ est l'ensemble des solutions du système

4.6. THEOREME : Les variétés $O(n)$ et $SO(n)$ sont compactes.

Démonstration : Par continuité des ϕ_{ij} définies en 4.3, $O(n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$, qui est isomorphe à \mathbb{R}^{n^2} en tant qu'espace euclidien. Les conditions sur les ϕ_{ij} ($i=1, \dots, n$) garantissent l'inclusion $O(n) \subset (S^1)^n$, d'où la compacité de $O(n)$.

Celle de $SO(n)$ s'ensuit (cf. 4.5). \square

Dans le cas complexe, on considère d'abord le groupe $U(n)$ formé des matrices unitaires :

4.7. DEFINITION : Soit n un entier non nul. Une matrice $Z \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire ssi $Z^* \cdot Z = I_n$ (où $Z^* = {}^t \bar{Z}$ est l'adjointe de Z). Autrement dit, les vecteurs-colonnes forment une base $\{z_1, \dots, z_n\}$ de \mathbb{C}^n telle que $(z_i | z_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $(|)$ désigne la forme hermitienne standard sur \mathbb{C}^n .

4.8. THEOREME : Pour tout entier non nul n , $U(n)$ est une variété topologique compacte de dimension n^2 .

Démonstration : On note $z_{kl} = x_{kl} + i y_{kl}$ l'élément de Z situé à la k^e ligne et la l^e colonne. Pour tout couple d'entiers k, l tels que $1 \leq k \leq l \leq n$, on définit les applications, évidemment de classe C^∞ ,

$$\lambda_{kl} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} : Z \mapsto \sum_{s=1}^n (x_{sk}x_{sl} + y_{sk}y_{sl}) - \delta_{kl}$$

et

$$\mu_{kl} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} : Z \mapsto \sum_{s=1}^n (x_{sl}y_{sk} - x_{sk}y_{sl}) .$$

Cette fois, $U(n)$ est l'ensemble des solutions du système

$$(II) \begin{cases} \lambda_{kl}(Z) = 0 & 1 \leq k < l \leq n \\ \mu_{kl}(Z) = 0 & 1 \leq k < l \leq n , \end{cases}$$

soit $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$ équations sur un espace de dimension $2n^2$. La démonstration s'achève de manière analogue à 4.3. en considérant l'application

$$\psi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Herm}_n(\mathbb{C}) : Z \mapsto Z^* \cdot Z - I_n .$$

En effet, $\text{Herm}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel des matrices auto-adjointes, est de dimension réelle n^2 puisqu'il a pour base sur \mathbb{R} l'ensemble

$$\{\varepsilon_k \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{\eta_{k\ell} \mid 1 \leq k < \ell \leq n\} \cup \{\theta_{k\ell} \mid 1 \leq k < \ell \leq n\}$$

où $\varepsilon_k, \eta_{k\ell}$ ont été définis en 4.3 et

$$\theta_{k\ell} = \begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \ell \end{array}$$

Pour $Z, K \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\psi'(Z) \cdot K = K^* \cdot Z + Z^* \cdot K$ et si $Z \in U(n)$, $T \in \text{Herm}_n(\mathbb{C})$, alors $K = \frac{1}{2} ZT$ vérifie bien $\psi'(Z) \cdot K = T$.

Pour la compacité, on observe que $U(n)$ est fermée dans \mathbb{R}^{2n^2} par continuité des applications $\lambda_{k\ell}$ et $\mu_{k\ell}$, et que les conditions sur les applications λ_{kk} garantissent l'inclusion $U(n) \subset (B^n)^{2n}$, où B^n est la boule unité de \mathbb{R}^n . \square

Il découle de la définition que si $Z \in U(n)$, $|\det Z| = 1$. On est amené comme dans le cas réel à introduire le sous-groupe $SU(n)$ formé des matrices $Z \in U(n)$ telles que $\det Z = 1$. La situation est un peu plus compliquée dans la mesure où le cercle-unité S^1 , au contraire de $\{+1, -1\}$, n'est pas discret, ce qui rend inutilisable l'argument de 4.4 et laisse prévoir pour $SU(n)$ une dimension inférieure. On peut en effet démontrer directement que $SU(n)$ est une variété topologique compacte de dimension $n^2 - 1$ en ajoutant au système [II] l'équation

$$\text{Arg} \frac{\det Z}{|\det Z|} = 0 .$$

Toutefois les calculs sont un peu longs et nous préférons attendre un théorème plus puissant (6.10) qui donnera ce résultat pour moins de labeur (6.14).

Une matrice de $O(n)$ peut être vue comme un système de n vecteurs orthonormés dans \mathbb{R}^n . Si on restreint le nombre de vecteurs, on obtient la notion de variété de Stiefel :

Soit deux entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$. On note $V_{n,p}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $(\mathbb{R}^n)^p$ formé des p -uplets orthonormés de vecteurs de \mathbb{R}^n .

4.10. THEOREME : Pour tous entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$, $V_{n,p}(\mathbb{R})$ est une variété topologique compacte de dimension $np - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(2n-p-1)}{2}$. (En particulier, $V_{n,n}(\mathbb{R}) = O(n)$ et $V_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$).

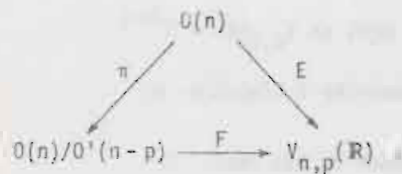
Démonstration : Regardant un système de p vecteurs de \mathbb{R}^n comme une matrice à n lignes et p colonnes, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dans $V_{n,p}(\mathbb{R})$ ssi ${}^t M.M = I_p$. On considère donc l'application $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_p(\mathbb{R}) : M \mapsto {}^t M.M - I_p$ et on conclut comme en 4.3.

Pour la compacité, observer que l'application $E : O(n) \rightarrow V_{n,p}(\mathbb{R}) : M \mapsto (M(\epsilon_1), \dots, M(\epsilon_p))$ où $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , est continue et surjective. \square

4.11. REMARQUE IMPORTANTE : On vérifie sans peine que deux matrices M et N de $O(n)$ ont la même image par E ssi $N^{-1}M$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & X \end{array} \right) \quad \text{où } X \in O(n-p).$$

Si on note $O'(n-p)$ le sous-groupe de $O(n)$ formé des matrices de cette forme -lequel est évidemment isomorphe à $O(n-p)$ et fermé dans $O(n)$ - et $O(n)/O'(n-p)$ le quotient de $O(n)$ par $O'(n-p)$ agissant par translations à droite, on obtient le diagramme commutatif suivant, où F est une bijection :



Comme en 2.5 et 2.6 (q.v.) on établit en toute généralité, pour s'en resservir :

4.12. LEMME : Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe fermé de G . Le graphe de la relation d'équivalence définie par $x \mathcal{R} y$ ssi $y^{-1}x \in H$ est fermé dans G^2 .

Démonstration : Il suffit de montrer que, si (a,b) est adhérent à $\text{Gr } \mathcal{R}$, $b^{-1}a$ est adhérent à H . Or l'application $\mu : G^2 \rightarrow G : (x,y) \mapsto y^{-1}x$ est continue. Si donc (a,b) est adhérent à $\text{Gr } \mathcal{R}$ et que U soit un voisinage ouvert de $b^{-1}a$, $\mu^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de (a,b) qui rencontre $\text{Gr } \mathcal{R}$ en un point (x,y) , et $\mu(x,y) = y^{-1}x \in H \cap U$. \square

La conjonction de 4.12, 2.5 et 2.6 établit le

4.13. COROLLAIRE : Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe fermé de G , l'espace homogène G/H , quotient de G par les translations à droite définies par les éléments de H est un espace topologique séparé.

Dans le cas présent, la compacité de $O(n)$ entraîne même que $O(n)/O(n-p)$ est compact. Comme le fait que π est ouverte implique aussi, par surjectivité de π et continuité de E , que F est continue, F est un homéomorphisme.

Ainsi cette remarque fournit une autre description des variétés de Stiefel.

Dans le cas complexe, on note $V_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des p -uplets $\{z_1, \dots, z_p\}$ de vecteurs de \mathbb{C}^n vérifiant $(z_s | z_t) = \delta_{st}$ pour tous s, t tels que $1 \leq s \leq t \leq p$, où δ_{st} est le symbole de Kronecker et $(|)$ est la forme sesquilinéaire standard sur \mathbb{C}^n .

4.14. THEOREME : Pour tous entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$, $V_{n,p}(\mathbb{C})$ est une variété topologique compacte de dimension $2np - p^2 = p(2n - p)$.

En particulier $V_{n,n}(\mathbb{C}) = U(n)$ et $V_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$.

De plus $V_{n,p}(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n)/U(n-p)$.

Démonstration : Imitée platement du cas réel. \square

Les Grassmanniennes, annoncées depuis longtemps, vont être en quelque sorte aux espaces projectifs ce que les variétés de Stiefel sont aux sphères :

4.15. DEFINITION : Soit n, p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. La Grassmannienne réelle $G_p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de \mathbb{R}^n .

La Grassmannienne complexe $G_p(\mathbb{C}^n)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension (complexe) p de \mathbb{C}^n .

(Donc en particulier $G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$ et $G_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}P^{n-1}$).

On se place d'abord dans le cas réel et on fixe pour tout ce qui suit les notations suivantes :

$\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n ;

$\mathbb{R}^p \times \{0\}$, de base $\{e_1, \dots, e_p\}$, est identifié à \mathbb{R}^p ;

$\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, de base $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ est noté \mathbb{R}^{n-p} ;

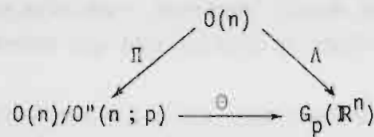
une application linéaire et sa matrice par rapport à ces bases sont représentées par la même lettre ;

la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et sa matrice $\begin{pmatrix} I_p & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow n-p \end{matrix}$ sont notées P_p ;

la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ et sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow n-p \end{matrix}$ sont notées P'_{n-p} ;

le sous-groupe de $O(n)$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & | & 0 \\ \hline 0 & | & B \end{pmatrix}$ où $A \in O(p)$ et $B \in O(n-p)$ est noté $O''(n; p)$: il est clair que $O''(n; p)$ est fermé dans $O(n)$ et qu'il est isomorphe à $O(p) \times O(n-p)$.

Cela étant, la première tentative pour munir les Grassmanniennes d'une topologie séparée procède comme suit : associer à toute $X \in O(n)$ le sous-espace vectoriel $X(\mathbb{R}^p)$ définit une surjection $\Lambda : O(n) \rightarrow G_p(\mathbb{R}^n) : X \mapsto X(\mathbb{R}^p)$. Comme, pour $X \in O(n)$, $X(\mathbb{R}^{n-p})$ est orthogonal à $X(\mathbb{R}^p)$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda(X) = \Lambda(Y)$ est que $X(\mathbb{R}^p) = Y(\mathbb{R}^p)$ et $X(\mathbb{R}^{n-p}) = Y(\mathbb{R}^{n-p})$, autrement dit que $Y^{-1}X \in O''(n; p)$. On a donc un diagramme commutatif

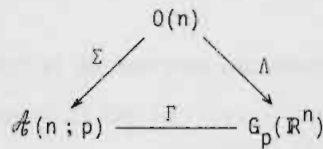


où Π est la projection canonique et Θ est une bijection. D'après 4.13, $O(n)/O''(n; p)$ est séparé (il est même compact) : on peut donner à $G_p(\mathbb{R}^n)$ la topologie qui fait de Θ un homéomorphisme.

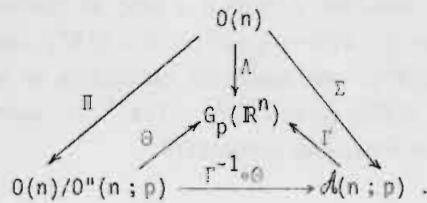
Mais il y a une deuxième possibilité. Soit $\mathcal{A}(n; p)$ l'ensemble des projecteurs de \mathbb{R}^n , orthogonaux et de trace p [c'est-à-dire que $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est dans $\mathcal{A}(n; p)$ ssi $X \circ X = X$, ${}^t X = X$ (en termes de produit scalaire : $(X(x)|y) = (x|X(y))$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$), $\dim X(\mathbb{R}^n) = p$ (puisque le rang d'un projecteur est égal à sa trace)] : par exemple $P_p \in \mathcal{A}(n; p)$. En tant que sous-espace topologique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{A}(n; p)$ est séparé. Par ailleurs, un sous-espace vectoriel déterminant un unique projecteur orthogonal, l'application $\Gamma : \mathcal{A}(n; p) \rightarrow G_p(\mathbb{R}^n) : X \mapsto X(\mathbb{R}^n)$ est bijective et l'on peut munir $G_p(\mathbb{R}^n)$ de la topologie qui fait de Γ un homéomorphisme. Grâce au

4.16. THEOREME : Ces deux topologies coïncident.

Démonstration : L'application $\Sigma : O(n) \rightarrow \mathcal{A}(n; p) : X \mapsto X P_p X^{-1}$ est évidemment continue et le diagramme



est commutatif. Donc aussi le triangle externe du diagramme suivant :



On sait déjà que $O(n)/O(n;p)$ est compact et que $\mathbb{A}(n;p)$ est séparé ; mais on sait aussi (cf. 2.6) que Π est ouverte, donc $\Gamma^{-1} \circ \Theta$ est continue par continuité de Σ et surjectivité de Π . Ainsi $\Gamma^{-1} \circ \Theta$ est un homéomorphisme, et il est équivalent de décider que Γ est un homéomorphisme ou que Θ en est un.

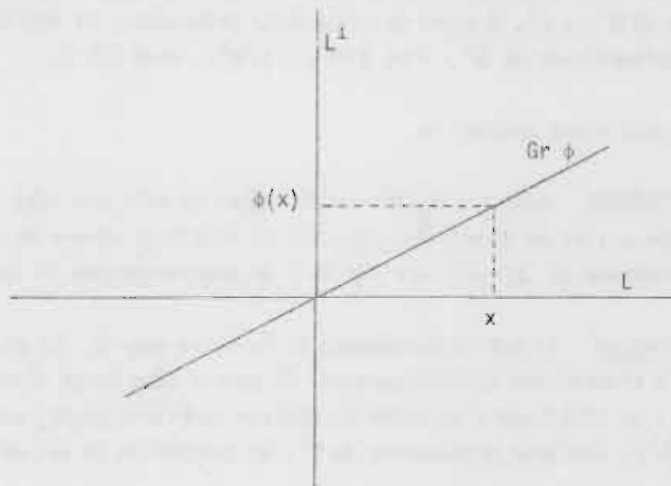
4.17. REMARQUE : On n'a pas de mal à se convaincre qu'en faisant $p = 1$ on retrouve la topologie définie en 2.7 pour les espaces projectifs : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \xrightarrow{E} & S^{n-1} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \pi \\ G_1(\mathbb{R}^n) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}P^{n-1} \end{array}$$

où $\pi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} : x \mapsto \mathbb{R}x$ (notée p en 2.7) et $E : O(n) \rightarrow S^{n-1} : X \mapsto X(\varepsilon_1)$, est trivialement commutatif et le même argument que ci-dessus montre que (si l'on ose écrire...) $\xlongequal{\quad}$ est un homéomorphisme.

Pour faire de $G_p(\mathbb{R}^n)$ une variété, il reste à lui fournir des cartes. On les décrit d'abord en termes de sous-espaces vectoriels : étant donné $L \in G_p(\mathbb{R}^n)$, à toute $\phi \in \mathcal{K}(L, L^\perp)$ on peut associer son graphe $Gr \phi = \{x + \phi(x) \mid x \in L\}$ qui est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de même dimension que L . Ainsi est définie une injection $\phi : \mathcal{K}(L, L^\perp) \rightarrow G_p(\mathbb{R}^n) : \phi \mapsto Gr \phi$ telle que $\phi(0) = L$. Si on note $\gamma(L)$ l'image de $\mathcal{K}(L, L^\perp)$ par ϕ , un résultat classique d'algèbre linéaire assure que $\gamma(L)$ se compose des sous-espaces vectoriels supplémentaires de L^\perp dans \mathbb{R}^n .

($n = 2, p = 1$)



Toutefois, pour démontrer que $]L[$ est un ouvert de carte, il est plus commode de prendre le point de vue des projecteurs. A cette fin on note M l'élément de $\mathcal{A}(n; p)$ tel que $\Gamma(M) = L$, $\Psi = \Gamma^{-1} \circ \Phi : \mathcal{L}(L, L^\perp) \rightarrow \mathcal{A}(n; p)$ l'injection correspondante (d'où $\Psi(Q) = M$), et $/M/ = \Psi(\mathcal{L}(L, L^\perp))$, autrement dit $\Gamma(/M/) =]L[$. La caractérisation de $]L[$ à l'aide des supplémentaires de L^\perp se traduit en termes de déterminants. Dans le cas où $M = P_p$, elle s'exprime dans le

4.18. **LEMME** : Soit $Q = (q_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}(n; p)$. Alors $Q \in /P_p/$ ssi le déterminant $|q_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}}$ est non nul.

Démonstration : D'après les définitions, $\dim Q(\mathbb{R}^n) = p$, et $Q \in /P_p/$ ssi $\Gamma(Q) \in]\mathbb{R}^p[$ c'est-à-dire ssi $Q(\mathbb{R}^n)$ est supplémentaire de \mathbb{R}^{n-p} .

Or, si on note $Q = \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \\ \downarrow p \end{matrix}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\det A \neq 0$
- (ii) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_{n-p} \end{pmatrix}$ est inversible
- (iii) $Q(\mathbb{R}^p) \oplus \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$
- (iv) $Q(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$.

(En effet (iii) implique (iv) parce qu'alors $\dim Q(\mathbb{R}^p) = p = \dim Q(\mathbb{R}^n)$, d'où $Q(\mathbb{R}^p) = Q(\mathbb{R}^n)$; et, Q étant un projecteur orthogonal, il résulte de (iv) que $\text{Ker } Q$ est supplémentaire de \mathbb{R}^p , d'où $Q(\mathbb{R}^n) = Q(\mathbb{R}^p)$, d'où (iii)).

On peut alors prouver le

4.19. **THEOREME** : Soit $L \in G_p(\mathbb{R}^n)$ et $M \in \mathcal{A}(n; p)$ tels que $\Gamma(M) = L$. Alors $/M/$ est un voisinage ouvert de M dans $\mathcal{A}(n; p)$, $]L[$ (un voisinage ouvert de L dans $G_p(\mathbb{R}^n)$), Ψ un homéomorphisme de $\mathcal{L}(L, L^\perp)$ sur $/M/$ et Φ un homéomorphisme de $\mathcal{L}(L, L^\perp)$ sur $]L[$.

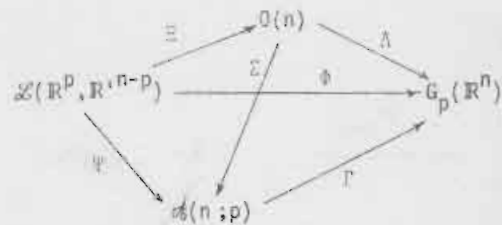
Démonstration : Il suffit évidemment de la faire pour $M, /M/$ et Ψ , les résultats sur $]L[$ et Φ s'ensuivent automatiquement. Il suffit même de se placer dans le cas où $M = P_p$: au voisinage d'un autre M , choisir (arbitrairement) une base orthonormée de $L = M(\mathbb{R}^n)$, une base orthonormée de L^\perp , et transcrire ce qui suit à l'aide du

changement de base qui en découle, lequel est un homéomorphisme. Dans ces conditions :

1°) $/P_p/$ est un ouvert de $A(n; p)$ par continuité de toute fonction déterminant (appliquer 4.18).

2°) Ψ est continue.

Mieux même, on construit une application continue Ξ qui fournit une section de Σ sur $/P_p/$ (resp. de Λ sur $)\mathbb{R}^p()$ c'est-à-dire telle que le diagramme



soit commutatif.

Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{n-p})$ ou encore $\phi \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ d'après nos conventions d'écriture.

On note $\hat{\phi} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & -\phi \\ \hline \phi & I_{n-p} \end{array} \right)$.

Il est clair que les p premières colonnes donnent les coordonnées d'une base de $\text{Gr } \phi$; on vérifie sans peine que les $(n-p)$ dernières donnent une base de $(\text{Gr } \phi)^\perp$. De là $\hat{\phi} \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$; et $\phi \mapsto \hat{\phi} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{n-p}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ est évidemment continue.

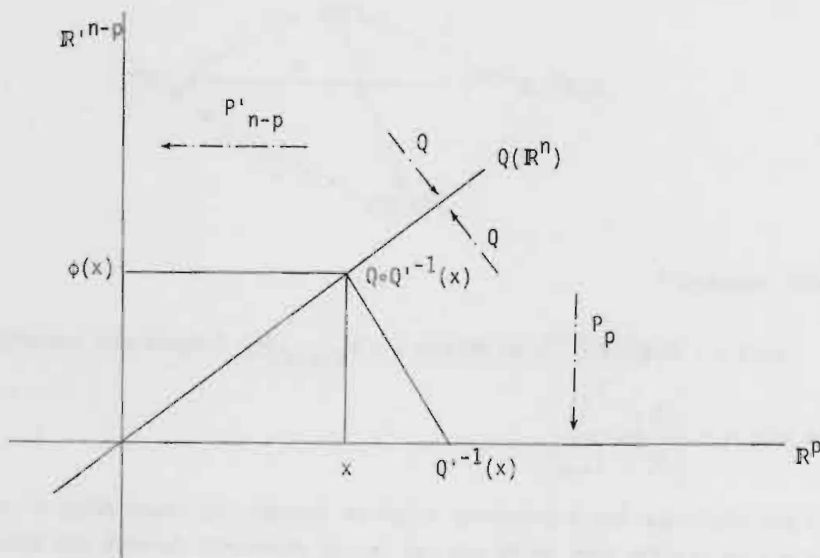
On poursuit avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, lui aussi notoirement continu, pour obtenir une application/matrice $\tilde{\phi} \in O(n)$ telle que $\tilde{\phi}(\mathbb{R}^p) = \hat{\phi}(\mathbb{R}^p) = \text{Gr } \phi$, d'où l'application continue

$$\Xi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{n-p}) \rightarrow O(n) : \phi \mapsto \tilde{\phi}$$

telle que $\Lambda \circ \Xi = \phi$, et donc aussi $\Sigma \circ \Xi = \Psi$, ce qui prouve la continuité de cette dernière.

3°) Ψ^{-1} est continue, comme on le voit par un calcul explicite : soit $Q = (q_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} \in /P_p/$, donc (cf. 4.18) tel que $|q_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq p}} \neq 0$. C'est

dire que $Q' = P_p \circ Q \circ \eta_p : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ (où η_p est l'"inclusion" $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$) est inversible. Alors $P_p \circ Q \circ \eta_p \circ Q'^{-1} = I_p$ et, posant $\phi = P'_{n-p} \circ Q \circ \eta_p \circ Q'^{-1}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $x + \phi(x) = Q(Q'^{-1}(x)) \in Q(\mathbb{R}^p)$. Autrement dit $\text{Gr } \phi \subset Q(\mathbb{R}^p)$ ou encore, pour des raisons de dimensions, $\text{Gr } \phi = Q(\mathbb{R}^p)$. Ainsi $\Psi(\phi) = Q$ et la continuité de l'application $Q \mapsto Q'^{-1}$ entraîne celle de l'application $Q \mapsto P'_{n-p} \circ Q \circ \eta_p \circ Q'^{-1}$, qui est Ψ^{-1} .



De toute cette étude résulte enfin le

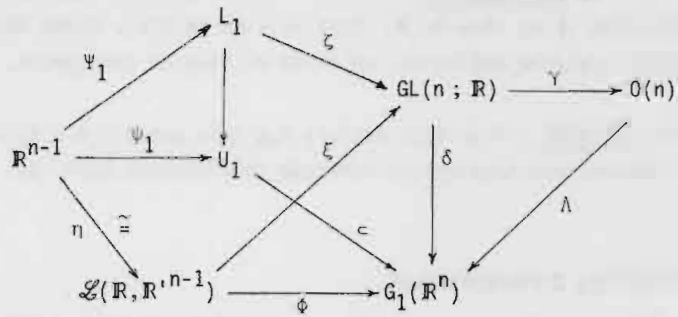
4.20. THEOREME : Pour tous entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$, la Grassmannienne $G_p(\mathbb{R}^n)$ est une variété topologique compacte de dimension $p(n-p)$.

Démonstration : La condition (i), déjà utilisée (cf. 4.16), et la condition (ii) viennent du fait que $\mathcal{L}(n; p)$ est un sous-espace topologique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

La condition (iii) vient de 4.19, puisque $\mathcal{L}(L, L^\perp) \cong \mathbb{R}^{p(n-p)}$.

La compacité, déjà utilisée (cf. 4.16) est due à celle de $O(n)/O^*(n; p)$. \square

4.21. REMARQUE : Dans le cas où $p = 1$, la famille de cartes définie en 4.19 coïncide avec celle de 2.8 : on laisse le lecteur scrupuleux vérifier que $/R/ = U_1$ et que $\psi_1 = \phi$ à l'aide du diagramme suivant



où $\eta : x \mapsto (y \mapsto (0, yx))$

$\xi : \phi \mapsto \hat{\phi}$ (cf. 4.19.1°)

γ est l'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$$\zeta : (1, x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & \dots & -x_{n-1} \\ x_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ x_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \Lambda \circ \gamma$$

et les autres notations sont celles de 2.8 et 4.19.

4.22. REMARQUE : La correspondance $L \mapsto L^\perp$ (ou, si l'on préfère, $M \mapsto I_n - M$) induit un homéomorphisme $H : G_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_{n-p}(\mathbb{R}^n)$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(L, L^\perp) & \xrightarrow{\phi_L} & G_p(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow \tau & & \downarrow H \\ \mathcal{L}(L^\perp, L) & \xrightarrow{\phi_{L^\perp}} & G_{n-p}(\mathbb{R}^n) \end{array} ,$$

où τ est la transposition, commutent.

Pour le cas complexe, reprendre ce qui précède avec les modifications qui s'imposent (\mathbb{C} au lieu de \mathbb{R} , $U(n)$ au lieu de $O(n)$, forme hermitienne au lieu de produit scalaire euclidien, adjointe au lieu de transposée,...). On obtient le

4.23. THEOREME : Pour tous entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$, la Grassmannienne $G_p(\mathbb{C}^n)$ est une variété topologique compacte de dimension $2p(n-p)$.

5. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

Les variétés topologiques ayant été définies (§1) comme des objets qui localement "ressemblent beaucoup à \mathbb{R}^n ", on en vient naturellement à se demander avec quel degré d'exactitude ces images locales se recollent. Plus précisément, si (U, ϕ, A) et (V, ψ, B) sont deux cartes (cf. 1.1.(iii)), les deux images de l'intersection, soit $\phi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$, sont au moins homéomorphes. Il est clair que, dans l'intention où nous sommes d'étendre aux variétés la notion de forme différentielle, il serait bon qu'elles fussent difféomorphes.

De cette remarque on tire :

5.1. DEFINITION : Deux cartes (U, ϕ, A) et (V, ψ, B) sur une même variété topologique M sont compatibles ssi

$$\psi \circ \phi^{-1} \Big|_{\phi(U \cap V)} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

et

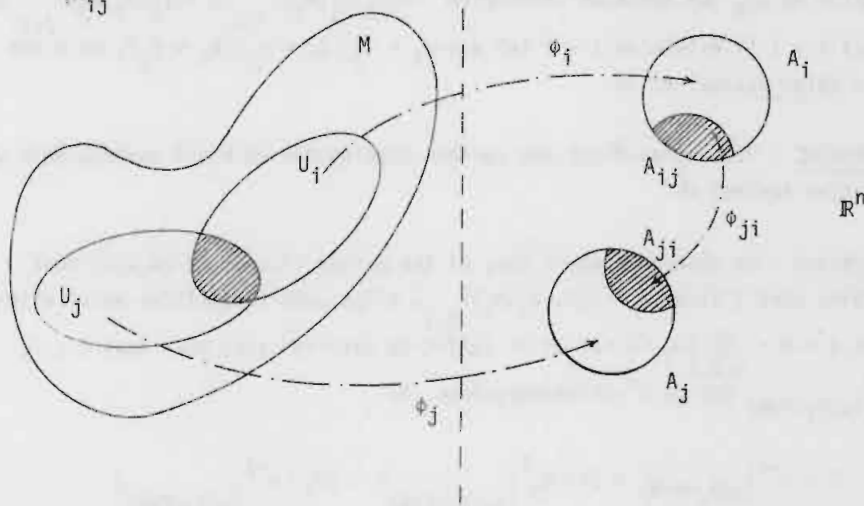
$$\phi \circ \psi^{-1} \Big|_{\psi(U \cap V)} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

sont des difféomorphismes de classe C^∞ , c'est-à-dire que ces applications sont de classe C^∞ (ce qui suffit, chacune étant la réciproque de l'autre).

5.2. DEFINITION : Une famille $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ de cartes d'une variété topologique M est un atlas de M ssi

$$(i) M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

(ii) toutes les cartes de \mathcal{A} sont compatibles entre elles, c'est-à-dire : pour tous $i, j \in I$, et en notant $A_{ij} = \phi_i(U_i \cap U_j)$ et $A_{ji} = \phi_j(U_i \cap U_j)$, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{A_{ij}} : A_{ij} \rightarrow A_{ji}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ (noté ϕ_{ji}).



5.3. DEFINITIONS : Une carte est compatible avec un atlas \mathcal{A} ssi elle est compatible avec toutes les cartes de \mathcal{A} .

Deux atlas sont compatibles ssi toutes les cartes de l'un sont compatibles avec toutes les cartes de l'autre.

Se garder de croire qu'il en soit toujours ainsi comme le prouve le

5.4. Contre-exemple : Sur la variété topologique \mathbb{R} , les cartes $(\mathbb{R}, \text{Id}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ et $(\mathbb{R}, \phi, \mathbb{R})$, où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, ainsi que les atlas à une carte correspondants, sont clairement incompatibles.

5.5. REMARQUE IMPORTANTE : Sans restreindre la définition, on peut imposer que les cartes d'un atlas soient toutes distinctes. Comme un homéomorphisme, de même que toute fonction, détermine sa source et son but, un atlas apparaît alors comme un sous-ensemble de \mathcal{H}_M , l'ensemble de tous les homéomorphismes entre un ouvert de M et un ouvert de \mathbb{R}^n , lequel n'est pas vide puisque M est une variété topologique. On peut alors parler de l'ensemble de tous les atlas de M et éviter les difficultés logiques que soulèverait autrement par exemple la démonstration du théorème 5.6. On

garde cependant la notation indicielle pour la commodité de lecture.

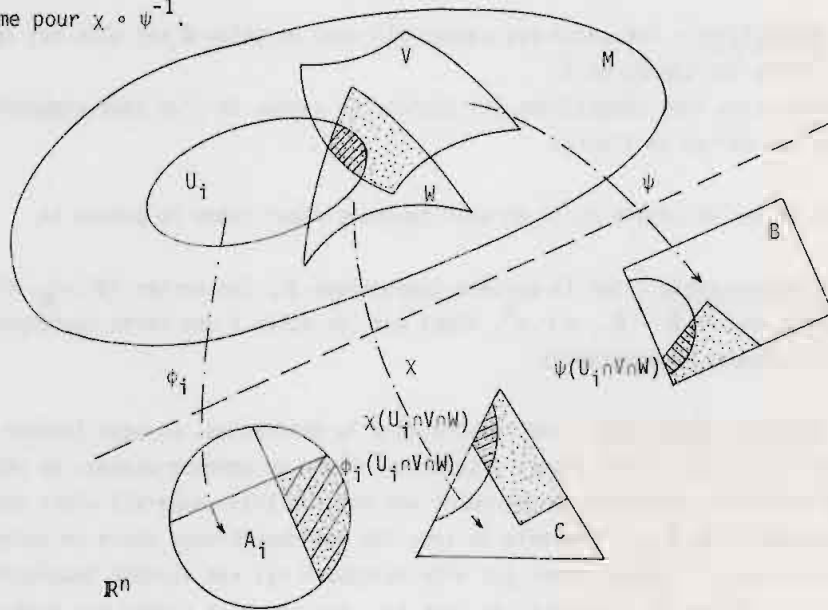
L'ensemble de tous les atlas étant muni d'une relation d'ordre, restriction de l'inclusion de \mathcal{A}_M (en notation indicielle : $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I} \leq \{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$ ssi pour tout $i \in I$ il existe un $j \in J$ tel que $U_i = V_j, \phi_i = \psi_j, A_i = B_j$), on a une notion d'atlas maximal et le

5.6. THEOREME : Tout atlas \mathcal{A} sur une variété topologique de M est contenu dans un unique atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$.

Démonstration : On observe d'abord que, si les cartes (V, ψ, B) et (W, χ, C) sont compatibles avec l'atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$, elles sont compatibles entre elles : en effet $V \cap W = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V \cap W)$ et il suffit de vérifier que, pour tout $i \in I$, $\psi \circ \chi^{-1}|_{\chi(U_i \cap V \cap W)}$ est un C^∞ -difféomorphisme. Or

$$\psi \circ \chi^{-1}|_{\chi(U_i \cap V \cap W)} = (\psi \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap V \cap W)}) \circ (\phi_i \circ \chi^{-1}|_{\chi(U_i \cap V \cap W)}).$$

Et de même pour $\chi \circ \psi^{-1}$.



Soit alors $\hat{\mathcal{A}}$ la famille de toutes les cartes compatibles avec \mathcal{A} (cf. 5.5!). La condition (ii) de 5.2 sur $\hat{\mathcal{A}}$ assure que $\mathcal{A} \leq \hat{\mathcal{A}}$. La condition (i) pour $\hat{\mathcal{A}}$ est vérifiée a fortiori, la condition (ii) pour $\hat{\mathcal{A}}$ vient de la remarque liminaire. La maximalité de $\hat{\mathcal{A}}$ est évidente.

Pour l'unicité, soit \mathcal{B} un atlas tel que $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$: la condition (ii) sur \mathcal{B} assure que $\mathcal{B} \leq \hat{\mathcal{A}}$. Si \mathcal{B} est maximal, $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{A}}$. \square

Désormais tout est prêt pour la

5.7. DEFINITION : Soit M une variété topologique de dimension n . On appelle structure différentiable sur M la donnée d'un atlas maximal de M .

On appelle variété différentiable de dimension n la donnée d'une variété topologique M de dimension n et d'une structure différentiable sur M .

5.8. REMARQUES IMPORTANTES :

1) Grâce au Théorème 5.6, un atlas quelconque, même non maximal, suffit à définir une structure différentiable sur M . Deux atlas compatibles, étant contenus dans le même atlas maximal (celui qu'engendre leur réunion), définissent la même structure différentiable.

2) Le contre-exemple 5.4 montre que deux structures différentiables distinctes peuvent être définies sur la même variété topologique.

Cependant, sauf en cas d'ambiguïté, l'usage est de sous-entendre l'atlas et de parler de "la variété M " au lieu de "la variété (M, \mathcal{A}) ".

La notion de sous-variété différentiable est imitée de 1.6, en se restreignant évidemment aux cartes de l'atlas maximal :

5.9. DEFINITION : On dit que N est une sous-variété (différentiable) de dimension p de la variété différentiable M ssi pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, ϕ, A) de M en x appartenant à \mathcal{A} telle que $\phi(x) = 0$ (ce qui n'est pas une restriction puisque les translations de \mathbb{R}^n sont des C^∞ -difféomorphismes) et telle que $\phi|_{U \cap N}$ soit un homéomorphisme de $U \cap N$ sur $A \cap \mathbb{R}^p$.

5.10. THEOREME : Dans ces conditions, N est une variété différentiable de dimension p .

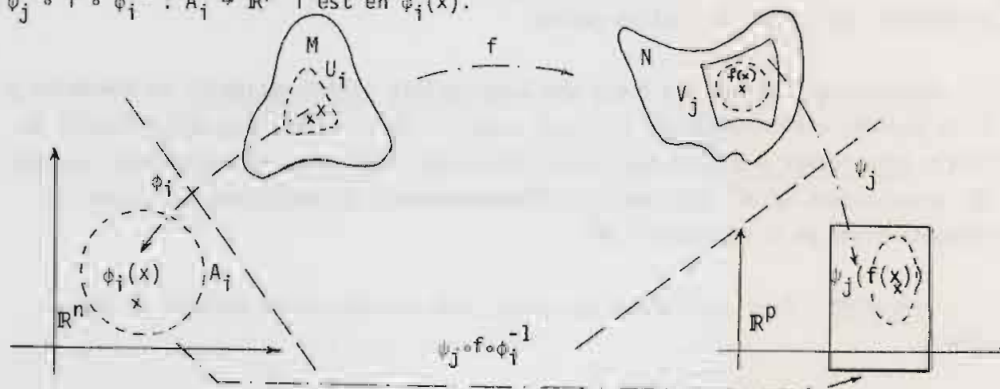
Démonstration : Soit (U, ϕ, A) et (V, ψ, B) deux cartes de \mathcal{A} possédant les propriétés de 5.9. Si on note π la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$, $\phi' = \pi \circ \phi|_{U \cap N}$ et $\psi' = \pi \circ \psi|_{V \cap N}$, les cartes correspondantes pour N sont $(U \cap N, \phi', A \cap \mathbb{R}^p)$ et $(V \cap N, \psi', B \cap \mathbb{R}^p)$. Et si on note ι l'"injection" $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$, on a $\psi' \circ \phi'^{-1} = \pi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \iota : A \cap \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, qui est bien de classe C^∞ puisque π et ι le sont, comme on sait. De même pour $\phi' \circ \psi'^{-1}$.

Noter (cf. 5.20) que la démonstration prouve que le déterminant $p \times p$ du haut à gauche dans la matrice jacobienne de $\psi \circ \phi^{-1}$ est non nul en tout point de $\phi(N \cap U \cap V)$. \square

La notion de variété topologique spécifiait un type d'espace particulier, mais les "bons" morphismes entre variétés topologiques n'étaient rien d'autre que les applications continues. Il n'en est plus de même ici : la structure plus riche de variété différentiable impose qu'on se restreigne à une certaine classe de morphismes "intéressants", évidemment définie en se servant de cartes.

Soit M, N deux variétés différentiables de dimensions respectives n, p , $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ et $\{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$ leurs atlas maximaux respectifs. Étant donné une application continue $f : M \rightarrow N$ et $x \in M$, on peut toujours choisir $i \in I$ et $j \in J$ tels que $x \in U_i$, $f(x) \in V_j$, $f(U_i) \subset V_j$: en effet, par maximalité de l'atlas de M , U_i peut au besoin être remplacé par $U_i \cap f^{-1}(V_j)$. Alors :

5.11. DEFINITION : L'application f est différentiable en x ssi $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : A_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ l'est en $\phi_i(x)$.



5.12. REMARQUE IMPORTANTE : Cette définition a un sens parce qu'elle ne dépend en fait pas du choix des cartes : soit $\phi_k : U_k \rightarrow A_k$, $\psi_\ell : V_\ell \rightarrow B_\ell$ un autre choix ; alors $U_i \cap U_k \neq \emptyset$, $V_j \cap V_\ell \neq \emptyset$ et $\psi_\ell \circ f \circ \phi_k^{-1} = \psi_\ell \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i \circ \phi_k^{-1}$ sur $\phi_k(U_i \cap U_k)$. Or $\psi_\ell \circ \psi_j^{-1}$ et $\phi_i \circ \phi_k^{-1}$ sont différentiables par définition, de sorte que $\psi_\ell \circ f \circ \phi_k^{-1}$ est différentiable en $\phi_k(x)$ ssi $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ l'est en $\phi_i(x)$.

La différentiabilité de f au voisinage de x , puis la différentiabilité d'ordre 2 et plus en x et au voisinage de x se définissent de même en termes de $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$.

5.13. DEFINITION : L'application f est dite différentiable ssi elle l'est en tout point de M ; de classe C^∞ ssi elle l'est en (donc au voisinage de) tout point de M .

Le théorème attendu sur la composition des applications est vrai (démonstration aux bons soins du lecteur) :

5.14. THEOREME : Soit $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ des applications différentiables (de classe C^∞) entre variétés différentiables. Alors $g \circ f : M \rightarrow P$ est différentiable (de classe C^∞).

Enfin, bien sûr :

5.15. DEFINITION : Un homéomorphisme $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme (de classe C^∞) ssi f et f^{-1} sont de classe C^∞ .

Dans le cas où M et N sont des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n respectivement il est facile de voir que toutes ces notions se réduisent aux définitions du calcul différentiel "élémentaire".

Inversement, des résultats classiques dans ce cadre s'étendent aux variétés, par exemple :

5.16. THEOREME : Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme entre variétés différentiables, M et N ont même dimension.

Démonstration : Soit $x \in M$, $y = f(x) \in N$, (U, ϕ, A) une carte de M en x , (V, ψ, B) une carte de N en y . Si A est un ouvert de \mathbb{R}^m et B un ouvert de \mathbb{R}^n , la dérivée de

$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(x)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et la dérivée de $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ en $\psi(y)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Il est immédiat que ces deux applications linéaires sont réciproques l'une de l'autre, d'où $m = n$. (cf. V.5.3). \square

Ou encore la notion de rang :

5.17. LEMME : Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ , $x \in M$, $y = f(x) \in N$, (U, ϕ, A) et (U', ϕ', A') deux cartes de M en x , (V, ψ, B) et (V', ψ', B') deux cartes de N en y . Alors la matrice jacobienne de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ a le même rang en $\phi(x)$ que la matrice jacobienne de $\psi' \circ f \circ \phi'^{-1}$ en $\phi'(x)$.

Démonstration : Immédiate, puisque $\phi' \circ \phi^{-1}$ et $\psi' \circ \psi^{-1}$ sont par hypothèse des C^∞ -difféomorphismes. \square

5.18. DEFINITION : Ce rang, ce qui ne dépend donc que de x et de f , est le rang de f en x , noté $\text{Rg}_x f$.

On ne s'étonnera pas que les situations les plus agréables soient celles où le rang est maximum. De façon précise :

5.19. DEFINITIONS : Si $\dim M \leq \dim N$ et $\text{Rg}_x f = \dim M$ en tout point $x \in M$, f est une immersion.

Si $\dim M \geq \dim N$ et $\text{Rg}_x f = \dim N$ en tout point $x \in M$, f est une submersion.

Une immersion injective et dont l'image est une sous-variété de N est un plongement.

La pertinence de cette dernière définition apparaît dans la

5.20. PROPOSITION : Si M est une variété différentiable et N une sous-variété de M , l'inclusion est un plongement.

Démonstration : Immédiate grâce à la remarque finale de 5.10. \square

6. REPRISE DES EXEMPLES.

Ce paragraphe est consacré à établir que, dans tous les exemples des paragraphes précédents, les cartes forment un atlas et que tous ces objets sont donc des variétés différentiables.

6.1. Un ouvert de \mathbb{R}^n (dimension : n)

Si M est cet ouvert, prendre l'atlas à une carte $\{(M, Id_M, M)\}$.

6.2. Un ouvert d'une variété différentiable de dimension n (dimension : n).

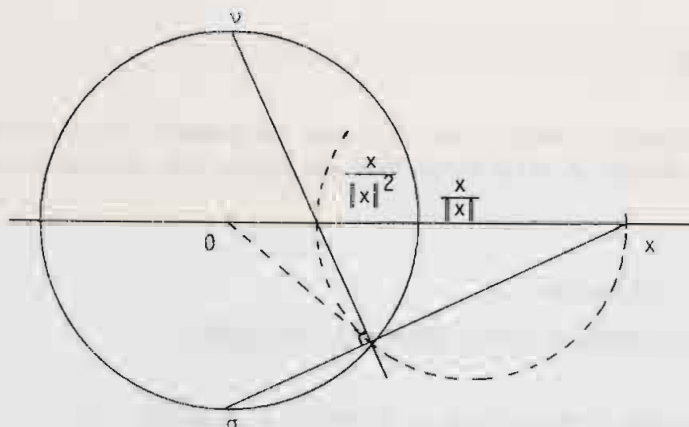
Soit M la variété, N l'ouvert, $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ l'atlas définissant la structure différentiable de M, J le sous-ensemble de I formé des indices i tels que $U_i \cap N \neq \emptyset$. S'il arrive qu'on ait pour certains couples $i, j \in J$, $i \neq j$, $\phi_i|_{U_i \cap N} = \phi_j|_{U_j \cap N}$, ne garder qu'une seule carte dans chaque classe de la relation d'équivalence ainsi introduite sur J (à l'aide d'une fonction de choix...) : cela construit un sous-ensemble $K \subset J$. Prendre l'atlas $\{(U_i \cap N, \phi_i|_{U_i \cap N}, \phi_i(U_i \cap N))\}_{i \in K}$.

6.3. Un produit cartésien de deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n (dimension : m + n).

Si $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ et $\{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$ sont les atlas respectifs, prendre l'atlas $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j, A_i \times B_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$.

6.4. La sphère S^n (dimension : n)

On prend (cf. 2.2. (iii) 1°) les cartes $(S^n \setminus \{v\}, \phi_v, \mathbb{R}^n)$ et $(S^n \setminus \{\sigma\}, \phi_\sigma, \mathbb{R}^n)$. Alors $\phi_\sigma((S^n \setminus \{v\}) \cap (S^n \setminus \{\sigma\})) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et un calcul direct (ou des considérations de géométrie classique : puissance d'un point par rapport à un cercle...) montre que $\phi_\sigma \circ \phi_v^{-1}|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est l'application $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ qui est notoirement de classe C^∞ . Il en est de même pour $\phi_v \circ \phi_\sigma^{-1}$.



Le lecteur pourra vérifier que 2.2.(iii) 2°) fournit un autre atlas, compatible avec celui-ci.

6.5. L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ (dimension : n)

On reprend les notations de 2.8. Les cartes sont les triplets $(U_i, \phi_i, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n+1$. Il est clair, par définition de q , que $U_i \cap U_j = q(L_i \cap L_j)$, d'où $\phi_i(U_i \cap U_j) = \phi_i(L_i \cap L_j)$.

$$\text{Si } K_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \neq 0\}, \phi_i(U_i \cap U_j) = \begin{cases} K_{j-1} & \text{si } i < j \\ K_j & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} \Big|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = \phi_j \circ \psi_i \Big|_{\phi_i(L_i \cap L_j)}$$

$$= \begin{cases} \phi_j \circ \psi_i \Big|_{K_{j-1}} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{x_{j-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{j-2}, x_j, \dots, x_n) & \text{si } i < j \\ \phi_j \circ \psi_i \Big|_{K_j} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

[N.B. : A strictement écrire, la première des deux lignes précédentes n'a de sens que si $i-1 \geq 1$, $j-2 \geq i$, $n \geq j$, la deuxième seulement si $j-1 \geq 1$, $i-1 \geq j+1$, $n \geq i$. Pour que les formules restent valides dans tous les cas, il suffit de prendre la convention que, là où une de ces inégalités n'est pas vérifiée, la partie correspondante de la parenthèse disparaît. Par exemple, dans le cas

extrême où $n = 1$, on ne peut avoir que $1 = i < j = 2$ ou $2 = i > j = 1$ et les deux lignes se réduisent à $x_1 \mapsto \frac{1}{x_1}$.

L'une et l'autre sont de classe C^∞ .

6.6. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ (dimension : $2n$).

Même démonstration en substituant \mathbb{C} à \mathbb{R} .

6.7. Les groupes classiques

$GL(n, \mathbb{R})$ (dimension : n^2)

$O(n)$ (dimension : $\frac{n(n-1)}{2}$)

$SO(n)$ (dimension : $\frac{n(n-1)}{2}$)

$GL(n, \mathbb{C})$ (dimension : $2n^2$)

$U(n)$ (dimension : n^2)

et les variétés de Stiefel

$V_{n,p}(\mathbb{R})$ (dimension : $\frac{p(2n-p-1)}{2}$)

$V_{n,p}(\mathbb{C})$ (dimension : $p(2n-p)$).

Pour $GL(n, \mathbb{R})$ et $GL(n, \mathbb{C})$, il s'agit d'ouverts de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ et de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ respectivement : appliquer 6.1.

Pour les autres, leur structure de variété topologique résultait du Corollaire 3.2. Or ce corollaire négligeait complètement l'aspect différentiel dans les conclusions du théorème des fonctions implicites. Les structures différentiables des objets ci-dessus vont être obtenues en réparant cet "oubli".

6.8. THEOREME : La variété topologique M dont les points sont les solutions du système

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

où n, p sont des entiers tels que $1 \leq p < n$, et les $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^∞ telles que la jacobienne soit de rang p en tout point de M , est une variété différentiable (de dimension $n - p$).

Démonstration : Le seul ennui, pour être gênant, n'est que superficiel : puisque par définition on doit considérer deux cartes, et donc deux systèmes de coordonnées principales, en même temps, on ne peut plus supposer que celles-ci ont la courtoisie d'être les $(n - p)$ premières. Il faut "battre les cartes" (sic) ce qui alourdit considérablement l'écriture. A cela près, tout revient à montrer que les $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ des cartes de M sont des produits de projections et des ψ_k de 3.1 et 3.2, qui sont justement garanties de classe C^∞ .

Quant aux détails, voici (comparer 3.1) :

on pose $q = n - p$ et on note Λ l'ensemble de toutes les permutations λ de $\{1, \dots, n\}$ dont les restrictions à $\{1, \dots, q\}$ et à $\{q+1, \dots, n\}$ sont croissantes (en 3.1, on se contentait de $\lambda = \text{Id}$).

Si $\lambda \in \Lambda$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit

$$D_\lambda(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\lambda(q+1)}}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\lambda(n)}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{\lambda(q+1)}}(x) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{\lambda(n)}}(x) \end{vmatrix}$$

Supposant qu'en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on ait $f_1(a) = \dots = f_p(a) = 0$ et $D_\lambda(a) \neq 0$, on appelle principales les coordonnées numérotées $\lambda(1), \dots, \lambda(q)$ et la version "battue" de 3.1 fournit un $\epsilon(a, \lambda) > 0$ tel que sur la boule ouverte $A(a, \lambda) = \overset{\circ}{B}((a_{\lambda(1)}, \dots, a_{\lambda(q)}), \epsilon(a, \lambda))$ de \mathbb{R}^q soit défini un unique p -uplet de fonctions

$$\psi_{a, \lambda, 1} : A(a, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi_{a, \lambda, p} : A(a, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant, pour tout $i = 1, \dots, p$ et tout $(x_1, \dots, x_q) \in A(a, \lambda)$,

$$f_i(\xi_{a, \lambda, 1}, \dots, \xi_{a, \lambda, n}) = 0$$

où
$$\xi_{a, \lambda, i} = \begin{cases} x_{\lambda^{-1}(i)} & \text{si } i \in \lambda(\{1, \dots, q\}) \\ \psi_{a, \lambda, \lambda^{-1}(i)-q}(x_1, \dots, x_q) & \text{si } i \in \lambda(\{q+1, \dots, n\}), \end{cases}$$

ce qui veut simplement (?) dire que x_i va à la $\lambda(i)$ ^{ème} place et $\psi_{a, \lambda, j}(x_1, \dots, x_q)$ à la $\lambda(q+j)$ ^{ème}. Ces fonctions $\psi_{a, \lambda, j}$ sont de classe C^∞ .

On note (cf. 3.2) pour tout $x = (x_1, \dots, x_q) \in A(a, \lambda)$

$$\tilde{\psi}_{a, \lambda}(x) = (\xi_{a, \lambda, 1}, \dots, \xi_{a, \lambda, n})$$

ce qui définit une fonction de classe C^∞ $\tilde{\psi}_{a, \lambda} : A(a, \lambda) \rightarrow M$; on pose

$V_{a, \lambda} = \tilde{\psi}_{a, \lambda}^{-1}(A(a, \lambda))$, on note $\pi_{a, \lambda} : V(a, \lambda) \rightarrow A(a, \lambda)$ la restriction à $V(a, \lambda)$ de la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(q)})$, dont la réciproque est précisément $\tilde{\psi}_{a, \lambda}$, et on obtient la carte $(V(a, \lambda), \pi_{a, \lambda}, A(a, \lambda))$.

Il ne reste plus (!) qu'à montrer que la famille $\{(V(a, \lambda), \pi_{a, \lambda}, A(a, \lambda)) \mid (a, \lambda) \in I\}$ où $I = \{(a, \lambda) \in M \times \Lambda \mid D_\lambda(a) \neq 0\}$ forme un atlas de M .

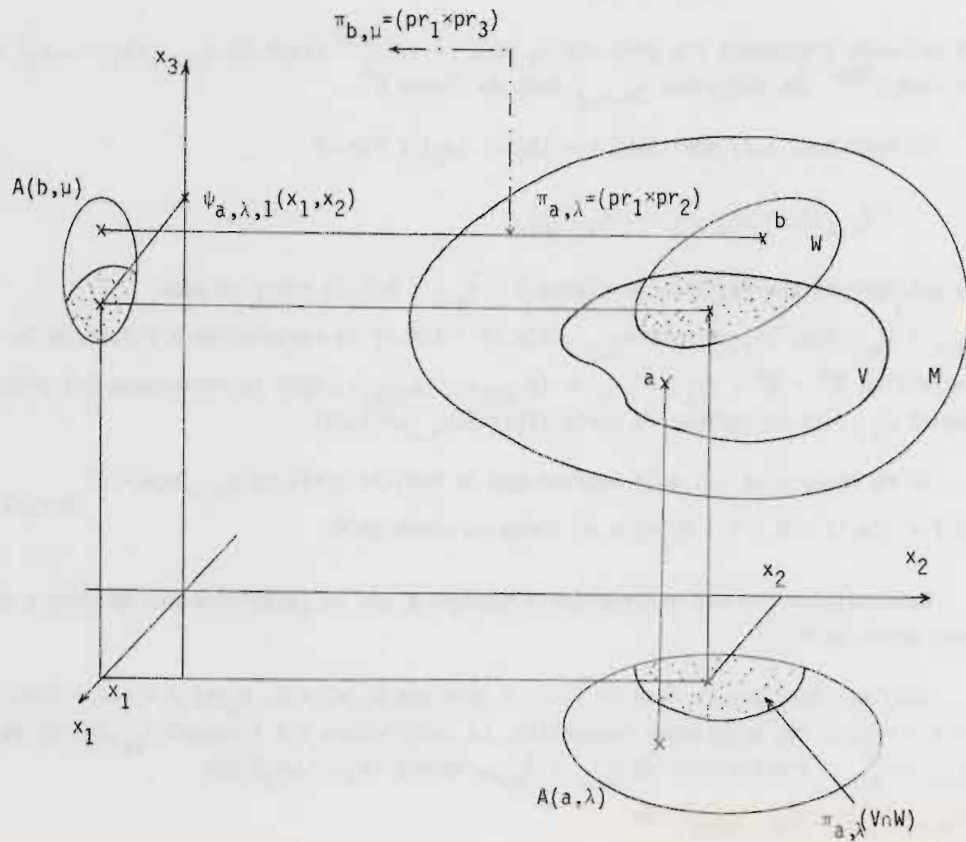
La condition (i) est assurée par l'hypothèse que la jacobienne est de rang p en tout point de M .

Soit a, b deux points de M et $\lambda, \mu \in \Lambda$ tels que $D_\lambda(a) \neq 0, D_\mu(b) \neq 0$; $V = V(a, \lambda)$ et $W = V(b, \mu)$ les voisinages respectifs. La restriction ϕ à l'ouvert $\pi_{a, \lambda}^{-1}(V \cap W)$ de $\pi_{b, \mu}^{-1} \circ \pi_{a, \lambda}^{-1}$, c'est-à-dire de $\pi_{b, \mu}^{-1} \circ \tilde{\psi}_{a, \lambda}^{-1}$, envoie (x_1, \dots, x_q) sur $(\xi_{a, \lambda, \mu(1)}, \dots, \xi_{a, \lambda, \mu(q)})$. Or

$$\xi_{a, \lambda, \mu(j)} = \begin{cases} x_{\lambda^{-1} \circ \mu^{-1}(j)} & \text{si } j \in \mu^{-1} \circ \lambda(\{1, \dots, q\}) \\ \psi_{a, \lambda, \lambda^{-1} \circ \mu^{-1}(j)-q}(x_1, \dots, x_q) & \text{si } j \in \mu^{-1} \circ \lambda(\{q+1, \dots, n\}). \end{cases}$$

Autrement dit, ϕ est bien, comme annoncé, un produit cartésien de projections et de fonctions $\psi_{a,\lambda,j}$, c'est donc une application de classe C^∞ $\phi : \pi_{a,\lambda}(V \cap W) \rightarrow \mathbb{R}^q$. \square

Figure avec $n = 3$, $p = 1$, $\lambda = \text{Id}$, $\mu = \mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; d'où
 $\mu^{-1} \circ \lambda(\{1,2\}) = \{1,3\}$, $\mu^{-1} \circ \lambda(\{3\}) = \{2\}$, $\varepsilon_{a,\lambda,\mu(1)} = x_1$, $\varepsilon_{a,\lambda,\mu(2)} = \psi_{a,\lambda,1}(x_1, x_2)$.



6.9. REMARQUES :

(i) On observe, comme en 3.3, que, sous les hypothèses de 6.8, M est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

(ii) On pourrait reformuler 6.8 de la façon suivante :

Considérant (à bon droit !) \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p comme des variétés différentiables, le p-uplet (f_1, \dots, f_p) définit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^∞ , telle que $M = f^{-1}(\{0\})$ et telle que $\text{Rg}_x f = p$ (c'est-à-dire que f est une submersion) en tout point $x \in M$ (cf. 5.18 et 5.19). La conclusion est alors que M est une (n-p)-sous-variété de \mathbb{R}^n .

Le lecteur est invité à démontrer de façon générale le

6.10. THEOREME-EXERCICE : Soit M une variété différentiable de dimension m, N une variété différentiable de dimension n, avec $m > n$; $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ ; $y \in N$, $K = f^{-1}(\{y\}) \subset M$.

Si f est une submersion en tout point de K, alors K est une (m-n)-sous-variété de M.

6.11. Les Grassmanniennes réelles $G_p(\mathbb{R}^n)$ (dimension : $p(n-p)$)

Deux cartes sont (cf. 4.19) de la forme $(/M, \Psi^{-1}, \mathcal{L}(L, L^\perp))$ et $(/M', \Psi'^{-1}, \mathcal{L}(L', L'^\perp))$; il s'agit de vérifier que $\Psi'^{-1} \circ \Psi|_{\Psi^{-1}(/M \cap M'/)}$ est de classe C^∞ . Or cela s'obtient (cf. 4.19 2°) et 3°)) par composition des applications

$$\Xi : \mathcal{L}(L, L^\perp) \rightarrow O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$$

$$\Sigma : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$\Psi'^{-1} : \mathfrak{B}(n; p) \rightarrow \mathcal{L}(L', L'^\perp)$$

où $\mathfrak{B}(n; p)$ est l'ouvert de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ formé des applications linéaires dont la matrice, dans une base réunion d'une base de L' et d'une base de L'^\perp , a son mineur $(p \times p)$ du haut à gauche non nul.

On vérifie directement sur leurs définitions, qui se déduisent de 4.19 par simples changements de base, lesquels sont indéfiniment différentiables, que ces applications sont de classe C^∞ .

[N.B. : en fait, en 4.19, on n'a défini, et utilisé, ces applications que sur des sous-ensembles des ouverts ici indiqués. Mais elles sont bien définies, et différentiables, sur les ouverts entiers.]

6.12. Les Grassmanniennes complexes $G_p(\mathbb{C}^n)$ (dimension : $2p(n-p)$).

Démonstration : identique.

Il nous reste à régler le cas de $SU(n)$, provisoirement mis de côté (cf. le commentaire qui suit 4.8).

Pour ce faire on rappelle que, si $Z \in U(n)$, $|\det Z| = 1$, on note $\Delta = \det|_{U(n)} : U(n) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\delta : U(n) \rightarrow S^1$ l'application induite par Δ .

6.13. LEMME : L'application δ est une submersion en tout point de $U(n)$.

Démonstration : Il est clair que δ est de classe C^∞ ssi Δ l'est (résultat général sur les sous-variétés). Or l'application $\det : \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ est notoirement de classe C^∞ , et l'inclusion $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ est, d'après 5.20 et 6.9(i), un plongement, donc de classe C^∞ . Ainsi Δ , et δ , sont de classe C^∞ .

De même l'application

$$\lambda : S^1 \rightarrow U(n) : z \mapsto \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est de classe C^∞ .

Enfin $\delta \circ \lambda = \text{Id}_{S^1}$, ce qui assure que δ est bien de rang 1 en tout point de $U(n)$ (comparer la démonstration de 5.16). \square

6.14. COROLLAIRE : Pour tout entier non nul n , $SU(n)$ est une variété différentiable compacte de dimension $n^2 - 1$.

Démonstration : Comme $SU(n) = \delta^{-1}(\{1\})$, on applique 6.10 à $\delta : U(n) \rightarrow S^1$, ce qui montre que $SU(n)$ est une $(n^2 - 1)$ -sous-variété de $U(n)$.

La compacité provient de celle de $U(n)$ (et de la continuité de $\delta \dots$). \square

7. EXERCICES.

7.1.

Soit $\kappa : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$ (où S^1 est considéré comme cercle-unité de \mathbb{C}).

On reprend les notations de 2.8 et 6.5. On pose $\Lambda_i(x) = \psi_i(x)/\|\psi_i(x)\|$, $i = 1, 2$. Vérifier que $\kappa \circ \Lambda_1$ et $\kappa \circ \Lambda_2$ sont les projections stéréographiques de pôles ouest et est respectivement.

En déduire des difféomorphismes entre U_i ($i = 1, 2$) et des arcs de cercle qui coïncident sur $U_1 \cap U_2$. En déduire que $\mathbb{R}P^1$ et S^1 sont difféomorphes.

7.2.

Soit $\chi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (2\operatorname{Re} u\bar{v}, 2\operatorname{Im} u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$.

Montrer que χ induit une submersion $S^3 \rightarrow S^2$, dite application de Hopf (S^3 est regardée comme sphère-unité de \mathbb{C}^2).

Reprendre l'exercice précédent en substituant \mathbb{C} à \mathbb{R} et χ à κ pour montrer que $\mathbb{C}P^1$ est difféomorphe à S^2 .

Est-ce que $\chi \circ \Lambda_1$ et $\chi \circ \Lambda_2$ sont encore des projections stéréographiques ?

7.3.

Montrer que l'application $G_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui à tout sous-espace vectoriel de dimension p de \mathbb{R}^n associe son projecteur orthogonal (cf. introduction à 4.16) est un plongement.

7.4.

Montrer qu'en associant à tout système libre de p vecteurs de \mathbb{R}^n le sous-espace vectoriel qu'il engendre on définit une submersion $V_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow G_p(\mathbb{R}^n)$. (Construire une section).

Quelle est l'image réciproque d'un point de $G_p(\mathbb{R}^n)$?

Mêmes questions en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{C} .

7.5. (Théorème du rang constant).

Soit n, p deux entiers, $n \geq p$; $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un p -uplet de fonctions de classe C^∞ . On note M l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0$.

Si la jacobienne du système est de rang q , $q < p$, sur un voisinage de M , M est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n de dimension $n - q$.

Remarque : Si la jacobienne est de rang q en un point, elle est de rang au moins q sur un voisinage de ce point, par continuité de toute fonction-déterminant. Dans le cas du théorème 6.8, le rang est maximum : il suffit donc de supposer ce rang égal à p sur M pour qu'il le soit au voisinage.

Indication : Sur un ouvert où c'est le déterminant $q \times q$ du haut à gauche qui est non nul, appliquer 6.8 au q -uplet (f_1, \dots, f_q) , puis montrer que les autres équations sont alors également vérifiées.

7.6.

Soit M une variété différentiable, G un groupe fini. On suppose que G agit sur M , c'est-à-dire qu'il existe une application de classe C^∞ (G est une variété de dimension 0)

$$\varphi : G \times M \rightarrow M : (g, x) \mapsto g.x$$

telle que

(1) pour tout $x \in M$, $e.x = x$ (où e désigne l'élément neutre de G) ;

(2) pour tous $g, h \in G$, $x \in M$, $(gh).x = g.(h.x)$.

On suppose que cette action est libre, c'est-à-dire que, si $g \in G$, $g \neq e$, l'application $\tilde{g} : x \mapsto g.x$ n'a pas de point fixe.

Montrer que dans ces conditions le quotient M/G est muni d'une structure différentiable canonique. (Utiliser la séparation de M et la finitude de G pour fabriquer les cartes de M/G à partir de l'atlas de M).

7.7

Vérifier que les assertions suivantes sont vraies, ou plus exactement tautologiques :

Si U est un ouvert d'une variété différentiable M (et donc est une variété différentiable de même dimension : 6.2), l'inclusion de U dans M est une immersion.

Si (U, ϕ, A) est une carte d'une variété différentiable M , ϕ est un difféomorphisme (et pas seulement un homéomorphisme).

CHAPITRE IV

COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

L'existence des cartes va permettre d'étendre aux variétés différentiables les concepts du Chapitre II : la philosophie générale est que les définitions se font "localement" sur les images dans \mathbb{R}^n des ouverts de cartes, avec des conditions destinées à assurer que les morceaux "se recollent bien".

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE.

En fait, conformément à la "philosophie générale", ce n'est pas vraiment sur la variété que les formes différentielles sont définies, mais à travers les cartes :

1.1. DEFINITION : Soit M une variété différentiable définie par un atlas maximal

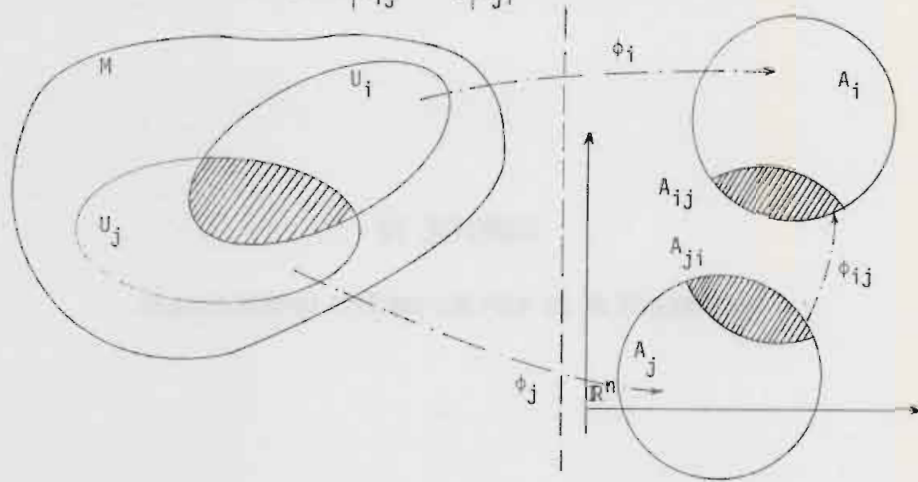
$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}.$$

Pour alléger les notations, on pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $A_{ij} = \phi_i(U_{ij})$, $\phi_{ij} = \phi_i \circ (\phi_j^{-1}|_{A_{ji}})$.

Une k-forme différentielle sur M ($k \in \mathbb{N}$) consiste en la donnée d'une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ telle que

- pour tout $i \in I$, ω_i soit une k -forme sur A_i : $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$ (cf. II.1.2.)

- pour tous $i, j \in I$, $\phi_{ij}^*(\omega_i|_{A_{ij}}) = \omega_j|_{A_{ji}}$ (cf. II.3.1).



1.2. REMARQUE : Cette définition est naturelle, et l'usage confirme que c'est celle qui convient. En tout cas, imposer comme condition de compatibilité que, pour tous $i, j \in I$, $\omega_i \circ \phi_i|_{U_{ij}} = \omega_j \circ \phi_j|_{U_{ij}}$ aurait relevé d'un optimisme déraisonnable.

Il en résulte cependant que, dans le cadre de 1.1, ω ne définit plus d'application $M \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$. Parler de la valeur de ω en un point réclame une construction assez complexe dont voici les grandes lignes :

- pour tout couple $i, j \in I$ tel que $U_{ij} \neq \emptyset$, on dispose d'une application $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}))$ en notant $g_{ij}(x)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_K^x) à pour éléments les nombres réels $X_{KL}(x) = D_L^K(\phi_{ij})(\phi_j(x))$; ainsi (cf. II.3.2) $g_{ij}(x) \cdot \omega_i(\phi_i(x)) = \phi_{ij}^*(\omega_i)(\phi_j(x)) = \omega_j(\phi_j(x))$, et, partout où cela a un sens

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x) = g_{ij}(x).$$

Sur la réunion disjointe $R^k = \bigcup_{i \in I} (U_i \times \{i\} \times \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}))$ la relation définie par

$$(x, i, \xi) \sim (y, j, \eta) \text{ ssi } x = y \text{ et } \eta = g_{ij}(x) \cdot \xi$$

est une relation d'équivalence. Le quotient $Q^k = R^k / \sim$ est la source d'une surjection

$p : Q^k \rightarrow M$ induite par $(x, i, \varepsilon) \mapsto x$.

Soit alors ω une k -forme sur M . Pour tout $x \in M$, la classe du triplet $(x, i, \omega_i(\phi_i(x)))$ modulo \sim est un élément de Q^k qui ne dépend pas du choix de $i \in I$ tel que $x \in U_i$: on appelle $\omega(x)$ cette classe, d'où l'application $\omega : M \rightarrow Q^k$ telle que $p \circ \omega = \text{Id}_M$.

Nous ne développerons pas ce point de vue (construction des puissances extérieures du fibré cotangent), renvoyant le lecteur aux ouvrages qui traitent des fibrés ([9] en particulier).

Nous ferons seulement observer que les expressions " $\omega(x) = 0$ " et " $\omega(x) \neq 0$ ", dont nous aurons besoin (cf. 5.12), peuvent se définir sans y faire référence grâce au

1.3. LEMME : Soit $x \in M$ et $i, j \in I$ tels que $x \in U_{ij}$. Alors $\omega_i(\phi_i(x)) = 0$ ssi $\omega_j(\phi_j(x)) = 0$.

Démonstration : On écrit $\omega_i = \sum_{K \in J_n^k} \omega_{iK} dx_K$ et $\omega_j = \sum_{L \in J_n^k} \omega_{jL} dx_L$, d'où $\omega_i(\phi_i(x)) = 0$ ssi pour tout $K \in J_n^k$, $\omega_{iK}(\phi_i(x)) = 0$. Or $\omega_{iK}(\phi_i(x)) = \omega_{iK} \circ \phi_{ij}(\phi_j(x))$, d'où le résultat puisque les ω_{jL} sont des combinaisons linéaires des $\omega_{iK} \circ \phi_{ij}$ (cf. II.3.2). \square

1.4. REMARQUE : Du lemme résulte aussi que la notion de support d'une forme ω peut se définir de cette manière : c'est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in M$ où $\omega(x) \neq 0$. On le note toujours $\text{Supp } \omega$.

On note $\Omega_c^k(M)$ l'ensemble des k -formes différentielles définies sur M à support compact, $\Omega^k(M)$ étant l'ensemble de toutes les k -formes.

La première tâche est bien sûr de vérifier la

1.5. PROPOSITION : Si M est un ouvert de \mathbb{R}^n , la nouvelle définition d'une forme différentielle coïncide avec l'ancienne.

Démonstration : On rappelle que l'atlas maximal \mathcal{A} qui définit la structure de variété sur M est induit par l'atlas à une carte $\{(M, \text{Id}_M, M)\}$.

Soit alors $\omega \in \Omega^k(M)$ une "ancienne" k -forme sur M . Pour toute carte (U_i, ϕ_i, A_i)

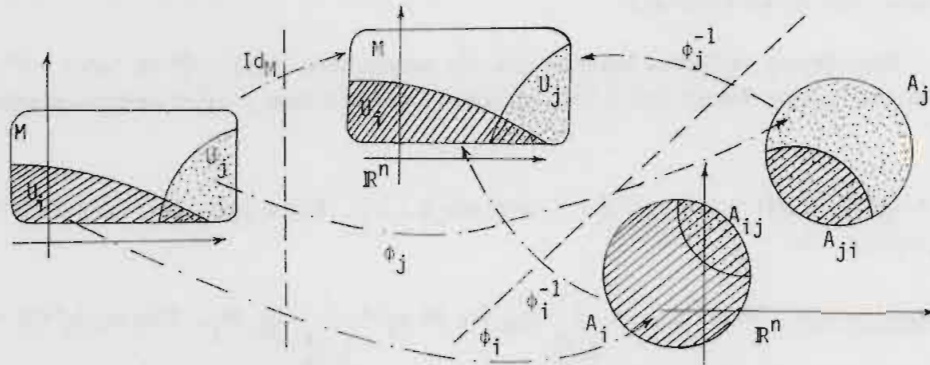
de \mathcal{A} , on pose $\omega_i = (\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i})$. Il est clair qu'ainsi

$$\omega_i|_{A_{ij}} = (\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i})|_{A_{ij}} = ((\phi_i|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}}) \text{ et de même}$$

$$\omega_j|_{A_{ji}} = ((\phi_j|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}}), \text{ de sorte que}$$

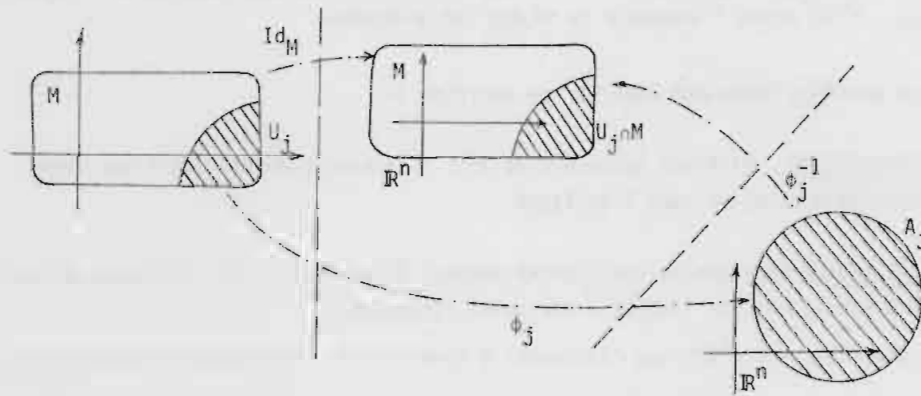
$$\phi_{ij}^* (\omega_i|_{A_{ij}}) = \phi_{ij}^* \circ ((\phi_i|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}}) = ((\phi_j|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}}) = \omega_j|_{A_{ji}} : \text{ on a}$$

bien défini une "nouvelle" forme sur M.

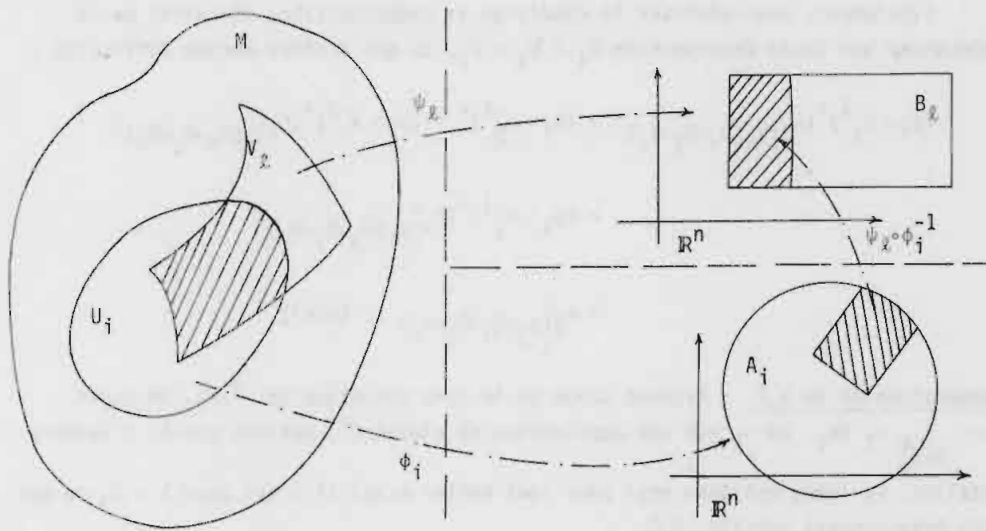


Réciproquement, la donnée d'une "nouvelle" forme comprend parmi les formes ω_i de 1.1 une "ancienne" forme ω sur M.

Enfin la condition de compatibilité de 1.1 appliquée à (M, Id_M, M) et toute (autre) carte (U_i, ϕ_i, A_i) montre que $(\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i}) = \omega_i$ et donc que les deux procédés sont inverses l'un de l'autre. \square



En fait nous allons voir que n'importe quel atlas, pourvu qu'il soit compatible avec l'atlas maximal définissant la structure différentiable de M , peut servir à définir une forme différentielle sur M : soit $\{(V_\ell, \psi_\ell, B_\ell)\}_{\ell \in L}$ un atlas compatible avec \mathcal{A} et, pour tout $\ell \in L$, une k -forme $\theta_\ell \in \Omega^k(B_\ell)$ telle que, pour tous $\ell, m \in L$, $\psi_m^*(\theta_m|_{B_{m\ell}}) = \theta_\ell|_{B_{\ell m}}$. Nous voulons montrer qu'il existe un k -forme ω sur M telle que "sur chaque V_ℓ la restriction de ω coïncide avec la forme induite à partir de θ_ℓ à travers ψ_ℓ " ce qui, au point où nous en sommes, ne peut signifier que ceci : pour tous $i \in I, \ell \in L, (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i \cap V_\ell)}) = \omega_i|_{\phi_i(U_i \cap V_\ell)}$ (notation légèrement abrégée...).



1.6. **THEOREME** : Une telle ω existe et est unique.

Démonstration : Il est clair que les restrictions aux ouverts $\phi_i(U_i \cap V_\ell)$ des "candidats" ω_i sont définies de manière unique par l'égalité précédente. De plus cette définition est cohérente puisque, sur les zones de chevauchement :

$$\begin{aligned}
 (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i \cap V_\ell \cap V_m)}) &= (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^* \circ (\psi_m \circ \psi_\ell^{-1})^*(\theta_m|_{\psi_m(U_i \cap V_\ell \cap V_m)}) \\
 &= (\psi_m \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_m|_{\psi_m(U_i \cap V_\ell \cap V_m)})
 \end{aligned}$$

Le lemme suivant fournit alors une unique forme ω_i sur chaque U_i :

1.7. LEMME : Soit A un ouvert de \mathbb{R}^n , $(W_s)_{s \in S}$ une famille d'ouverts de A qui recouvre A , et, pour tout $s \in S$, $\alpha_s \in \Omega^k(W_s)$ telle que, pour tous $s, t \in S$, $\alpha_s|_{W_s \cap W_t} = \alpha_t|_{W_s \cap W_t}$. Il existe alors une unique $\alpha \in \Omega^k(A)$ telle que, pour tout $s \in S$, $\alpha|_{W_s} = \alpha_s$.

(Démonstration ci-dessous).

Finalement, pour vérifier la condition de compatibilité, il suffit de la démontrer sur toute intersection $U_i \cap U_j \cap V_\ell$, ce qui n'offre aucune difficulté :

$$\begin{aligned} (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(\omega_i|_{\phi_i(U_i \cap U_j \cap V_\ell)}) &= (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* \circ (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_\ell|_{\psi_\ell(U_i \cap U_j \cap V_\ell)}) \\ &= (\psi_\ell \circ \phi_j^{-1})^*(\omega_\ell|_{\psi_\ell(U_i \cap U_j \cap V_\ell)}) \\ &= \omega_j|_{\phi_j(U_i \cap U_j \cap V_\ell)} \quad (\text{sic!}) \end{aligned}$$

Démonstration de 1.7. : Faisant usage de la base canonique de $\Omega^k(A)$, on écrit $\alpha = \sum_{I \in J_n^k} \alpha_I dx_I$, où α_I est une application de classe C^∞ , définie sur A , à valeurs réelles. Le lemme est donc vrai pour tout entier k ssi il l'est pour $k = 0$, ce qui est trivialement vérifié. $\square \square$

Autre résultat techniquement indispensable : la restriction des formes aux ouverts d'une variété.

Si V est un ouvert de la variété différentiable M (et donc lui-même une variété différentiable : cf. III.6.2), il est naturel, pour toute forme $\omega \in \Omega^k(M)$, de définir $\omega|_V$ comme suit : si $\phi_i : U_i \rightarrow A_i$ est une carte de M , soit $\psi_i = \phi_i|_{U_i \cap V} : U_i \cap V \rightarrow B_i$ la carte de V correspondante ; la donnée de ω comprend une forme $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$ qui se restreint en $\lambda_i = \omega_i|_{B_i} \in \Omega^k(B_i)$.

1.8. THEOREME : Les formes λ_i définissent une k -forme sur V , qu'on note $\omega|_V$.

Démonstration : Bien que l'atlas $\{(U_i \cap V, \psi_i, B_i)\}_{i \in I}$ ne soit a priori pas maximal pour V , le Théorème 1.6 réduit la démonstration à prouver que $(\psi_j \circ \psi_i^{-1})^*(\lambda_j|_{\psi_j(U_i \cap U_j \cap V)}) = \lambda_i|_{\psi_i(U_i \cap U_j \cap V)}$ ce qui est trivial. \square

De la même veine, les deux lemmes suivants sont donnés sans démonstration -le lecteur enthousiaste s'en chargera sans crainte :

1.9. LEMME : Si V et W sont des ouverts de la variété différentiable M tels que $W \subset V \subset M$, alors $(\omega|_V)|_W = \omega|_W$.

1.10. LEMME : Soit M une variété différentiable, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M et, pour tout $\alpha \in A$, $\omega_\alpha \in \Omega^k(V_\alpha)$ telle que $\omega_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \omega_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in A$. Il existe alors sur M une unique k -forme ω telle que, pour tout $\alpha \in A$, $\omega|_{V_\alpha} = \omega_\alpha$.

Pour ce qui est de la structure algébrique, il s'en traduit au moins une partie directement du Chapitre II :

1.11. THEOREME : L'ensemble $\Omega^k(M)$ des k -formes différentielles sur M est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel, et l'espace vectoriel $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(M)$, d'une structure d'algèbre graduée (en particulier, $\Omega^0(M)$ est un anneau et $\Omega^k(M)$ est un $\Omega^0(M)$ -module pour tout entier k).

De plus, pour tout k , $\Omega_C^k(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\Omega^k(M)$, et $\Omega_C^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_C^k(M)$ est un idéal (gradué) de $\Omega^*(M)$.

Démonstration : Une fois remarqué que, si $\alpha \in \Omega^k(M)$ est définie par la famille $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ où $\alpha_i \in \Omega^k(A_i)$, $\alpha' \in \Omega^k(M)$ par $\{\alpha'_i\}_{i \in I}$ où $\alpha'_i \in \Omega^k(A_i)$ et $\beta \in \Omega^l(M)$ par $\{\beta_i\}_{i \in I}$ où $\beta_i \in \Omega^l(A_i)$, alors $\alpha + \alpha'$ est définie par $\{\alpha_i + \alpha'_i\}_{i \in I}$ et $\alpha \wedge \beta$ par $\{\alpha_i \wedge \beta_i\}_{i \in I}$, les vérifications formelles sont sans surprise. \square

1.12. Exemple : en forme d'ouverture et aussi d'avertissement.

On regarde la sphère S^2 comme $\mathbb{C}P^1$ (cf. III.7.2). Elle est munie d'un atlas à deux cartes dont les ouverts sont homéomorphes à \mathbb{C} , avec pour changement de carte

l'application $\phi : z \mapsto \frac{1}{z}$.

Pour définir une forme sur S^2 , il faut donc définir deux formes α et β sur \mathbb{C} telles que $\beta = \phi^*(\alpha)$.

En fait on ne définit que α et on pose $\beta = \phi^*(\alpha)$, à condition que ce soit possible, toute α ne se prêtant pas à l'opération.

Pour le voir, et pour avoir des calculs faciles, nous nous autorisons une incursion parmi les formes à valeurs complexes, dont la théorie n'est pas développée dans ce livre. Ainsi une 1-forme sur \mathbb{C} pourra s'écrire $f dx + g dy$ en prenant pour f et g des fonctions complexes de la variable complexe $z = x + iy$.

Dans ces conditions, prendre

$$\alpha = \frac{dz}{1 + |z|^2},$$

écriture abrégée signifiant que $\alpha = f dx + g dy$ avec $f(x+iy) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ et

$g = if$, ne conviendrait pas puisqu'alors

$$\phi^*(\alpha) = \frac{-dz/z^2}{1 + \frac{1}{z\bar{z}}} = \frac{-\bar{z}}{z} \frac{dz}{z\bar{z} + 1} = \frac{-\bar{z}}{z} \alpha$$

n'est pas définie à l'origine : en effet $\frac{\bar{z}}{z} = 1 - 2i \frac{xy}{x^2 + y^2}$, et cette dernière fraction n'est même pas prolongeable par continuité à l'origine.

2. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE PAR UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE.

On utilise les cartes, toujours les cartes.

Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ entre variétés différentiables, d'atlas maximaux respectifs $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ et $\{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$; k un entier, $\omega \in \Omega^k(N)$. On peut extraire de l'atlas maximal de M un atlas $\{(U_\ell, \phi_\ell, A_\ell)\}_{\ell \in L}$ (où $L \subset I$) tel que pour tout $\ell \in L$, il existe un $j \in J$ avec $f(U_\ell) \subset V_j$ (cf. introduction à III.5.11). Pour tout couple (ℓ, j) de ce type, $\psi_j \circ f \circ \phi_\ell^{-1}$ est de classe C^∞ par définition, de sorte que la forme $\omega_j \in \Omega^k(B_j)$ - tirée de la définition de ω - induit

une forme $\theta_{\ell j} = (\psi_j \circ f \circ \phi_{\ell}^{-1})^* (\omega_j) \in \Omega^k(A_{\ell})$.

2.1. PROPOSITION : Ces formes $\theta_{\ell j}$ définissent une forme $\theta \in \Omega^k(M)$, qu'on notera $f^*(\omega)$.

Démonstration : Il faut vérifier

(i) que la définition a un sens, c'est-à-dire que s'il existe un $s \in J$, $s \neq j$, tel que $f(U_{\ell}) \subset V_s$, alors $\theta_{\ell s} = \theta_{\ell j}$, d'où une forme, notée θ_{ℓ} , sur chaque A_{ℓ} ;

(ii) la condition de "patchwork" : pour tous $\ell, t \in L$,
 $\theta_t|_{\phi_t(U_{\ell} \cap U_t)} = (\phi_{\ell} \circ \phi_t^{-1})^* (\theta_{\ell}|_{\phi_{\ell}(U_{\ell} \cap U_t)})$. Les deux égalités sont triviales. \square

De plus,

2.2. THEOREME : Si $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ sont des applications de classe C^{∞} entre variétés différentiables, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Démonstration : Confiée au lecteur. \square

2.3. REMARQUES : Maintenant -et maintenant seulement- nous pouvons dire qu'une k -forme définie comme en 1.1. vérifie la condition $\omega|_{U_i} = \phi_i^*(\omega_i)$ et que la phrase entre guillemets dans l'introduction à 1.6 signifie réellement : $\omega|_{V_{\ell}} = \psi_{\ell}^*(\theta_{\ell})$. Mais bien entendu ces assertions sont moins des vérités que des tautologies. (cf. III.7.7).

Peut-être le seul point qui vaille la peine d'être mentionné est-il que $\Omega^0(M)$ est bien l'anneau des fonctions de classe C^{∞} , définies sur M , à valeurs réelles.

Démonstration : Il est équivalent de définir une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ou une famille de fonctions $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, telles que $f_j|_{\phi_j(U_i \cap U_j)} = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* (f_i|_{\phi_i(U_i \cap U_j)})$

pour tous $i, j \in I$: la correspondance se fait par l'intermédiaire des égalités

$$f|_{U_i} = f_i \circ \phi_i, \quad i \in I.$$

La condition que f soit de classe C^{∞} s'exprime de toute façon à l'aide des f_i . \square

2.4. Notation : Si M est une variété différentiable et N une sous-variété, l'inclusion $i : N \rightarrow M$ est un plongement (III.5.20), donc de classe C^{∞} . Pour toute k -forme différentielle $\omega \in \Omega^k(M)$, on pose

$$\omega|_N = i^*(\omega).$$

3. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE, COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIÉTÉS.

Tout se fait ici encore carte par carte ; on vérifie seulement que les recolléments se font bien.

Soit M une variété différentiable de dimension n , $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ son atlas maximal, et $\omega \in \Omega^k(M)$ une k -forme définie par les formes $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$. On sait que pour tout $i \in I$, $d\omega_i \in \Omega^{k+1}(A_i)$.

3.1. THEOREME : Ce procédé définit une application linéaire $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$, de degré 1 et telle que

- (i) pour toutes $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$;
- (ii) $d \circ d = 0$.

Démonstration : Sur les ouverts de \mathbb{R}^n , il est vrai que, pour tous $i, j \in I$, $d\omega_j = d(\phi_{ij}^*(\omega_i)) = \phi_{ij}^*(d\omega_i)$ (cf. Chapitre II) ; la définition a donc un sens. Les propriétés formelles se vérifient sur chaque A_i . \square

On utilise alors la même terminologie que dans le cas des ouverts de \mathbb{R}^n :
 $Z^k(M) = \Omega^k(M) \cap \text{Ker } d$ est l'espace vectoriel des k -formes (sur M) fermées,
 $B^k(M) = \Omega^k(M) \cap \text{Im } d$ est l'espace vectoriel des k -formes exactes,
 $B^k(M)$ est, grâce à (ii), un sous-espace vectoriel de $Z^k(M)$, et

3.2. DEFINITION : Le $k^{\text{ème}}$ espace vectoriel de cohomologie de De Rham de la variété M est $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$. Ici encore, pour toute $\omega \in Z^k(M)$, on note $[\omega]$ sa classe dans $H^k(M)$; et $H^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^k(M)$.

Dans ce nouveau cadre aussi, les applications différentiables se comportent agréablement envers la cohomologie de De Rham :

3.3. THEOREME : Une application de classe C^∞ entre variétés différentiables $f : M \rightarrow N$ induit un morphisme d'ADG de degré 0

$$f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M) .$$

Si $g : N \rightarrow P$ est une autre application de classe C^∞ entre variétés,
 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Démonstration : En vérifiant sur les cartes. \square

3.4. COROLLAIRE : Une application de classe C^∞ entre variétés différentiables
 $f : M \rightarrow N$ induit une application linéaire de degré 0

$$f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M) .$$

(Toujours le même léger abus de notation, le risque de confusion entre le niveau Ω^*
 et le niveau H^* restant aussi minime).

... et l'on a aussi des homotopies (cf. Chapitre II §5).

3.5. THEOREME : Pour toute variété différentiable M , il existe un opérateur
d'homotopie de degré (-1)

$$K : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(M)$$

tel que $K \circ d + d \circ K = J_1^* - J_0^*$, où J_j désigne l'inclusion $x \mapsto (x, j) : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$
 $(j = 0, 1)$.

Démonstration : Si $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ est l'atlas maximal de M ,

$\{(U_i \times \mathbb{R}, \phi_i \times \text{Id}_{\mathbb{R}}, A_i \times \mathbb{R})\}_{i \in I}$ est un atlas de $M \times \mathbb{R}$. Une forme $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ est
 donnée par une famille de formes $\omega_i \in \Omega^k(A_i \times \mathbb{R})$ qu'on peut écrire
 $\omega_i = \omega_i' + \omega_i'' \wedge dt$, $\omega_i' \in \Omega^k(A_i)$, $\omega_i'' \in \Omega^{k-1}(A_i)$ (cf. II.5.3). Comme en II.5.8

on pose $K(\omega_i) = (-1)^{k-1} \int_0^1 (\omega_i'')_t dt$, et il n'y a plus qu'à vérifier que les morceaux
 se recollent bien, ce qui est trivial.

(Remarquer qu'il est raisonnable de noter dt la 1-forme définie sur $M \times \mathbb{R}$ en
 prenant dt sur chaque $A_i \times \mathbb{R}$. On aura alors, avec des notations évidentes,
 $\omega = \omega' + \omega'' \wedge dt$, $\omega' \in \Omega^k(M)$, $\omega'' \in \Omega^{k-1}(M)$, et $K(\omega) = (-1)^{k-1} \int_0^1 \omega''_t dt$). \square

3.6. DEFINITION : Deux applications de classe C^∞ entre deux variétés différentiables

$$f_0, f_1 : M \rightarrow N$$

sont dites (différentiablement) homotopes, ce qui se note $f_0 = f_1$, ssi il existe une application de classe C^∞ $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ telle que $f \circ J_j = f_j$ ($j = 0,1$) -c'est-à-dire que, pour tout $x \in M$, $f(x,0) = f_0(x)$ et $f(x,1) = f_1(x)$.

3.7. THEOREME : Si $f_0 = f_1$, alors $f_0^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ et $f_1^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ sont égales.

Démonstration : Semblable à celle de II.5.9, en utilisant 3.5. \square

3.8. REMARQUE TRES IMPORTANTE : Si l'on recopie 3.6 en supprimant les conditions de différentiabilité, on obtient la notion d'homotopie continue. Celle-ci peut évidemment s'appliquer à des fonctions f_0 et f_1 qui sont seulement continues.

On peut démontrer les résultats suivants, M et N étant toujours des variétés différentiables :

(i) Si $f : M \rightarrow N$ est continue, il existe une application de classe C^∞ $g : M \rightarrow N$ qui est continûment homotope à f .

(ii) Si $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sont des applications de classe C^∞ continûment homotopes alors $f_0 = f_1$ (elles sont différentiablement homotopes).

[Pour les démonstrations, voir [5] I.IV. 4.6 et I.IV.4.11 ; certes il n'y est explicitement question que de différentiabilité et non de classe C^∞ , mais on remarquera que les fonctions qui y sont construites, à commencer par l'ingrédient principal ξ (cf. notre λ de 5.10), sont bel et bien de classe C^∞ .]

De cela résulte non seulement qu'il suffit en cas de besoin d'exhiber des homotopies continues, mais surtout qu'à toute application continue $f : M \rightarrow N$ est associée une application linéaire $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$.

En effet, f étant donnée, on trouve grâce à (i) une application de classe C^∞ $g : M \rightarrow N$ qui lui soit continûment homotope. On pose $f^* = g^*$. Cette définition est cohérente puisque, si g_1 est une autre application de classe C^∞ continûment homotope à f , g et g_1 sont continûment homotopes, donc $g = g_1$ d'après (ii), d'où $g^* = g_1^*$.

4. COHOMOLOGIE A SUPPORTS COMPACTS.

Les définitions du Chapitre II §8 restent possibles dans le cadre des variétés différentiables :

étant donné une variété différentiable M , on note (cf. 1.4) :

$$Z_C^k(M) = \Omega_C^k(M) \cap Z^k(M),$$

$$B_C^k(M) = d(\Omega_C^{k-1}(M)),$$

$$H_C^k(M) = Z_C^k(M) / B_C^k(M),$$

$$H_C^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_C^k(M).$$

La Remarque II.8.3 reste vraie en général, à ceci près que, si M est compacte, $\Omega_C^*(M) = \Omega^*(M)$ et donc $H_C^*(M) = H^*(M)$: de là le rôle particulier qu'on verra que jouent par la suite les variétés compactes (cf. p. ex. VI §§3 et 4).

Le Théorème II.8.4 reste vrai, en remplaçant "espace vectoriel" par "variété différentiable", mais ne s'étend pas au plongement d'une sous-variété dans une variété (cf. III.5.20 et V.§4).

5. PARTITIONS DIFFÉRENTIABLES DE L'UNITÉ.

Il s'agit ici de forger un outil essentiel, dont les applications seront nombreuses et capitales.

Dans tout le paragraphe, M est une variété différentiable et $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ désigne son atlas maximal.

5.1. DEFINITION : Soit $\{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de M . Nous appellerons partition de l'unité (de classe C^∞) subordonnée au recouvrement $\{V_j\}$ une famille d'applications de classe C^∞ $\alpha_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in J$) telles que

(i) $\text{Supp } \alpha_j \subset V_j$ pour tout $j \in J$,

(ii) $\alpha_j(V_j) \subset [0, 1]$ pour tout $j \in J$,

(iii) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage X de x tel que $\alpha_j|_X = 0$ sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices,

(iv) pour tout $x \in M$, $\sum_{j \in J} \alpha_j(x) = 1$.

Noter que grâce à (iii) la somme figurant dans (iv) est en fait partout finie, et qu'en vertu de (i), (iii) est automatiquement vérifié si $\{V_j\}$ est localement fini.

Notre but est de prouver le

5.2. THEOREME : A tout recouvrement est subordonnée une partition de l'unité.

Démonstration : Les applications α_j vont être fabriquées à partir de restrictions des cartes convenablement retaillées. L'étape essentielle consiste à démontrer d'abord le théorème pour un recouvrement localement fini (Lemme VI). Auparavant on aura montré que tout recouvrement admet un recouvrement plus fin qui soit localement fini (Lemme V). Les premiers lemmes sont des préliminaires techniques.

Noter l'emploi répété de l'axiome du choix.

5.3. LEMME I : Etant donné $x \in M$ et V un voisinage de x , l'atlas maximal contient une carte (U_i, ϕ_i, A_i) telle que $x \in U_i \subset V$, $\phi_i(x) = 0$ et la boule fermée $\bar{B}(0,2) \subset A_i$.

Démonstration : Soit (U_j, ϕ_j, A_j) une carte quelconque telle que $x \in U_j$. La carte $(U_j \cap V, \phi_j|_{U_j \cap V}, \phi_j(U_j \cap V))$ est évidemment compatible et figure donc dans l'atlas maximal sous un certain indice k . Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(\phi_k(x), \varepsilon)$ soit contenue dans A_k . Les translations et multiplications par des scalaires étant de classe C^∞ , l'atlas maximal contient aussi une carte définie par $U_i = U_k$, $\phi_i(y) = \frac{2}{\varepsilon} (\phi_k(y) - \phi_k(x))$, $A_i = \phi_i(U_k)$ qui répond aux conditions de l'énoncé. \square

5.4. LEMME II : Il existe un recouvrement par des ouverts relativement compacts $\{W_k\}_{k \in K}$ plus fin que le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$. (On rappelle que "relativement compact" signifie que pour tout $k \in K$ l'adhérence \bar{W}_k de W_k est compacte et "plus fin", que pour tout $k \in K$ il existe un $i \in I$ tel que $W_k \subset U_i$).

Démonstration : Pour tout $x \in M$, on choisit $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et $\rho > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(\phi_i(x), \rho) \subset A_i$. On note $W_x = \phi_i^{-1}(\bar{B}(\phi_i(x), \rho))$ l'image réciproque de la boule ouverte et $F_x = \phi_i^{-1}(\bar{B}(\phi_i(x), \rho))$. Alors $W_x \subset F_x \subset U_i$; W_x est ouvert dans U_i , donc dans M ; F_x est un compact de U_i , donc de M ; a fortiori l'adhérence \bar{W}_x de W_x

dans M est compacte (en fait $\bar{W}_x = F_x$). Prendre $K = M$ pour ensemble d'indices. \square

5.5. COROLLAIRE : La topologie de M possède une base dénombrable relativement compacte $\{R_q\}_{q \in \mathbb{N}}$.

Démonstration : Soit $\{D_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de M (il en existe par définition : III.1.1.(ii)). On définit un sous-ensemble T de \mathbb{N} en prenant $t \in T$ ssi D_t est relativement compact : ainsi chaque W_x de 5.4. est réunion d'ouverts D_t dont les indices sont dans T , ce qui montre que $T \neq \emptyset$ et que $M = \bigcup_{t \in T} D_t$. On pose alors, pour $t \in T, p \in \mathbb{N}$, $E_{tp} = D_t \cap D_p$: chaque E_{tp} est relativement compact ; tout D_p - et donc tout ouvert de M - peut s'écrire comme réunion d'ouverts E_{tp} puisque $D_p = M \cap D_p = \bigcup_{t \in T} E_{tp}$; il existe une bijection $\chi : \mathbb{N} \rightarrow K \times \mathbb{N}$. Il suffit de définir $R_q = E_{\chi(q)}$. \square

5.6. LEMME III : Il existe une suite croissante de compacts de M :

$C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_r \subset C_{r+1} \subset \dots$ telle que :

(i) pour tout $r \in \mathbb{N}$ $C_r \subset \overset{\circ}{C}_{r+1}$,

(ii) $M = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} C_r$.

Une telle suite est dite exhaustive.

Démonstration : On part de la famille $\{R_q\}$ définie en 5.5.. On pose $C_0 = \bar{R}_0$: donc C_0 est compact. On choisit $s_1 \in \mathbb{N}$ tel que $C_0 \subset R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_{s_1}$ et $s_1 > 0$. (En général -c'est-à-dire à moins que R_0 ne se trouve être une composante connexe de M , ou une réunion finie de composantes connexes, auquel cas $C_0 = R_0$ - la condition " $s_1 > 0$ " est pléonastique). On pose $C_1 = \overline{R_0 \cup \dots \cup R_{s_1}}$. Alors C_1 est compact et $C_0 \subset \overset{\circ}{C}_1$. On choisit $s_2 \in \mathbb{N}$ tel que $C_1 \subset R_0 \cup \dots \cup R_{s_1} \cup \dots \cup R_{s_2}$ et $s_2 > s_1$ (remarque analogue). On pose $C_2 = \overline{R_0 \cup \dots \cup R_{s_2}}$, et ainsi de suite inductivement.

La précaution que la suite (s_r) soit strictement croissante sert à garantir que tous les ouverts R_q sont utilisés, de telle sorte que $\{C_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de M . \square

5.7. REMARQUE : Il peut se faire, lorsque M est compacte, qu'un nombre fini de compacts C_r suffise à couvrir M : dans ce cas, malgré la croissance de la suite (s_r) ,

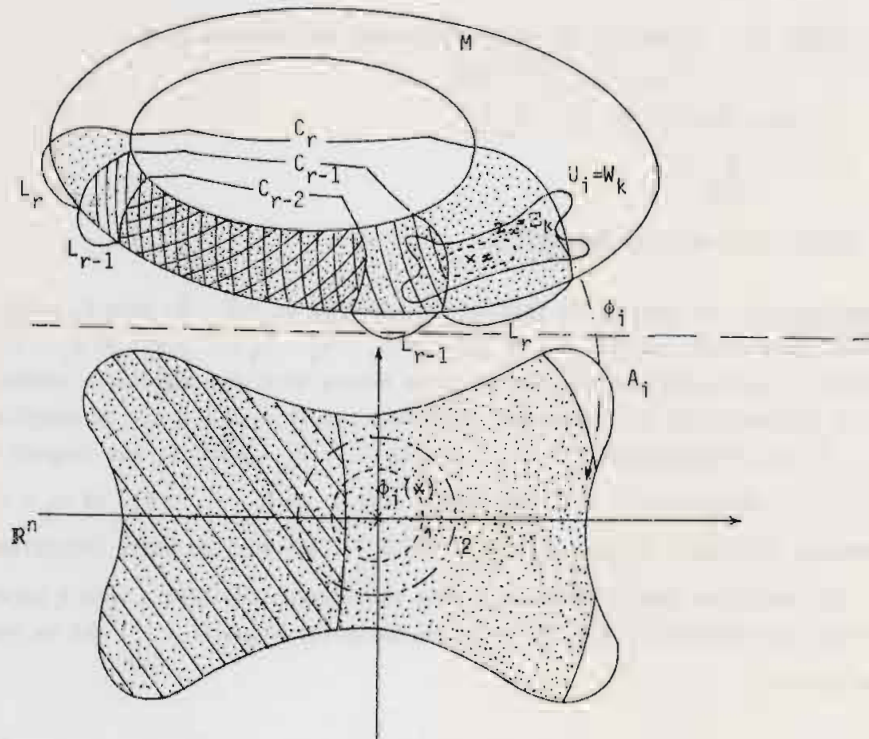
qui reste vraie, il existe un entier N tel que $C_{N+r} = C_N = M$ pour tout r ; mais on a aussi $C_{N+r} = \overset{\circ}{C}_{N+r+1} = M$.

5.8. LEMME IV : On peut choisir un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k \in K}$ plus fin que $\{U_i\}_{i \in I}$ et, pour tout $k \in K$, une application de classe C^∞

$\psi_k : W_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que

- (i) ψ_k soit la restriction à W_k d'une carte ϕ_i ,
- (ii) $\psi_k(W_k)$ contienne $\bar{B}(0,2)$,
- (iii) la famille $\{\Xi_k\}_{k \in K}$ où $\Xi_k = \psi_k^{-1}(\bar{B}(0,1))$ soit encore un recouvrement de M .

Démonstration : On part de la suite exhaustive de compacts $\{C_r\}$ fabriquée en 5.6, et on définit des compacts de M en posant $L_0 = C_0$ et $L_r = \overline{C_r \setminus C_{r-1}} = C_r \setminus \overset{\circ}{C}_{r-1}$ pour $r \geq 1$.



Si 5.7. s'applique, $L_r = \emptyset$ pour $r > N$, mais dans tous les cas $\{L_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ recouvre M : si $x \in M$, ou bien $x \in C_0 = L_0$, ou bien il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $x \in C_r \setminus C_{r-1}$.

Si $x \in L_r$, $M \setminus C_{r-2}$ est un voisinage ouvert de x (puisque $L_r = C_r \setminus \overset{\circ}{C}_{r-1} \subset C_r \setminus C_{r-2}$). En appliquant 5.3. avec $V = M \setminus C_{r-2}$ on obtient un $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$, $U_{i(x)} \cap C_{r-2} = \emptyset$, $\phi_{i(x)}(x) = 0$, $\overset{\circ}{B}(0,2) \subset A_{i(x)}$. On pose $Z_x = \phi_{i(x)}^{-1}(\overset{\circ}{B}(0,1))$: c'est encore un voisinage ouvert de x .

Pour tout r tel que $L_r \neq \emptyset$, on note $x(r,1), \dots, x(r,t_r)$ un nombre fini de points de L_r tels que $L_r \subset Z_{x(r,1)} \cup \dots \cup Z_{x(r,t_r)}$. Soit $K = \{(r,m) \in \mathbb{N}^2 \mid L_r \neq \emptyset, 1 \leq m \leq t_r\}$: cet ensemble est fini (dans le cas 5.7.) ou dénombrable. Dans tous les cas on pose, pour $k = (r,m)$, $\Xi_k = Z_{x(r,m)}$ et $W_k = U_{i(x(r,m))}$. On remarque -cela servira plus loin- que $W_k \cap C_s = \emptyset$ si $k = (r,m)$ avec $s \leq r-2$.

Enfin on pose $\psi_k = \phi_{i(x(k))}$, ce qui remplit les conditions (i) et (ii) et assure que $\Xi_k = \psi_k^{-1}(\overset{\circ}{B}(0,1))$. Il est clair que $\{\Xi_k\}_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert de M . Il en est de même a fortiori de $\{W_k\}$; celui-ci est par définition un recouvrement plus fin que $\{U_i\}$ (en fait c'est un sous-recouvrement). Si $x \in L_s$, $\overset{\circ}{C}_{s+1}$ est un voisinage de x qui ne peut intersecter W_k que si $k = (r,m)$ avec $r \leq s+2$, soit un nombre fini d'indices k : le recouvrement $\{W_k\}$ est donc localement fini (il est même fini dans le cas 5.7.). \square

5.9. LEMME V : Pour tout recouvrement ouvert $\{V_j\}_{j \in J}$ de M , on peut choisir un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k \in K}$ plus fin que $\{V_j\}$ et des applications ψ_k ayant les propriétés énoncées en 5.8.

Démonstration : Recopier la démonstration de 5.8. à un changement près : une fois $i(x)$ choisi, choisir $j(x) \in J$ tel que $x \in V_{j(x)}$ et substituer $U_{i(x)} \cap V_{j(x)}$ et/ou $\phi_{i(x)}|_{U_{i(x)} \cap V_{j(x)}}$ à $U_{i(x)}$ et/ou $\phi_{i(x)}$. Ces nouvelles cartes appartiennent à l'atlas maximal (cf. 5.3.) et conviendront aussi bien pour la démonstration. Il est évident qu'on obtiendra ainsi un recouvrement $\{W_k\}$ plus fin que le recouvrement $\{V_j\}$. \square

5.10. LEMME VI : Etant donné un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k \in K}$ de M et des applications $\psi_k : W_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés de 5.8., il est possible de construire une partition de l'unité subordonnée à $\{W_k\}$.

Démonstration : Soit $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ une application de classe C^∞ telle que $\lambda(u) = 1$ si $\|u\| \leq 1$ et $\lambda(u) = 0$ si $\|u\| \geq 2$:

par exemple on peut définir successivement

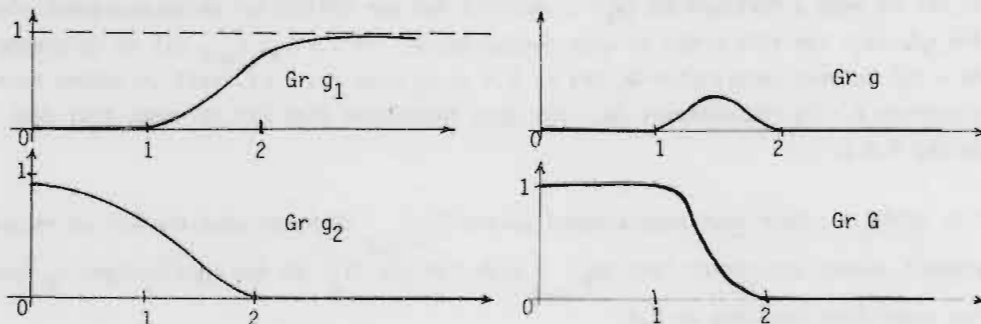
$$g_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \exp(-1/(t-1)^2) & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

$$g_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/(t-2)^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

$$g = g_1 g_2, \quad C = \int_0^\infty g(t) dt \in \mathbb{R}_+^*, \quad G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{C} \int_x^\infty g(t) dt$$

(toutes ces applications sont notoirement de classe C^∞) ; enfin

$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1] : u \mapsto G(\|u\|)$, qui est de classe C^∞ puisque constante sur un voisinage de 0 et composée de fonctions de classe C^∞ sur le complémentaire de 0.



Pour tout $k \in K$, soit $\sigma_k = \lambda \circ \psi_k : W_k \rightarrow [0,1]$: cette application est de classe C^∞ , $\sigma_k(\Xi_k) = \{1\}$, et $\text{Supp } \sigma_k \subset \psi_k^{-1}(\bar{B}(0,2)) \subset W_k$.

Si donc on définit, pour tout k , $\tau_k : M \rightarrow [0,1]$ par $\tau_k(x) = \begin{cases} \sigma_k(x) & \text{si } x \in W_k \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

on obtient une application de classe C^∞ sur M . Le recouvrement $\{W_k\}$ étant localement fini, tout $x \in M$ a un voisinage sur lequel la somme $\sum_{k \in K} \tau_k$ est finie ; donc on obtient une fonction τ de classe C^∞ en posant, pour tout $x \in M$, $\tau(x) = \sum_{k \in K} \tau_k(x)$.

Puisque $\{\Xi_k\}$ est un recouvrement de M , $\tau(x) \geq 1$ pour tout $x \in M$. On peut alors

poser, pour tous $k \in K$, $x \in M$, $\beta_k(x) = \frac{\tau_k(x)}{\tau(x)}$, d'où il résulte que :

pour tous $k \in K$, $x \in M$, $0 \leq \tau_k(x) \leq 1 \leq \tau(x)$ d'où $0 \leq \beta_k(x) \leq 1$; pour tout $k \in K$, β_k est de classe C^∞ et $\text{Supp } \beta_k = \text{Supp } \tau_k = \text{Supp } \sigma_k = W_k$; pour tout $x \in M$, $\sum_{k \in K} \beta_k(x) = \frac{1}{\tau(x)} \sum_{k \in K} \tau_k(x) = 1$. \square

Fin de la démonstration de 5.2. : Etant donné le recouvrement $\{V_j\}$, utiliser 5.9 pour obtenir le recouvrement localement fini $\{W_k\}$ plus fin que $\{V_j\}$ et les applications β_k ; ensuite 5.10 pour obtenir la partition de l'unité $\{\beta_k\}$ subordonnée à $\{W_k\}$. Il ne reste plus qu'à "recoller" les applications β_k à l'intérieur de chaque V_j .

Pour éviter de compter plusieurs fois le même β_k , on choisit pour tout $k \in K$ un $\gamma(k) \in J$ tel que $W_k \subset V_{\gamma(k)}$, ce qui définit une fonction $\gamma : K \rightarrow J$. Pour tout $j \in J$, on note $/j/ = \gamma^{-1}(\{j\})$. Si $/j/ = \emptyset$, on pose $\alpha_j = 0$; si $/j/ \neq \emptyset$, on pose $\alpha_j = \sum_{k \in /j/} \beta_k$. Dans le deuxième cas, tout $x \in M$ a un voisinage sur lequel la somme est finie : la définition a donc un sens, et α_j est de classe C^∞ .

Pour pouvoir vérifier la condition (i), il nous faut un dernier

5.11. LEMME : Pour tout sous-ensemble L de K , $\bigcup_{k \in L} \text{Supp } \beta_k$ est fermée.

Démonstration : Soit $x \notin \bigcup_{k \in L} \text{Supp } \beta_k$, X un voisinage de x et $k_1, \dots, k_p \in K$ tels que, pour tout $k \in K \setminus \{k_1, \dots, k_p\}$, $X \cap W_k = \emptyset$ et a fortiori $(\text{Supp } \beta_k) \cap X = \emptyset$.

Si $i = 1, \dots, p$, ou bien $k_i \in L$, auquel cas il existe encore un voisinage Y_i de x tel que $Y_i \cap \text{Supp } \beta_{k_i} = \emptyset$, ou bien $k_i \notin L$, auquel cas on pose $Y_i = X$.

Finalement $X \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_p$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas $\bigcup_{k \in L} \text{Supp } \beta_k$. \square

Alors :

(i) Si $j \in J$, $x \in M$ sont tels que $\alpha_j(x) \neq 0$, il existe un $k \in \gamma^{-1}(\{j\}) = /j/$ tel que $\beta_k(x) \neq 0$: ainsi $\alpha_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \bigcup_{k \in /j/} \text{Supp } \beta_k$, d'où, vu 5.11,

$\text{Supp } \alpha_j \subset \bigcup_{k \in /j/} \text{Supp } \beta_k$; a fortiori $\text{Supp } \alpha_j \subset \bigcup_{k \in /j/} W_k = V_j$.

(ii) Si $j \in J$, ou bien $\alpha_j = 0$, ou bien, pour tout $x \in M$, $0 \leq \alpha_j(x) \leq \sum_{k \in K} \beta_k(x) = 1$.

(iii) Pour tout $x \in M$, soit X un voisinage de x et $k_1, \dots, k_p \in K$ tels que, pour

tout $k \in K \setminus \{k_1, \dots, k_p\}$, $X \cap W_k = \emptyset$. Si $j \notin \{\gamma(k_1), \dots, \gamma(k_p)\}$, ou bien $/j/ = \emptyset$ et $\alpha_j = 0$, ou bien $X \cap \text{Supp } \alpha_j \subset X \cap \bigcup_{k \in /j/} W_k = \emptyset$; dans les deux cas, $\alpha_j(x) = 0$.

(iv) Soit $J' = \{j \in J \mid \gamma^{-1}(\{j\}) = /j/ \neq \emptyset\}$. Alors $\{/j/ \mid j \in J'\}$ est une partition (au sens ensembliste !...) de K et, pour tout $x \in M$:

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(x) = \sum_{j \in J'} \alpha_j(x) = \sum_{j \in J'} \left(\sum_{k \in /j/} \beta_k(x) \right) = \sum_{k \in K} \beta_k(x) = 1.$$

□

Les applications α_j sont définies sur M tout entier et leurs supports sont des fermés de M . La condition 5.1.(i), garantissant que, pour tout $j \in J$, $\text{Supp } \alpha_j \subset V_j$, possède ainsi l'intérêt essentiel d'"arrondir les angles" et permet de "globaliser" une donnée locale. Ce pouvoir repose sur le

5.12. LEMME : Soit V un ouvert d'une variété différentiable M , ω une k -forme différentielle sur V dont le support est fermé dans M : c'est le cas par exemple si $\text{Supp } \omega$ est compact.

Alors il existe une unique k -forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur M telle que

$$\tilde{\omega}|_V = \omega \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}|_{M \setminus V} = 0.$$

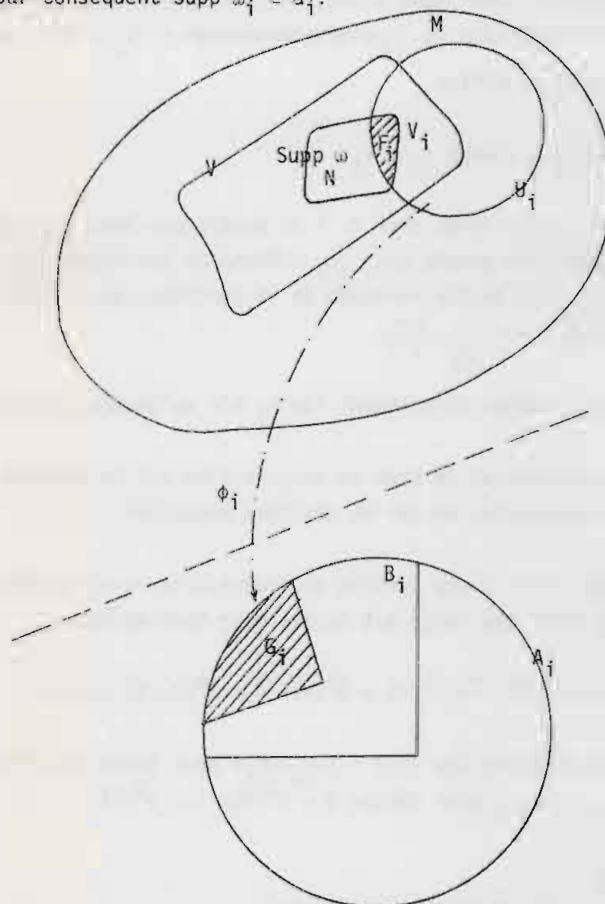
Démonstration : Dans le cas où M est un ouvert de \mathbb{R}^n , le résultat est classique, puisque ω est alors une application de classe C^∞ définie sur V à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas général, soit, pour $i \in I$, $V_i = V \cap U_i$, $B_i = \phi_i(V_i)$ et $\omega_i \in \Omega^k(B_i)$ la forme définissant localement ω . Soit N l'ensemble des $x \in M$ tels que $\omega(x) \neq 0$, N_i l'ensemble des $y \in B_i$ tels que $\omega_i(y) \neq 0$: par définition, $N_i = \phi_i(N \cap U_i)$ (cf. 1.3), $\text{Supp } \omega$ est l'adhérence de N dans V , et $\text{Supp } \omega_i$ est l'adhérence de N_i dans B_i .

Il suffit de montrer que $\text{Supp } \omega_i$ est fermé dans A_i : il existe alors, comme on vient de le remarquer, une k -forme différentielle $\tilde{\omega}_i \in \Omega^k(A_i)$ telle que $\tilde{\omega}_i|_{B_i} = \omega_i$ et $\tilde{\omega}_i|_{A_i \setminus B_i} = 0$, et vérifier que la famille $\{\tilde{\omega}_i\}_{i \in I}$ définit bien une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ telle qu'annoncée est sans difficulté.

Or l'hypothèse assure que $U_i \cap \text{Supp } \omega$ est un fermé F_i de U_i , donc $G_i = \phi_i(F_i)$ est un fermé de A_i . En fait $N_i \subset G_i \subset B_i$ puisque $N \cap U_i \subset F_i \subset V_i$, G_i est donc aussi

un fermé de B_i , et par conséquent $\text{Supp } \omega_i \subset G_i$.



Tout se réduit donc au

5.13. SOUS-LEMME : Soit X un espace topologique, Y un ouvert de X , F un fermé de X tel que $F \subset Y$, G un fermé de Y tel que $G \subset F$.

Alors G est fermé dans X .

Démonstration : Élémentaire. \square

Soit dans ces conditions $\{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement ouvert d'une variété

différentiable M et, pour tout $j \in J$, une k -forme différentielle $\omega_j \in \Omega^k(V_j)$. Si $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}$, alors pour tout $j \in J$ la forme $\alpha_j \omega_j \in \Omega^k(V_j)$ vérifie

$$\text{Supp } \alpha_j \omega_j \subset \text{Supp } \alpha_j \subset V_j$$

et, comme $\text{Supp } \alpha_j$ est fermé dans M , 5.13 montre que $\text{Supp } \alpha_j \omega_j$ est lui aussi fermé dans M . Le Lemme 5.12 prouve que $\alpha_j \omega_j$ s'étend en une forme $\widetilde{\alpha_j \omega_j} \in \Omega^k(M)$ qui coïncide avec $\alpha_j \omega_j$ sur V_j . La locale finitude de la partition de l'unité permet de définir la forme "globale" $\omega = \sum_{j \in J} \widetilde{\alpha_j \omega_j}$.

Par contre, sommer directement les ω_j n'a en général pas de sens.

Un autre exemple de ce type de construction est le résultat sur lequel nous terminons le paragraphe, et qui se révélera essentiel.

5.14. THEOREME : Soit M une variété différentiable, U et V deux ouverts de M tels que $M = U \cup V$. La suite que voici est exacte pour tout entier k :

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{f} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{g} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

où f et g sont définies par $f(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ pour toute $\omega \in \Omega^k(M)$, $g(\theta, \lambda) = \theta|_{U \cap V} - \lambda|_{U \cap V}$ pour toutes $\theta \in \Omega^k(U)$, $\lambda \in \Omega^k(V)$.

Démonstration :

- 1) Que f soit injective est trivial.
- 2) Que $g \circ f = 0$ est trivial. Que $\text{Ker } g \subset \text{Im } f$ n'est qu'un cas particulier de 1.10.
- 3) Soit $\{\alpha_U, \alpha_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$. Comme $\text{Supp } \alpha_V$ est fermé dans M , $U \cap \text{Supp } \alpha_V$ est fermé dans U .

Pour toute forme $\sigma \in \Omega^k(U \cap V)$, le support de la forme $\alpha_V \sigma \in \Omega^k(U \cap V)$ est un fermé de $U \cap V$ inclus dans $U \cap \text{Supp } \alpha_V$; alors 5.13 montre que $\text{Supp}(\alpha_V \sigma)$ est un fermé de U et 5.12 fournit une forme $\theta \in \Omega^k(U)$ telle que

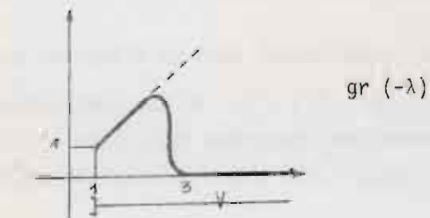
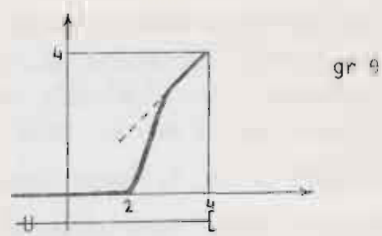
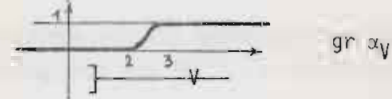
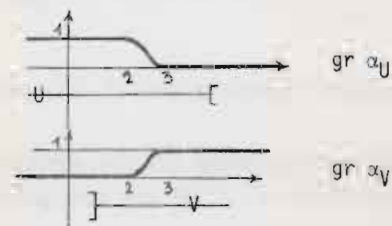
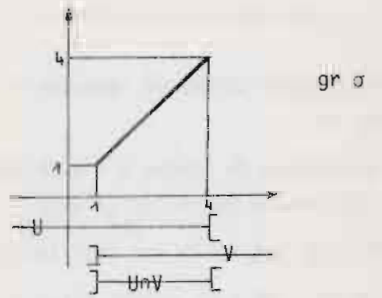
$$\theta|_{U \cap V} = \alpha_V \sigma \quad \text{et} \quad \theta|_{U \setminus V} = 0.$$

On construit de même une forme $\lambda \in \Omega^k(V)$ telle que $\lambda|_{U \cap V} = -\alpha_U \sigma$ et $\lambda|_{V \setminus U} = 0$.

Enfin $\theta|_{U \cap V} - \lambda|_{U \cap V} = (\alpha_V + \alpha_U)\sigma = \sigma$. \square

FIGURE : Avec $M = \mathbb{R}$, $U =]-\infty, 4[$, $V =]1, +\infty[$; $\alpha_U(x) = G(x-1)$ (cf. 5.10),

$\alpha_V = 1 - \alpha_U$; $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{R}}|_{]1,4[} \in \Omega^0(]1,4[)$:



6. EXEMPLES.

On rappelle la forme "angle" introduite en II.2.2. : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on note $\omega(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} (-y dx + x dy)$. Comme S^1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la restriction à S^1 de ω fournit une 1-forme différentielle $\omega|_{S^1} \in \Omega^1(S^1)$ (cf. 2.4).

6.1. THEOREME : La forme $\omega|_{S^1}$ est partout non nulle (cf. 1.3).

Démonstration : On peut prendre des cartes et remonter à la définition. Mais il va plus vite de procéder comme suit :

soit R une rotation quelconque de centre O : elle induit un difféomorphisme $R : S^1 \rightarrow S^1$ et on vérifie sans-peine que $R^*(\omega|_{S^1}) = \omega|_{S^1}$. Il en résulte que, si $\omega|_{S^1}$ est nulle en un point, elle est nulle sur tout le cercle. Or, si on note c l'application $t \mapsto (\cos t, \sin t) : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, alors $c^*(\omega|_{S^1}) = dt$, d'où la contradiction à supposer que $\omega|_{S^1} = 0$. \square

Cette propriété est assez importante (cf. VI.1.7) pour qu'on introduise la

6.2. DEFINITION : On appelle forme-volume sur une variété différentiable M de dimension n une n -forme différentielle $\omega \in \Omega^n(M)$ qui soit partout non-nulle sur M .

Avant d'étendre 6.1. aux sphères de toute dimension, et même à toute variété définie par des fonctions de classe C^∞ , on observe que, si on pose $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, la 2-forme $df \wedge \omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, n'est autre que $\frac{1}{x^2+y^2} (2x dx + 2y dy) \wedge (-y dx + x dy) = 2 dx \wedge dy$. (D'où l'on pourrait se laisser aller à conclure que, de ce point de vue, la "bonne" équation du cercle est $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2}$, ou encore que la "bonne" forme-volume est $\frac{1}{2} \omega \dots$).

La généralisation se fait alors dans la situation suivante :

soit V un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Soit $M = f^{-1}(\{0\})$. Pour tout ouvert W de \mathbb{R}^n inclus dans V , $M \cap W$ est une variété différentiable de dimension $(n-1)$.

6.3. LEMME : Si $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$ est telle que $df|_W \wedge \omega$ soit une forme-volume de W , alors $\omega|_{M \cap W}$ est une forme-volume de $M \cap W$.

Démonstration :

1°) On se place dans le cas particulier où $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$, c'est-à-dire que M est (un ouvert de) l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation $x_1 = 0$. On peut même supposer sans perte de généralité que $W = V$, ce qui simplifie les notations.

L'hypothèse s'écrit alors

$$dx_1 \wedge \omega = g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ partout non nulle. Il en résulte que

$$\omega = \lambda \wedge dx_1 + g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où $\lambda \in \Omega^{n-2}(V)$, et donc que

$$\omega|_M = \tilde{g} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où $\tilde{g}(x_2, \dots, x_n) = g(0, x_2, \dots, x_n)$, qui est clairement une forme-volume de l'hyperplan.

2°) Dans le cas général, on se ramène au cas précédent grâce aux cartes fournies par le théorème des fonctions implicites : si (U, ϕ, A) est une telle carte, A est un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} et on peut supposer sans perte de généralité que $U \subset W \cap M$ et que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U$.

Alors $\mathbb{R} \times A$ est un ouvert de \mathbb{R}^n , la fonction $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fournie par III.3.1. définit une application de classe C^∞

$$\psi : \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + \psi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n),$$

d'où, si $T = W \cap (\mathbb{R} \times A)$ et $Z = \psi^{-1}(T)$, des difféomorphismes réciproques

$$\psi : Z \rightarrow T : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + \psi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

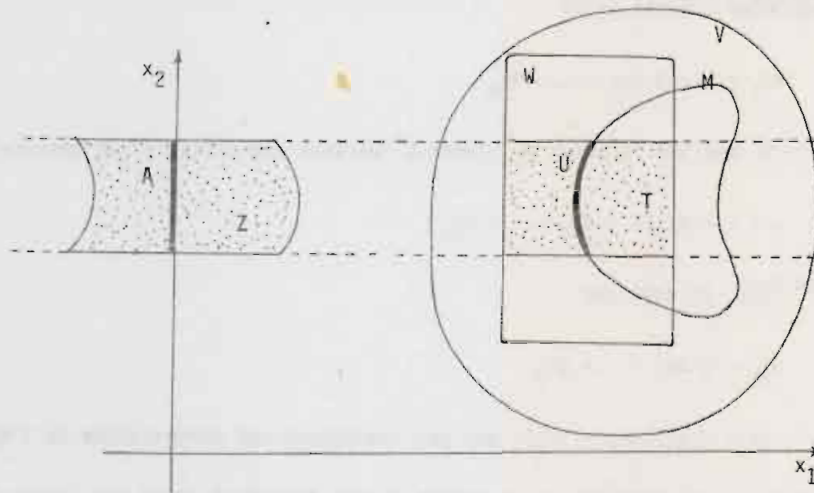
et

$$\phi : T \rightarrow Z : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - \psi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Il est clair que $\Phi(U) = A$; le calcul (se rappeler que, pour tout $i = 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_2, \dots, x_n) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)}$$

montre que $\Psi^*(df) = dx_1$ et, bien entendu, $\Psi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Par conséquent, d'après 1°), $\Psi^*(\omega)$ est une forme-volume sur A , et ω est une forme-volume sur U . □



On en tire immédiatement les

6.4. THEOREME : Si V est un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ et $M = f^{-1}(\{0\})$ la variété différentiable de dimension $(n-1)$ qui s'en déduit, la restriction à M de

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

(où, conformément à la tradition, le \wedge signifie que le terme ainsi chapeauté est omis) est une forme-volume sur M .

6.5. COROLLAIRE : La restriction à S^n de la forme

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

est une forme-volume sur S^n .

Démonstration de 6.4. : Du fait que

$$dx_i \wedge (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

il résulte que, sur V ,

$$df \wedge \omega = - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

qui est bien une forme-volume sur V , le théorème des fonctions implicites supposant précisément que le coefficient de $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ne s'y annule pas. Appliquer 6.3. \square

6.6. EXERCICE : Généraliser 6.3. au cas où M est la $(n-p)$ -sous-variété de \mathbb{R}^n dont les points sont solution des p équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

f_1, \dots, f_p étant des fonctions de classe C^∞ qui vérifient les hypothèses du théorème des fonctions implicites, et où ω est une $(n-p)$ -forme différentielle sur W telle que $df_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge \omega$ soit une forme-volume sur W .

6.7. EXERCICE : Utiliser l'isomorphisme $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) \cong \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$ de I.10.3. et l'isomorphisme de dualité $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \cong \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$, déduit du produit $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ pour construire une forme ω répondant aux conditions de 6.6.

Pour l'exemple "exotique" sur lequel nous terminons le paragraphe et le chapitre on reprend les définitions et notations de II.2.4.

La variété différentiable $\mathcal{G}(n; p)$ dont les éléments sont les projecteurs de \mathbb{R}^n orthogonaux et de trace p (qui est par définition difféomorphe à la Grassmannienne $G_p(\mathbb{R}^n)$: cf. III.4.16 et III.6.11) est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. III.7.3). La restriction à $\mathcal{G}(n; p)$ d'une forme différentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit donc une forme différentielle sur $\mathcal{G}(n; p)$.

Soit alors r un entier et $\omega_{2r} \in \mathcal{M}_n(\Omega^{2r}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$ la matrice $n \times n$ dont les

éléments sont des $2r$ -formes différentielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\omega_{2r} = M(dM)^{2r} = \underbrace{M \, dM \, dM \dots dM}_{2r \text{ fois}}.$$

Comme en II.2.4., on en déduit la forme $\text{Tr} \, \omega_{2r} \in \Omega^{2r}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

6.8. THEOREME : La restriction à $\mathcal{A}(n; p)$ de $\text{Tr} \, \omega_{2r}$ est une forme $\alpha_{2r} \in \Omega^{2r}(\mathcal{A}(n; p))$ fermée pour tout r .

Démonstration : On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{A}(n; p)$, la matrice $J = 2M - I_n$ vérifie $J^2 = 4M - 2M - 2M + I_n = I_n$. On observe aussi que, J étant de degré 0 et quel que soit le degré k de $\sigma \in \mathcal{M}_n(\Omega^k(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$,

$$(1) \quad \text{Tr}((J\sigma)J) = \text{Tr}(J(J\sigma)) = \text{Tr} \, \sigma.$$

Par ailleurs, de $M^2 = M$ on déduit que

$$\begin{aligned} [E] \quad & M \, dM + dM \, M = dM, \\ \text{d'où} \quad & 2M \, dM - dM = dM - 2 \, dM \, M \\ \text{et} \quad & J \, dM = -dM \, J. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De là } J(dM)^{2r+1} &= -(dM)^{2r+1} J, \text{ d'où } J(dM)^{2r+1} J = -(dM)^{2r+1} \text{ et} \\ \text{Tr}(J(dM)^{2r+1} J) &= -\text{Tr}((dM)^{2r+1}). \end{aligned}$$

Il résulte alors de (1), pris avec $\sigma = (dM)^{2r+1}$, que $\text{Tr}((dM)^{2r+1}) = 0$.

$$\text{Or } d(M(dM)^{2r}) = (dM)^{2r+1} \text{ et, comme Tr commute à } d, \text{ d'où } d\alpha_{2r} = \text{Tr}((dM)^{2r+1}) = 0. \quad \square$$

6.9. REMARQUE : La démonstration précédente est commode et les calculs qui s'y trouvent sont évidemment les mieux adaptés à la situation. Elle a pourtant le défaut, a priori rédhibitoire, de ne pas se référer, ou du moins pas de façon visible, à la définition 1.1 : en toute rigueur il aurait fallu prendre un atlas de $\mathcal{A}(n; p)$, déterminer pour toute carte (U, ϕ, A) de l'atlas la forme $\alpha_A \in \Omega^{2r}(A)$ qui définit α_{2r} , et vérifier que $d\alpha_A$ est nulle.

En fait il en est bien ainsi, et on peut s'en assurer en procédant grosso modo comme suit :

6.10. LEMME : Dans la situation du théorème des fonctions implicites (cf. III.6.8.) avec $p = 1$ et $f_1 = f$, la restriction à M de la forme $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ est nulle : $df|_M = 0 \in \Omega^1(M)$.

Démonstration : Soit (U, ϕ, A) une carte de M fournie par le théorème des fonctions implicites et supposons que, par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ reste non nulle sur U : alors ϕ est la projection $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ et ϕ^{-1} est de la forme $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1}))$ où ψ est de classe C^∞ . Pour toute k -forme $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, la restriction $\omega|_M$ est définie localement par $\alpha = (\phi^{-1})^* \omega \in \Omega^k(A)$.

Dans le cas où $\omega = df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{-\partial f / \partial x_j}{\partial f / \partial x_n} dx_j \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

6.11. COROLLAIRE : L'inclusion $\iota : M \subset \mathbb{R}^n$ induit un homomorphisme d'A.D.G.

$$\tilde{\iota}^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n)/Z \rightarrow \Omega^*(M)$$

où Z est l'idéal engendré par df et f .

6.12. EXERCICE : Enoncer et démontrer la généralisation de 6.11 au cas de III.6.8. avec p quelconque, puis au cadre du théorème du rang constant (cf. III.7.5).

Observer alors que la démonstration de 6.8 consiste à prouver que $d(\text{Tr } \omega_{2r})$ est nulle modulo Z (au détail d'écriture près qu'on garde la même lettre pour une forme et sa classe modulo Z , ou encore qu'on écrit des égalités au lieu de congruences : cf. [E]). La méthode est donc légitime et c'est elle qu'on a intérêt à suivre dans tous les cas analogues.

7. STRUCTURES MULTIPLICATIVES.

Pour toute variété différentiable M , le produit extérieur des formes différentielles munit (cf. 1.11) $\Omega^*(M)$ d'une structure d'algèbre différentielle graduée (ADG) commutative⁽¹⁾ et $\Omega_C^*(M)$ d'une structure d'idéal (gradué) de $\Omega^*(M)$. Soit, pour tous entiers i, j ,

$$\wedge^{ij} : \Omega^i(M) \times \Omega^j(M) \longrightarrow \Omega^{i+j}(M) : (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$$

les applications bilinéaires définissant la structure de $\Omega^*(M)$, qui se restreignent donc en

$$\wedge_C^{ij} : \Omega_C^i(M) \times \Omega_C^j(M) \longrightarrow \Omega_C^{i+j}(M) .$$

Les règles du calcul de la différentielle d'un produit extérieur de formes différentielles (3.1 (i)) garantissent que, pour tous entiers i, j ,

$$\wedge^{ij}(Z^i(M) \times Z^j(M)) \subset Z^{i+j}(M) ,$$

$$\wedge^{ij}(B^i(M) \times Z^j(M)) \subset B^{i+j}(M) ,$$

$$\wedge^{ij}(Z^i(M) \times B^j(M)) \subset B^{i+j}(M) ;$$

$$\wedge_C^{ij}(Z^i(M) \times Z_C^j(M)) \subset Z_C^{i+j}(M) ,$$

$$\wedge_C^{ij}(B^i(M) \times Z_C^j(M)) \subset B_C^{i+j}(M) ,$$

$$\wedge_C^{ij}(Z^i(M) \times B_C^j(M)) \subset B_C^{i+j}(M) .$$

⁽¹⁾nous utilisons désormais, comme il est d'usage dans le cas des algèbres graduées, ce mot pour désigner la condition avec signe dénommée anticommutativité en I.8.8 : $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est commutative ssi pour tous $a \in A_p, b \in A_q, ab = (-1)^{pq} ba$.

Celle-ci est en fait plus naturelle que la commutativité au sens strict (cf. I.8.12, V.3.lbis, etc...).

Tout idéal, tout module, toute application de degré 0 linéaire à gauche le sont aussi à droite (et réciproquement) de manière automatique.

De là, pour tous entiers i, j , les applications linéaires

$$\lambda^{ij} : H^i(M) \otimes H^j(M) \longrightarrow H^{i+j}(M)$$

et $\lambda_C^{ij} : H^i(M) \otimes H_C^j(M) \longrightarrow H_C^{i+j}(M)$.

Pour tous $a \in H^i(M)$, $b \in H^j(M)$, $\lambda^{ij}(a \otimes b)$ sera simplement noté $a \cdot b$ ou même ab ; autrement dit, pour toutes $\omega \in Z^i(M)$, $\sigma \in Z^j(M)$,

$$[\omega] \cdot [\sigma] = [\omega][\sigma] = [\omega \wedge \sigma] .$$

On garde la même notation si l'une et/ou l'autre forme est à support compact. (cf. 7.2).

Les propriétés formelles de ces applications linéaires sont résumées dans le

7.1. THEOREME : Pour toute variété différentiable M , le produit extérieur des formes différentielles munit $H^*(M)$ d'une structure d'algèbre graduée commutative (unitaire) et $H_C^*(M)$ d'une structure de $H^*(M)$ -module gradué.

Démonstration : Une quasi-évidence, simple affaire de vérification. \square

7.2. REMARQUE : En se restreignant des deux côtés aux formes à supports compacts, on obtient de même pour tous entiers i, j une application linéaire

$${}^C\lambda_C^{ij} : H_C^i(M) \otimes H_C^j(M) \longrightarrow H_C^{i+j}(M) .$$

Il en résulte pour $H_C^*(M)$ une structure d'algèbre graduée (sans unité) qui sert peu (mais cf. VI. 3.8 et 3.9).

Quant aux morphismes, si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe C^∞ entre variétés différentiables, il est clair sur la définition (cf. 2.1) que, pour tous entiers i, j et toutes $\omega \in \Omega^i(N)$, $\sigma \in \Omega^j(N)$, $f^*(\omega \wedge \sigma) = f^*\omega \wedge f^*\sigma$.

Il en résulte le

7.3. THEOREME : Pour toute application de classe C^∞ entre variétés différentiables $f : M \rightarrow N$ l'homomorphisme $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ défini en 3.4 est un homomorphisme d'algèbres graduées.

Démonstration : Appliquer les définitions (cf. 7.1, 3.3, 3.4) afin d'écrire, pour tous entiers i, j et toutes $\omega \in Z^i(N)$, $\sigma \in Z^j(N)$, la suite d'égalités

$$\begin{aligned} f^*([\omega][\sigma]) &= f^*([\omega \wedge \sigma]) = [f^*(\omega \wedge \sigma)] \\ &= [f^*\omega \wedge f^*\sigma] = [f^*\omega].[f^*\sigma] \\ &= f^*([\omega]).f^*([\sigma]) . \quad \square \end{aligned}$$

7.4. REMARQUE : On peut, grâce à 3.8, supposer seulement f continue.

La situation est plus délicate si la cohomologie à supports compacts intervient (cf. comme toujours II.8.3). Pour la décrire, on rappelle que, étant donné deux anneaux A, B et un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$, tout B -module Y devient un A -module sous l'action

$$A \otimes Y \rightarrow Y : a \otimes y \mapsto \phi(a) y .$$

De même, étant donné un A -module X et un B -module Y , des applications

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{et} \quad g : Y \rightarrow X$$

sont A -linéaires ssi pour tout $a \in A$, tout $x \in X$, $f(ax) = \phi(a) f(x)$ (resp. : pour tout $a \in A$, $y \in Y$, $g(\phi(a)y) = a g(y)$).

Cet état de choses apparaît ici dans (au moins) deux cas. D'abord si M est une variété différentiable et U un ouvert de M , l'inclusion $i : U \rightarrow M$ induit le morphisme $i_* : H_C^*(U) \rightarrow H_C^*(M)$ défini (cf. II.8.4 et ce chapitre §4 et 5.12) en étendant une forme par 0 dans le complémentaire à M de son support, d'où une application \mathbb{R} -linéaire $i_* : H_C^*(U) \rightarrow H_C^*(M)$. Par ailleurs $i^* : H^*(M) \rightarrow H^*(U)$ fait de $H_C^*(U)$, comme on vient de le voir et d'après 7.1, un $H^*(M)$ -module.

7.5. THEOREME : Cette application $i_* : H_C^*(U) \rightarrow H_C^*(M)$ est $H^*(M)$ -linéaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in H^i(M)$ et tout $y \in H_C^j(U)$,

$$i_*(i^*(x).y) = x.i_*(y) \in H_C^{i+j}(M) .$$

Démonstration : Soit $\xi \in Z^i(M)$ tel que $x = [\xi]$, $\eta \in Z_C^j(U)$ tel que $y = [\eta]$. Par définition, $x.i_*(y) = [\xi \wedge \tilde{\eta}]$, $i^*(x).y = [\xi|_U \wedge \eta]$ et $i_*(i^*(x).y) = [(\xi|_U \wedge \eta)]$, où $\tilde{}$ désigne l'extension d'une forme à M par 0 en-dehors de son support.

Or $\text{Supp}(\xi|_U \wedge \eta) \in \text{Supp } \eta$ est un compact de U ; $(\xi \wedge \tilde{\eta})|_{\text{Supp } \eta} = (\xi|_U \wedge \eta)|_{\text{Supp } \eta}$; en-dehors de $\text{Supp } \eta$ (donc de $\text{Supp}(\xi|_U \wedge \eta)$), $\xi \wedge \tilde{\eta} = \xi|_U \wedge \eta = 0$. \square

L'autre cas est celui où M, N sont deux variétés différentiables et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ propre (c'est-à-dire telle que pour tout compact K de N , $f^{-1}(K)$ soit un compact de M) : alors une application \mathbb{R} -linéaire $f_C^* : H_C^*(N) \rightarrow H_C^*(M)$ est définie. Par ailleurs on dispose toujours de l'homomorphisme d'algèbres $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$.

7.6. THEOREME : L'application $f_C^* : H_C^*(N) \rightarrow H_C^*(M)$ est $H^*(N)$ -linéaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in H^i(N)$ et tout $y \in H_C^j(N)$,

$$f_C^*(xy) = f^*(x) f_C^*(y) \in H_C^{i+j}(M).$$

Démonstration : Vérifications formelles analogues à tout ce qui précède. \square

7.7. REMARQUE : Le Théorème 7.6 s'applique en particulier au cas où f est un difféomorphisme, qui est toujours propre : f_C^* est alors un isomorphisme de $H^*(N)$ -modules. (Ne pas s'inquiéter de l'apparente dissymétrie : comme f^* est aussi un isomorphisme, les structures de $H^*(M)$ -module et $H^*(N)$ -module coïncident - cf. 7.8).

Mieux encore, l'adjectif "propre" (ou l'adverbe "proprement") peuvent être ajoutés partout dans les propositions 3.8 (c'est en fait sous cette forme qu'on les trouve énoncées et démontrées dans [5]) ce qui assure le

7.8. THEOREME : Si $f : M \rightarrow N$ est un homéomorphisme entre variétés différentiables, $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives et $f_C^* : H_C^*(N) \rightarrow H_C^*(M)$ est un isomorphisme de $H^*(N)$ - (ou $H^*(M)$ -) modules, c'est-à-dire qu'on a,

$$\text{en termes de } H^*(N)\text{-modules, pour tous } x \in H^i(N), y \in H_C^j(N), f_C^*(xy) = f^*(x)f_C^*(y)$$

$$\text{(en termes de } H^*(M)\text{-modules, pour tous } x' \in H^i(M), y \in H_C^j(N), f_C^*((f^{-1})^*(x') \cdot y) = x' \cdot f_C^*(y).$$

Démonstration : Soit $f : M \rightarrow N$ et $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ des homéomorphismes, donc des applications propres (si K est un compact de M et L un compact de N , $g^{-1}(L) = f(K)$)

et $f^{-1}(L) = g(L)$). La version "propre" de 3.8 donne alors deux applications de classe C^∞ , $\tilde{f} : M \rightarrow N$ et $\tilde{g} : M \rightarrow M$, qui sont propres et continûment homotopes à f et g respectivement : par définition $\tilde{f}^* = \tilde{f}^*$, $f_C^* = \tilde{f}_C^*$, $g^* = \tilde{g}^*$, $g_C^* = \tilde{g}_C^*$. Comme $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est proprement et continûment homotope à Id_M , elle est proprement et différentiablement homotope à Id_M , d'où $(\tilde{g} \circ \tilde{f})^* = \text{Id}_{H^*(M)}$ et $(\tilde{g} \circ \tilde{f})_C^* = \text{Id}_{H_C^*(M)}$. Ainsi $\tilde{f}^* \circ g^* = \text{Id}_{H^*(M)}$ et $\tilde{f}_C^* \circ g_C^* = \text{Id}_{H_C^*(M)}$. De la même manière, $g^* \circ \tilde{f}^* = \text{Id}_{H^*(N)}$ et $g_C^* \circ \tilde{f}_C^* = \text{Id}_{H_C^*(N)}$.

Les propriétés formelles se vérifient avec \tilde{f}^* et \tilde{g}^* : cf. 7.7. \square

7.9. REMARQUE : Aux produits "internes" définis dans ce paragraphe le Chapitre V va ajouter une notion "externe" : celle de cup-produit (V.3.2). On vérifiera sans peine que la liaison entre les deux est assurée,

dans un sens par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(M) \otimes H^j(M) & \xrightarrow{\lambda^{ij}} & H^{i+j}(M) \\
 \searrow \cup & & \uparrow \Delta^* \\
 & & H^{i+j}(M \times M)
 \end{array}$$

où $\Delta : M \rightarrow M \times M : x \mapsto (x, x)$ est la traditionnelle diagonale ;

dans l'autre sens, si $p : M \times N \rightarrow M$ et $q : M \times N \rightarrow N$ sont les projections, $x \in H^i(M)$, $y \in H^j(N)$, par la relation

$$x \cup y = (p^*x) \cdot (q^*y) \in H^{i+j}(M \times N).$$