CHAPITRE IV

COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

L'existence des cartes va permettre d'étendre aux variétés différentiables les concepts du Chapitre II : la philosophie générale est que les définitions se font "localement" sur les images dans $\mathbb{R}^n$ des ouverts de cartes, avec des conditions destinées à assurer que les morceaux "se recollent bien".

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE.

En fait, conformément à la "philosophie générale", ce n'est pas vraiment sur la variété que les formes différentielles sont définies, mais à travers les cartes :

1.1. DEFINITION : Soit M une variété différentiable définie par un atlas maximal

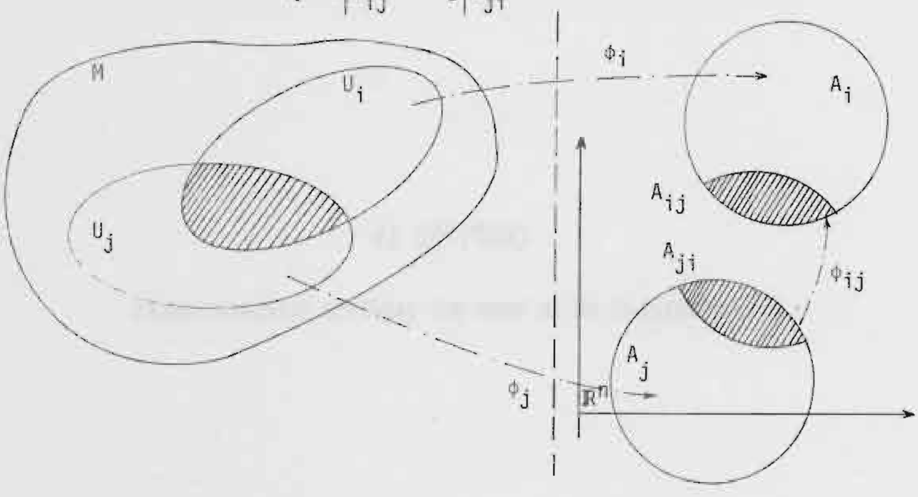
$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I} .$$

Pour alléger les notations, on pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $A_{ij} = \phi_i(U_{ij})$, $\phi_{ij} = \phi_i \circ (\phi_j^{-1}|_{A_{ji}})$.

Une k-forme différentielle sur M ($k \in \mathbb{N}$) consiste en la donnée d'une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ telle que

- pour tout $i \in I$, ω_i soit une k-forme sur A_i : $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$ (cf. II.1.2.)

- pour tous $i,j \in I$, $\phi_{ij}^*(\omega_i|_{A_{ij}}) = \omega_j|_{A_{ji}}$ (cf. II.3.1).



1.2. REMARQUE : Cette définition est naturelle, et l'usage confirme que c'est celle qui convient. En tout cas, imposer comme condition de compatibilité que, pour tous $i,j \in I$, $\omega_i \circ \phi_i|_{U_{ij}} = \omega_j \circ \phi_j|_{U_{ij}}$ aurait relevé d'un optimisme déraisonnable.

Il en résulte cependant que, dans le cadre de 1.1, ω ne définit plus d'application $M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$. Parler de la valeur de ω en un point réclame une construction assez complexe dont voici les grandes lignes :

- pour tout couple $i,j \in I$ tel que $U_{ij} \neq \emptyset$, on dispose d'une application $g_{ij} : U_{ij} \to GL(\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}))$ en notant $g_{ij}(x)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_K^*)_{K \in J_n^k}$ a pour éléments les nombres réels $X_{KL}(x) = D_L^K(\phi_{ij})(\phi_j(x))$; ainsi (cf. II.3.2) $g_{ij}(x).\omega_i(\phi_i(x)) = \phi_{ij}^*(\omega_i)(\phi_j(x)) = \omega_j(\phi_j(x))$, et, partout où cela a un sens

$$g_{ij}(x) \circ g_{j\ell}(x) = g_{i\ell}(x) .$$

Sur la réunion disjointe $R^k = \bigcup_{i \in I} (U_i \times \{i\} \times \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}))$ la relation définie par

$$(x,i,\xi) \sim (y,j,\eta) \quad \text{ssi} \quad x = y \quad \text{et} \quad \eta = g_{ij}(x).\xi$$

est une relation d'équivalence. Le quotient $Q^k = R^k/\sim$ est la source d'une surjection

$p : Q^k \to M$ induite par $(x,i,\xi) \mapsto x$.

Soit alors ω une k-forme sur M. Pour tout $x \in M$, la classe du triplet $(x,i,\omega_i(\phi_i(x)))$ modulo $\sim$ est un élément de Q^k qui ne dépend pas du choix de $i \in I$ tel que $x \in U_i$: on appelle $\omega(x)$ cette classe, d'où l'application $\omega : M \to Q^k$ telle que $p \circ \omega = Id_M$.

Nous ne développerons pas ce point de vue (construction des puissances extérieures du fibré cotangent), renvoyant le lecteur aux ouvrages qui traitent des fibrés ([9] en particulier).

Nous ferons seulement observer que les expressions "$\omega(x) = 0$" et "$\omega(x) \neq 0$", dont nous aurons besoin (cf. 5.12), peuvent se définir sans y faire référence grâce au

1.3. LEMME : Soit $x \in M$ et $i,j \in I$ tels que $x \in U_{ij}$. Alors $\omega_i(\phi_i(x)) = 0$ ssi $\omega_j(\phi_j(x)) = 0$.

Démonstration : On écrit $\omega_i = \sum_{K \in J_n^k} \omega_{iK}\, dx_K$ et $\omega_j = \sum_{L \in J_n^k} \omega_{jL}\, dx_L$, d'où $\omega_i(\phi_i(x)) = 0$ ssi pour tout $K \in J_n^k$, $\omega_{iK}(\phi_i(x)) = 0$. Or $\omega_{iK}(\phi_i(x)) = \omega_{iK} \circ \phi_{ij}(\phi_j(x))$, d'où le résultat puisque les ω_{jL} sont des combinaisons linéaires des $\omega_{iK} \circ \phi_{ij}$ (cf. II.3.2). □

1.4. REMARQUE : Du lemme résulte aussi que la notion de support d'une forme ω peut se définir de cette manière : c'est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in M$ où $\omega(x) \neq 0$. On le note toujours Supp ω.

On note $\Omega_c^k(M)$ l'ensemble des k-formes différentielles définies sur M à support compact, $\Omega^k(M)$ étant l'ensemble de toutes les k-formes.

La première tâche est bien sûr de vérifier la

1.5. PROPOSITION : Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la nouvelle définition d'une forme différentielle coïncide avec l'ancienne.

Démonstration : On rappelle que l'atlas maximal $\mathcal{A}$ qui définit la structure de variété sur M est induit par l'atlas à une carte $\{(M,Id_M,M)\}$.

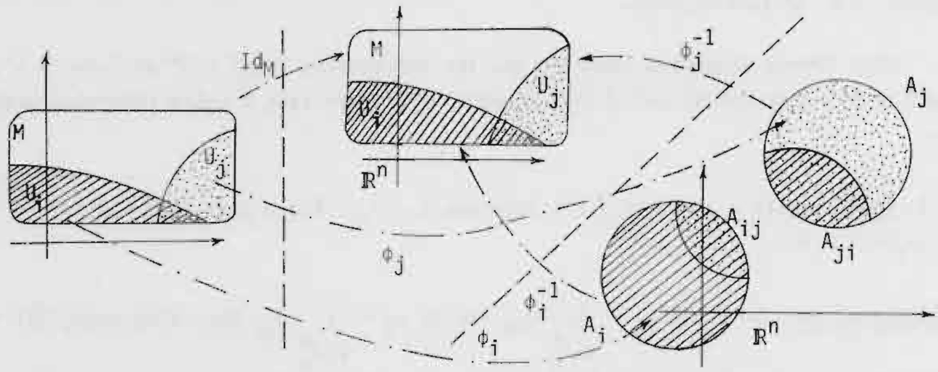
Soit alors $\omega \in \Omega^k(M)$ une "ancienne" k-forme sur M. Pour toute carte (U_i,ϕ_i,A_i)

de $\mathcal{A}$, on pose $\omega_i = (\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i})$. Il est clair qu'ainsi

$\omega_i|_{A_{ij}} = (\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i})|_{A_{ij}} = ((\phi_i|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}})$ et de même

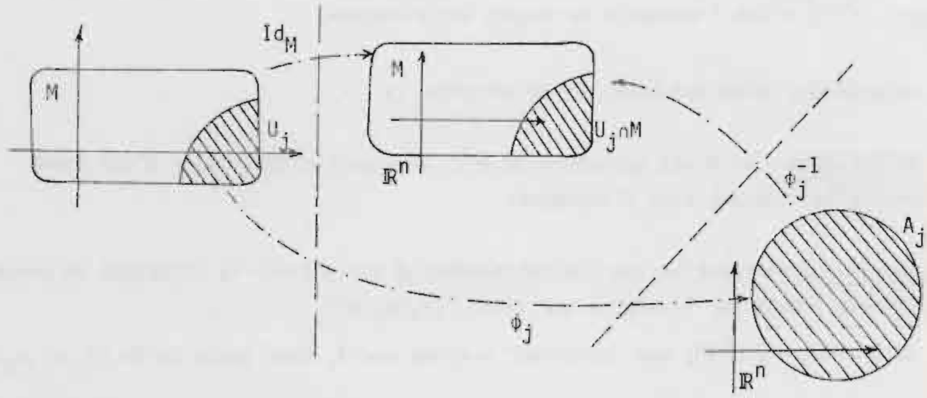
$\omega_j|_{A_{ji}} = ((\phi_j|_{U_{ij}})^{-1})^* (\omega|_{U_{ij}})$, de sorte que

$\phi_{ij}^*(\omega_i|_{A_{ij}}) = \phi_{ij}^* \circ ((\phi_i|_{U_{ij}})^{-1})^*(\omega|_{U_{ij}}) = ((\phi_j|_{U_{ij}})^{-1})^*(\omega|_{U_{ij}}) = \omega_j|_{A_{ji}}$: on a bien défini une "nouvelle" forme sur M.

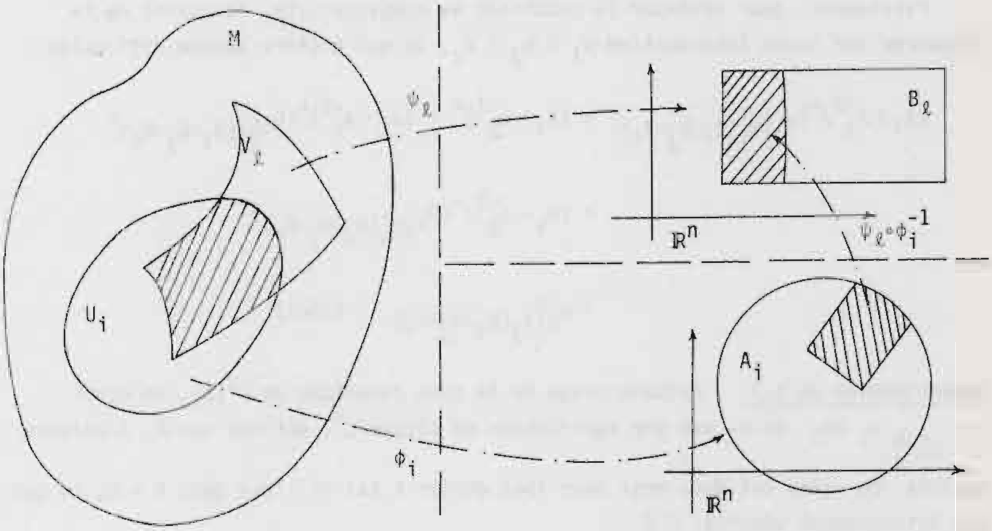


Réciproquement, la donnée d'une "nouvelle" forme comprend parmi les formes ω_i de 1.1 une "ancienne" forme ω sur M.

Enfin la condition de compatibilité de 1.1 appliquée à (M, Id_M, M) et toute (autre)carte (U_i, ϕ_i, A_i) montre que $(\phi_i^{-1})^* (\omega|_{U_i}) = \omega_i$ et donc que les deux procédés sont inverses l'un de l'autre. □



En fait nous allons voir que n'importe quel atlas, pourvu qu'il soit compatible avec l'atlas maximal définissant la structure différentiable de M, peut servir à définir une forme différentielle sur M : soit $\{(V_\ell,\psi_\ell,B_\ell)\}_{\ell\in L}$ un atlas compatible avec $\mathcal{A}$ et, pour tout $\ell \in L$, une k-forme $\theta_\ell \in \Omega^k(B_\ell)$ telle que, pour tous $\ell,m \in L$, $\psi^*_{m\ell}(\theta_m|_{B_{m\ell}}) = \theta_\ell|_{B_{\ell m}}$. Nous voulons montrer qu'il existe un k-forme ω sur M telle que "sur chaque V_ℓ la restriction de ω coïncide avec la forme induite à partir de θ_ℓ à travers ψ_ℓ" ce qui, au point où nous en sommes, ne peut signifier que ceci : pour tous $i \in I$, $\ell \in L$, $(\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^* (\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i\cap V_\ell)}) = \omega_i|_{\phi_i(U_i\cap V_\ell)}$ (notation légèrement abrégée...).



1.6. <u>THEOREME</u> : Une telle ω existe et est unique.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que les restrictions aux ouverts $\phi_i(U_i \cap V_\ell)$ des "candidates" ω_i sont définies de manière unique par l'égalité précédente. De plus cette définition est cohérente puisque, sur les zones de chevauchement :

$$(\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i\cap V_\ell\cap V_m)}) = (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^* \circ (\psi_m \circ \psi_\ell^{-1})^*(\theta_m|_{\psi_m(U_i\cap V_\ell\cap V_m)})$$

$$= (\psi_m \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_m|_{\psi_m(U_i\cap V_\ell\cap V_m)}) .$$

Le lemme suivant fournit alors une unique forme ω_i sur chaque U_i :

1.7. LEMME : Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(W_s)_{s\in S}$ une famille d'ouverts de A qui recouvre A, et, pour tout $s \in S$, $\alpha_s \in \Omega^k(W_s)$ telle que, pour tous $s,t \in S$, $\alpha_s|_{W_s\cap W_t} = \alpha_t|_{W_s\cap W_t}$. Il existe alors une unique $\alpha \in \Omega^k(A)$ telle que, pour tout $s \in S$, $\alpha|_{W_s} = \alpha_s$.

(Démonstration ci-dessous).

Finalement, pour vérifier la condition de compatibilité, il suffit de la démontrer sur toute intersection $U_i \cap U_j \cap V_\ell$, ce qui n'offre aucune difficulté :

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(\omega_i|_{\phi_i(U_i\cap U_j\cap V_\ell)}) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* \circ (\psi_\ell \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i\cap U_j\cap V_\ell)})$$

$$= (\psi_\ell \circ \phi_j^{-1})^*(\theta_\ell|_{\psi_\ell(U_i\cap U_j\cap V_\ell)})$$

$$= \omega_j|_{\phi_j(U_i\cap U_j\cap V_\ell)} \quad \text{(sic!)}$$

Démonstration de 1.7. : Faisant usage de la base canonique de $\Omega^k(A)$, on écrit $\alpha = \sum_{I\in J_n^k} \alpha_I \, dx_I$, où α_I est une application de classe C^∞, définie sur A, à valeurs réelles. Le lemme est donc vrai pour tout entier k ssi il l'est pour $k = 0$, ce qui est trivialement vérifié. □ □

Autre résultat techniquement indispensable : la restriction des formes aux ouverts d'une variété.

Si V est un ouvert de la variété différentiable M (et donc lui-même une variété différentiable : cf. III.6.2), il est naturel, pour toute forme $\omega \in \Omega^k(M)$, de définir $\omega|_V$ comme suit : si $\phi_i : U_i \to A_i$ est une carte de M, soit $\psi_i = \phi_i|_{U_i\cap V} : U_i \cap V \to B_i$ la carte de V correspondante ; la donnée de ω comprend une forme $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$ qui se restreint en $\lambda_i = \omega_i|_V \in \Omega^k(B_i)$.

1.8. THEOREME : Les formes λ_i définissent une k-forme sur V, qu'on note $\omega|_V$.

Démonstration : Bien que l'atlas $\{(U_i \cap V, \psi_i, B_i)\}_{i \in I}$ ne soit a priori pas maximal pour V, le Théorème 1.6 réduit la démonstration à prouver que $(\psi_j \circ \psi_i^{-1})^*(\lambda_j|_{\psi_j(U_i \cap U_j \cap V)}) = \lambda_i|_{\psi_i(U_i \cap U_j \cap V)}$ ce qui est trivial. □

De la même veine, les deux lemmes suivants sont donnés sans démonstration - le lecteur enthousiaste s'en chargera sans crainte :

1.9. LEMME : Si V et W sont des ouverts de la variété différentiable M tels que $W \subset V \subset M$, alors $(\omega|_V)|_W = \omega|_W$.

1.10. LEMME : Soit M une variété différentiable, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M et, pour tout $\alpha \in A$, $\omega_\alpha \in \Omega^k(V_\alpha)$ telle que $\omega_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \omega_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in A$. Il existe alors sur M une unique k-forme ω telle que, pour tout $\alpha \in A$, $\omega|_{V_\alpha} = \omega_\alpha$.

Pour ce qui est de la structure algébrique, il s'en traduit au moins une partie directement du Chapitre II :

1.11. THEOREME : L'ensemble $\Omega^k(M)$ des k-formes différentielles sur M est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'espace vectoriel $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(M)$, d'une structure d'algèbre graduée (en particulier, $\Omega^0(M)$ est un anneau et $\Omega^k(M)$ est un $\Omega^0(M)$-module pour tout entier k).

De plus, pour tout k, $\Omega_C^k(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\Omega^k(M)$, et $\Omega_C^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega_C^k(M)$ est un idéal (gradué) de $\Omega^*(M)$.

Démonstration : Une fois remarqué que, si $\alpha \in \Omega^k(M)$ est définie par la famille $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ où $\alpha_i \in \Omega^k(A_i)$, $\alpha' \in \Omega^k(M)$ par $\{\alpha'_i\}_{i \in I}$ où $\alpha'_i \in \Omega^k(A_i)$ et $\beta \in \Omega^\ell(M)$ par $\{\beta_i\}_{i \in I}$ où $\beta_i \in \Omega^\ell(A_i)$, alors $\alpha + \alpha'$ est définie par $\{\alpha_i + \alpha'_i\}_{i \in I}$ et $\alpha \wedge \beta$ par $\{\alpha_i \wedge \beta_i\}_{i \in I}$, les vérifications formelles sont sans surprise. □

1.12. Exemple : en forme d'ouverture et aussi d'avertissement.

On regarde la sphère S^2 comme $\mathbb{C}P^1$ (cf. III.7.2). Elle est munie d'un atlas à deux cartes dont les ouverts sont homéomorphes à $\mathbb{C}$, avec pour changement de carte l'application $\phi : z \mapsto \frac{1}{z}$.

Pour définir une forme sur S^2, il faut donc définir deux formes α et β sur $\mathbb{C}$ telles que $\beta = \phi^*(\alpha)$.

En fait on ne définit que α et on pose $\beta = \phi^*(\alpha)$, à condition que ce soit possible, toute α ne se prêtant pas à l'opération.

Pour le voir, et pour avoir des calculs faciles, nous nous autorisons une incursion parmi les formes à valeurs complexes, dont la théorie n'est pas développée dans ce livre. Ainsi une 1-forme sur $\mathbb{C}$ pourra s'écrire f dx + g dy en prenant pour f et g des fonctions complexes de la variable complexe $z = x + iy$.

Dans ces conditions, prendre

$$\alpha = \frac{dz}{1 + |z|^2} ,$$

écriture abrégée signifiant que $\alpha = f\,dx + g\,dy$ avec $f(x+iy) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ et $g = if$, ne conviendrait pas puisqu'alors

$$\phi^*(\alpha) = \frac{-\,dz/z^2}{1 + \frac{1}{z\bar{z}}} = \frac{-\bar{z}}{z}\,\frac{dz}{z\bar{z} + 1} = \frac{-\bar{z}}{z}\,\alpha$$

n'est pas définie à l'origine : en effet $\frac{\bar{z}}{z} = 1 - 2i\,\frac{xy}{x^2 + y^2}$, et cette dernière fraction n'est même pas prolongeable par continuité à l'origine.

2. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE PAR UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE.

On utilise les cartes, toujours les cartes.

Soit $f : M \to N$ une application de classe C^∞ entre variétés différentiables, d'atlas maximaux respectifs $\{(U_i,\phi_i,A_i)\}_{i\in I}$ et $\{(V_j,\psi_j,B_j)\}_{j\in J}$; k un entier, $\omega \in \Omega^k(N)$. On peut extraire de l'atlas maximal de M un atlas $\{(U_\ell,\phi_\ell,A_\ell)\}_{\ell\in L}$ (où $L \subset I$) tel que pour tout $\ell \in L$, il existe un $j \in J$ avec $f(U_\ell) \subset V_j$ (cf. introduction à III.5.11). Pour tout couple (ℓ,j) de ce type, $\psi_j \circ f \circ \phi_\ell^{-1}$ est de classe C^∞ par définition, de sorte que la forme $\omega_j \in \Omega^k(B_j)$ -tirée de la définition de ω- induit une forme $\theta_{\ell j} = (\phi_j \circ f \circ \phi_\ell^{-1})^* \ (\omega_j) \in \Omega^k(A_\ell)$.

2.1. PROPOSITION : Ces formes $\theta_{\ell j}$ définissent une forme $\theta \in \Omega^k(M)$, qu'on notera $f^*(\omega)$.

Démonstration : Il faut vérifier

(i) que la définition a un sens, c'est-à-dire que s'il existe un $s \in J$, $s \neq j$, tel que $f(U_\ell) \subset V_s$, alors $\theta_{\ell s} = \theta_{\ell j}$, d'où une forme, notée θ_ℓ, sur chaque A_ℓ ;

(ii) la condition de "patchwork" : pour tous $\ell, t \in L$,
$\theta_t\big|_{\phi_t(U_\ell \cap U_t)} = (\phi_\ell \circ \phi_t^{-1})^*(\theta_\ell\big|_{\phi_\ell(U_\ell \cap U_t)})$. Les deux égalités sont triviales. □

De plus,

2.2. THEOREME : Si $f : M \to N$, $g : N \to P$ sont des applications de classe C^∞ entre variétés différentiables, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Démonstration : Confiée au lecteur. □

2.3. REMARQUES : Maintenant -et maintenant seulement- nous pouvons dire qu'une k-forme définie comme en 1.1. vérifie la condition $\omega\big|_{U_i} = \phi_i^*(\omega_i)$ et que la phrase entre guillemets dans l'introduction à 1.6 signifie réellement : $\omega\big|_{V_\ell} = \psi_\ell^*(\theta_\ell)$. Mais bien entendu ces assertions sont moins des vérités que des tautologies. (cf. III.7.7).

Peut-être le seul point qui vaille la peine d'être mentionné est-il que $\Omega^0(M)$ est bien l'anneau des fonctions de classe C^∞, définies sur M, à valeurs réelles.

Démonstration : Il est équivalent de définir une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ ou une famille de fonctions $f_i : A_i \to \mathbb{R}$, $i \in I$, telles que $f_j\big|_{\phi_j(U_i \cap U_j)} = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*(f_i\big|_{\phi_i(U_i \cap U_j)})$ pour tous $i, j \in I$: la correspondance se fait par l'intermédiaire des égalités $f\big|_{U_i} = f_i \circ \phi_i$, $i \in I$.

La condition que f soit de classe C^∞ s'exprime de toute façon à l'aide des f_i. □

2.4. Notation : Si M est une variété différentiable et N une sous-variété, l'inclusion $\iota : N \to M$ est un plongement (III.5.20), donc de classe C^∞. Pour toute k-forme différentielle $\omega \in \Omega^k(M)$, on pose

$$\omega\big|_N = \iota^*(\omega) .$$

3. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE. COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIÉTÉS.

Tout se fait ici encore carte par carte ; on vérifie seulement que les recollements se font bien.

Soit M une variété différentiable de dimension n, $\{(U_i,\phi_i,A_i)\}_{i\in I}$ son atlas maximal, et $\omega \in \Omega^k(M)$ une k-forme définie par les formes $\omega_i \in \Omega^k(A_i)$. On sait que pour tout $i \in I$, $d\omega_i \in \Omega^{k+1}(A_i)$.

3.1. <u>THEOREME</u> : Ce procédé définit une application linéaire $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, de degré 1 et telle que

(i) pour toutes $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$, $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$;

(ii) $d \circ d = 0$.

<u>Démonstration</u> : Sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, il est vrai que, pour tous $i,j \in I$, $d\omega_j = d(\phi_{ij}^*(\omega_i)) = \phi_{ij}^*(d\omega_i)$ (cf. Chapitre II) ; la définition a donc un sens. Les propriétés formelles se vérifient sur chaque A_i. □

On utilise alors la même terminologie que dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$:
$Z^k(M) = \Omega^k(M) \cap \operatorname{Ker} d$ est l'espace vectoriel des k-formes (sur M) <u>fermées</u>,
$B^k(M) = \Omega^k(M) \cap \operatorname{Im} d$ est l'espace vectoriel des k-formes <u>exactes</u>,
$B^k(M)$ est, grâce à (ii), un sous-espace vectoriel de $Z^k(M)$, et

3.2. <u>DEFINITION</u> : Le $k^{\underline{\text{ème}}}$ espace vectoriel de <u>cohomologie de De Rham</u> de la variété M est $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$. Ici encore, pour toute $\omega \in Z^k(M)$, on note $[\omega]$ sa classe dans $H^k(M)$; et $H^*(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^k(M)$.

Dans ce nouveau cadre aussi, les applications différentiables se comportent agréablement envers la cohomologie de De Rham :

3.3. <u>THEOREME</u> : Une application de classe C^∞ entre variétés différentiables $f : M \to N$ induit un morphisme d'ADG de degré 0

$$f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M) .$$

Si $g : N \to P$ est une autre application de classe C^∞ entre variétés, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Démonstration : En vérifiant sur les cartes. □

3.4. COROLLAIRE : Une application de classe C^∞ entre variétés différentiables $f : M \to N$ induit une application linéaire de degré 0

$$f^* : H^*(N) \to H^*(M) .$$

(Toujours le même léger abus de notation, le risque de confusion entre le niveau Ω^* et le niveau H^* restant aussi minime).

... et l'on a aussi des homotopies (cf. Chapitre II §5).

3.5. THEOREME : Pour toute variété différentiable M, il existe un opérateur d'homotopie de degré (-1)

$$K : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^*(M)$$

tel que $K \circ d + d \circ K = j_1^* - j_0^*$, où j_j désigne l'inclusion $x \mapsto (x,j) : M \to M \times \mathbb{R}$ $(j = 0,1)$.

Démonstration : Si $\{(U_i,\phi_i,A_i)\}_{i\in I}$ est l'atlas maximal de M, $\{(U_i \times \mathbb{R}, \phi_i \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, A_i \times \mathbb{R})\}_{i\in I}$ est un atlas de $M \times \mathbb{R}$. Une forme $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ est donnée par une famille de formes $\omega_i \in \Omega^k(A_i \times \mathbb{R})$ qu'on peut écrire $\omega_i = \omega_i' + \omega_i'' \wedge dt$, $\omega_i' \in \Omega P^k(A_i)$, $\omega_i'' \in \Omega P^{k-1}(A_i)$ (cf. II.5.3). Comme en II.5.8 on pose $K(\omega_i) = (-1)^{k-1} \int_0^1 (\omega_i'')_t \, dt$, et il n'y a plus qu'à vérifier que les morceaux se recollent bien, ce qui est trivial.

(Remarquer qu'il est raisonnable de noter dt la 1-forme définie sur $M \times \mathbb{R}$ en prenant dt sur chaque $A_i \times \mathbb{R}$. On aura alors, avec des notations évidentes, $\omega = \omega' + \omega'' \wedge dt$, $\omega' \in \Omega P^k(M)$, $\omega'' \in \Omega P^{k-1}(M)$, et $K(\omega) = (-1)^{k-1} \int_0^1 \omega_t'' \, dt$). □

3.6. DEFINITION : Deux applications de classe C^∞ entre deux variétés différentiables

$$f_0, f_1 : M \to N$$

sont dites (<u>différentiablement) homotopes</u>, ce qui se note $f_0 \simeq f_1$, ssi il existe une application de classe C^∞ $f : M \times \mathbb{R} \to N$ telle que $f \circ J_j = f_j$ $(j = 0,1)$ -c'est-à-dire que, pour tout $x \in M$, $f(x,0) = f_0(x)$ et $f(x,1) = f_1(x)$.

3.7. <u>THEOREME</u> : Si $f_0 \simeq f_1$, alors $f_0^* : H^*(N) \to H^*(M)$ et $f_1^* : H^*(N) \to H^*(M)$ sont égales.

<u>Démonstration</u> : Semblable à celle de II.5.9, en utilisant 3.5. □

3.8. <u>REMARQUE TRES IMPORTANTE</u> : Si l'on recopie 3.6 en supprimant les conditions de différentiabilité, on obtient la notion d'<u>homotopie continue</u>. Celle-ci peut évidemment s'appliquer à des fonctions f_0 et f_1 qui sont seulement continues.

On peut démontrer les résultats suivants, M et N étant toujours des variétés différentiables :

(i) Si $f : M \to N$ est continue, il existe une application de <u>classe C^∞</u> $g : M \to N$ qui est continûment homotope à f.

(ii) Si $f_0, f_1 : M \to N$ sont des applications de classe C^∞ continûment homotopes alors $f_0 \simeq f_1$ (elles sont <u>différentiablement</u> homotopes).

[Pour les démonstrations, voir [5] I.IV. 4.6 et I.IV.4.11 ; certes il n'y est explicitement question que de différentiabilité et non de classe C^∞, mais on remarquera que les fonctions qui y sont construites, à commencer par l'ingrédient principal ξ (cf. notre λ de 5.10), sont bel et bien de classe C^∞.]

De cela résulte non seulement qu'il suffit en cas de besoin d'exhiber des homotopies continues, mais surtout qu'à toute application <u>continue</u> $f : M \to N$ est associée une application linéaire $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$.

En effet, f étant donnée, on trouve grâce à (i) une application de classe C^∞ $g : M \to N$ qui lui soit continûment homotope. On pose $f^* = g^*$. Cette définition est cohérente puisque, si g_1 est une autre application de classe C^∞ continûment homotope à f, g et g_1 sont continûment homotopes, donc $g \simeq g_1$ d'après (ii), d'où $g^* = g_1^*$.

4. COHOMOLOGIE A SUPPORTS COMPACTS.

Les définitions du Chapitre II §8 restent possibles dans le cadre des variétés différentiables :

étant donné une variété différentiable M, on note (cf. 1.4) :

$$Z_C^k(M) = \Omega_C^k(M) \cap Z^k(M),$$

$$B_C^k(M) = d(\Omega_C^{k-1}(M)),$$

$$H_C^k(M) = Z_C^k(M)/B_C^k(M),$$

$$H_C^*(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_C^k(M) .$$

La Remarque II.8.3 reste vraie en général, à ceci près que, si M est compacte, $\Omega_C^*(M) = \Omega^*(M)$ et donc $H_C^*(M) = H^*(M)$: de là le rôle particulier qu'on verra que jouent par la suite les variétés compactes (cf.p. ex. VI §§3 et 4).

Le Théorème II.8.4 reste vrai, en remplaçant "espace vectoriel" par "variété différentiable", mais ne s'étend pas au plongement d'une sous-variété dans une variété (cf. III.5.20 et V.§4).

5. PARTITIONS DIFFÉRENTIABLES DE L'UNITÉ.

Il s'agit ici de forger un outil essentiel, dont les applications seront nombreuses et capitales.

Dans tout le paragraphe, M est une variété différentiable et $\{(U_i,\phi_i,A_i)\}_{i\in I}$ désigne son atlas maximal.

5.1. DEFINITION : Soit $\{V_j\}_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de M. Nous appellerons partition de l'unité (de classe C^∞) subordonnée au recouvrement $\{V_j\}$ une famille d'applications de classe C^∞ $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ $(j \in J)$ telles que

(i) Supp $\alpha_j \subset V_j$ pour tout $j \in J$,

(ii) $\alpha_j(V_j) \subset [0,1]$ pour tout $j \in J$,

(iii) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage X de x tel que $\alpha_j|_X = 0$ sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices,

(iv) pour tout $x \in M$, $\sum_{j \in J} \alpha_j(x) = 1$.

Noter que grâce à (iii) la somme figurant dans (iv) est en fait partout finie, et qu'en vertu de (i), (iii) est automatiquement vérifié si $\{V_j\}$ est localement fini.

Notre but est de prouver le

5.2. THEOREME : A tout recouvrement est subordonnée une partition de l'unité.

Démonstration : Les applications α_j vont être fabriquées à partir de restrictions des cartes convenablement retaillées. L'étape essentielle consiste à démontrer d'abord le théorème pour un recouvrement localement fini (Lemme VI). Auparavant on aura montré que tout recouvrement admet un recouvrement plus fin qui soit localement fini (Lemme V). Les premiers lemmes sont des préliminaires techniques.

Noter l'emploi répété de l'axiome du choix.

5.3. LEMME I : Etant donné $x \in M$ et V un voisinage de x, l'atlas maximal contient une carte (U_i, ϕ_i, A_i) telle que $x \in U_i \subset V$, $\phi_i(x) = 0$ et la boule fermée $\bar{B}(0,2) \subset A_i$.

Démonstration : Soit (U_j, ϕ_j, A_j) une carte quelconque telle que $x \in U_j$. La carte $(U_j \cap V, \phi_j|_{U_j \cap V}, \phi_j(U_j \cap V))$ est évidemment compatible et figure donc dans l'atlas maximal sous un certain indice k. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(\phi_k(x), \varepsilon)$ soit contenue dans A_k. Les translations et multiplications par des scalaires étant de classe C^∞, l'atlas maximal contient aussi une carte définie par $U_i = U_k$, $\phi_i(y) = \frac{2}{\varepsilon}(\phi_k(y) - \phi_k(x))$, $A_i = \phi_i(U_i)$ qui répond aux conditions de l'énoncé. □

5.4. LEMME II : Il existe un recouvrement par des ouverts relativement compacts $\{W_k\}_{k \in K}$ plus fin que le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$. (On rappelle que "relativement compact" signifie que pour tout $k \in K$ l'adhérence $\bar{W}_k$ de W_k est compacte et "plus fin", que pour tout $k \in K$ il existe un $i \in I$ tel que $W_k \subset U_i$).

Démonstration : Pour tout $x \in M$, on choisit $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et $\rho > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(\phi_i(x), \rho) \subset A_i$. On note $W_x = \phi_i^{-1}(\mathring{B}(\phi_i(x), \rho))$ l'image réciproque de la boule ouverte et $F_x = \phi_i^{-1}(\bar{B}(\phi_i(x), \rho))$. Alors $W_x \subset F_x \subset U_i$; W_x est ouvert dans U_i, donc dans M ; F_x est un compact de U_i, donc de M ; a fortiori l'adhérence $\bar{W}_x$ de W_x

dans M est compacte (en fait $\bar{W}_x = F_x$). Prendre K = M pour ensemble d'indices. □

5.5. COROLLAIRE : La topologie de M possède une base dénombrable relativement compacte $\{R_q\}_{q \in \mathbb{N}}$.

Démonstration : Soit $\{D_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de M (il en existe par définition : III.1.1.(ii)). On définit un sous-ensemble T de $\mathbb{N}$ en prenant $t \in T$ ssi D_t est relativement compact : ainsi chaque W_x de 5.4. est réunion d'ouverts D_t dont les indices sont dans T, ce qui montre que $T \neq \emptyset$ et que $M = \bigcup_{t \in T} D_t$. On pose alors, pour $t \in T$, $p \in \mathbb{N}$, $E_{tp} = D_t \cap D_p$: chaque E_{tp} est relativement compact ; tout D_p -et donc tout ouvert de M- peut s'écrire comme réunion d'ouverts E_{tp} puisque $D_p = M \cap D_p = \bigcup_{t \in T} E_{tp}$; il existe une bijection $\chi : \mathbb{N} \to K \times \mathbb{N}$. Il suffit de définir $R_q = E_{\chi(q)}$. □

5.6. LEMME III : Il existe une suite croissante de compacts de M :
$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_r \subset C_{r+1} \subset \ldots$ telle que :

(i) pour tout $r \in \mathbb{N}$ $C_r \subset \overset{\circ}{C}_{r+1}$,

(ii) $M = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} C_r$.

Une telle suite est dite exhaustive.

Démonstration : On part de la famille $\{R_q\}$ définie en 5.5.. On pose $C_0 = \bar{R}_0$: donc C_0 est compact. On choisit $s_1 \in \mathbb{N}$ tel que $C_0 \subset R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_{s_1}$ et $s_1 > 0$. (En général -c'est-à-dire à moins que R_0 ne se trouve être une composante connexe de M, ou une réunion finie de composantes connexes, auquel cas $C_0 = R_0$- la condition "$s_1 > 0$" est pléonastique). On pose $C_1 = \overline{R_0 \cup \ldots \cup R_{s_1}}$. Alors C_1 est compact et et $C_0 \subset \overset{\circ}{C}_1$. On choisit $s_2 \in \mathbb{N}$ tel que $C_1 \subset R_0 \cup \ldots \cup R_{s_1} \cup \ldots \cup R_{s_2}$ et $s_2 > s_1$ (remarque analogue). On pose $C_2 = \overline{R_0 \cup \ldots \cup R_{s_2}}$, et ainsi de suite inductivement.

La précaution que la suite (s_r) soit strictement croissante sert à garantir que tous les ouverts R_q sont utilisés, de telle sorte que $\{C_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de M. □

5.7. REMARQUE : Il peut se faire, lorsque M est compacte, qu'un nombre fini de compacts C_r suffise à couvrir M : dans ce cas, malgré la croissance de la suite (s_r), qui reste vraie, il existe un entier N tel que $C_{N+r} = C_N = M$ pour tout r ; mais on a aussi $C_{N+r} = \mathring{C}_{N+r+1} = M$.

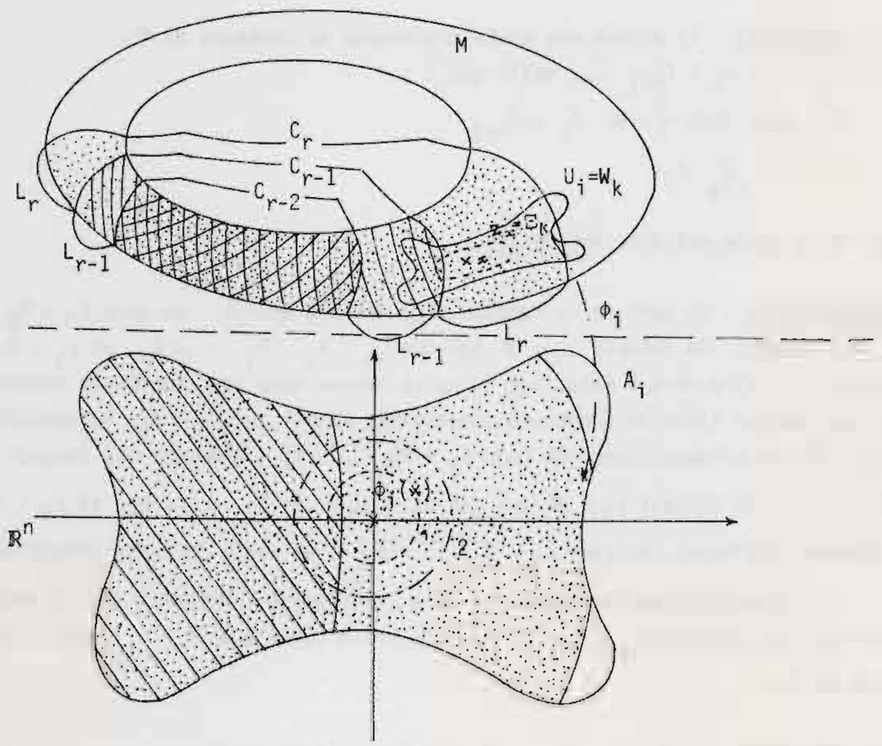
5.8. <u>LEMME IV</u> : On peut choisir un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k\in K}$ plus fin que $\{U_i\}_{i\in I}$ et, pour tout $k \in K$, une application de classe C^∞ $\psi_k : W_k \to \mathbb{R}^n$ tels que

(i) ψ_k soit la restriction à W_k d'une carte ϕ_i,

(ii) $\psi_k(W_k)$ contienne $\bar{B}(0,2)$,

(iii) la famille $\{\Xi_k\}_{k\in K}$ où $\Xi_k = \psi_k^{-1}(\mathring{B}(0,1))$ soit encore un recouvrement de M.

<u>Démonstration</u> : On part de la suite exhaustive de compacts $\{C_r\}$ fabriquée en 5.6, et on définit des compacts de M en posant $L_0 = C_0$ et $L_r = \overline{C_r \setminus C_{r-1}} = C_r \setminus \mathring{C}_{r-1}$ pour $r \geq 1$.



Si 5.7. s'applique, $L_r = \emptyset$ pour $r > N$, mais dans tous les cas $\{L_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ recouvre M : si $x \in M$, ou bien $x \in C_0 = L_0$, ou bien il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $x \in C_r \backslash C_{r-1}$.

Si $x \in L_r$, $M \backslash C_{r-2}$ est un voisinage ouvert de x (puisque $L_r = C_r \backslash \mathring{C}_{r-1} \subset C_r \backslash C_{r-2}$). En appliquant 5.3. avec $V = M \backslash C_{r-2}$ on obtient un $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$, $U_{i(x)} \cap C_{r-2} = \emptyset$, $\phi_{i(x)}(x) = 0$, $\bar{B}(0,2) \subset A_{i(x)}$. On pose $Z_x = \phi^{-1}_{i(x)}(\mathring{B}(0,1))$: c'est encore un voisinage ouvert de x.

Pour tout r tel que $L_r \neq \emptyset$, on note $x(r,1),\ldots,x(r,t_r)$ un nombre fini de points de L_r tels que $L_r \subset Z_{x(r,1)} \cup \ldots \cup Z_{x(r,t_r)}$. Soit $K = \{(r,m) \in \mathbb{N}^2 \mid L_r \neq \emptyset,\ 1 \leq m \leq t_r\}$: cet ensemble est fini (dans le cas 5.7.) ou dénombrable. Dans tous les cas on pose, pour $k = (r,m)$, $\Xi_k = Z_{x(r,m)}$ et $W_k = U_{i(x(r,m))}$. On remarque -cela servira plus loin- que $W_k \cap C_s = \emptyset$ si $k = (r,m)$ avec $s \leq r-2$.

Enfin on pose $\psi_k = \phi_{i(x(k))}$, ce qui remplit les conditions (i) et (ii) et assure que $\Xi_k = \psi_k^{-1}(\mathring{B}(0,1))$. Il est clair que $\{\Xi_k\}_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert de M. Il en est de même a fortiori de $\{W_k\}$; celui-ci est par définition un recouvrement plus fin que $\{U_i\}$ (en fait c'est un sous-recouvrement). Si $x \in L_s$, $\mathring{C}_{s+1}$ est un voisinage de x qui ne peut intersecter W_k que si $k = (r,m)$ avec $r \leq s+2$, soit un nombre fini d'indices k : le recouvrement $\{W_k\}$ est donc localement fini (il est même fini dans le cas 5.7.). □

5.9. <u>LEMME V</u> : Pour <u>tout</u> recouvrement ouvert $\{V_j\}_{j \in J}$ de M, on peut choisir un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k \in K}$ plus fin que $\{V_j\}$ et des applications ψ_k ayant les propriétés énoncées en 5.8.

<u>Démonstration</u> : Recopier la démonstration de 5.8. à un changement près : une fois $i(x)$ choisi, choisir $j(x) \in J$ tel que $x \in V_{j(x)}$ et substituer $U_{i(x)} \cap V_{j(x)}$ et/ou $\phi_{i(x)}\big|_{U_{i(x)} \cap V_{j(x)}}$ à $U_{i(x)}$ et/ou $\phi_{i(x)}$. Ces nouvelles cartes appartiennent à l'atlas maximal (cf. 5.3.) et conviendront aussi bien pour la démonstration. Il est évident qu'on obtiendra ainsi un recouvrement $\{W_k\}$ plus fin que le recouvrement $\{V_j\}$. □

5.10. <u>LEMME VI</u> : Etant donné un recouvrement ouvert localement fini $\{W_k\}_{k \in K}$ de M et des applications $\psi_k : W_k \to \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés de 5.8., il est possible de construire une partition de l'unité subordonnée à $\{W_k\}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\lambda : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ une application de classe C^∞ telle que $\lambda(u) = 1$ si $\|u\| \leq 1$ et $\lambda(u) = 0$ si $\|u\| \geq 2$:

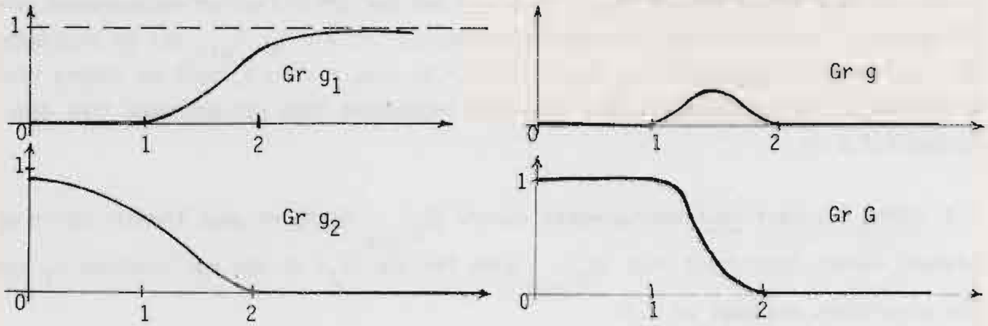
par exemple on peut définir successivement

$$g_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \exp(-1/(t-1)^2) & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

$$g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/(t-2)^2) & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

$$g = g_1 g_2,\ C = \int_0^\infty g(t)\,dt \in \mathbb{R}_+^*,\ \ G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{C}\int_x^\infty g(t)\,dt$$

(toutes ces applications sont notoirement de classe C^∞) ; enfin $\lambda : \mathbb{R}^n \to [0,1] : u \mapsto G(\|u\|)$, qui est de classe C^∞ puisque constante sur un voisinage de 0 et composée de fonctions de classe C^∞ sur le complémentaire de 0.



Pour tout $k \in K$, soit $\sigma_k = \lambda \circ \psi_k : W_k \to [0,1]$: cette application est de classe C^∞, $\sigma_k(\Xi_k) = \{1\}$, et Supp $\sigma_k \subset \psi_k^{-1}(\bar{B}(0,2)) \subset W_k$.

Si donc on définit, pour tout k, $\tau_k : M \to [0,1]$ par $\tau_k(x) = \begin{cases} \sigma_k(x) & \text{si } x \in W_k \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

on obtient une application de classe C^∞ sur M. Le recouvrement $\{W_k\}$ étant localement fini, tout $x \in M$ a un voisinage sur lequel la somme $\sum_{k \in K} \tau_k$ est finie ; donc on obtient une fonction τ de classe C^∞ en posant, pour tout $x \in M$, $\tau(x) = \sum_{k \in K} \tau_k(x)$.

Puisque $\{\Xi_k\}$ est un recouvrement de M, $\tau(x) \geq 1$ pour tout $x \in M$. On peut alors poser, pour tous $k \in K$, $x \in M$, $\beta_k(x) = \frac{\tau_k(x)}{\tau(x)}$, d'où il résulte que :

pour tous $k \in K$, $x \in M$, $0 \leq \tau_k(x) \leq 1 \leq \tau(x)$ d'où $0 \leq \beta_k(x) \leq 1$; pour tout $k \in K$, β_k est de classe C^∞ et $\mathrm{Supp}\,\beta_k = \mathrm{Supp}\,\tau_k = \mathrm{Supp}\,\sigma_k \subset W_k$; pour tout $x \in M$, $\sum_{k \in K} \beta_k(x) = \frac{1}{\tau(x)} \sum_{k \in K} \tau_k(x) = 1$. □

<u>Fin de la démonstration de 5.2.</u> : Etant donné le recouvrement $\{V_j\}$, utiliser 5.9 pour obtenir le recouvrement localement fini $\{W_k\}$ plus fin que $\{V_j\}$ et les applications ψ_k ; ensuite 5.10 pour obtenir la partition de l'unité $\{\beta_k\}$ subordonnée à $\{W_k\}$. Il ne reste plus qu'à "recoller" les applications β_k à l'intérieur de chaque V_j.

Pour éviter de compter plusieurs fois le même β_k, on choisit pour tout $k \in K$ un $\gamma(k) \in J$ tel que $W_k \subset V_{\gamma(k)}$, ce qui définit une fonction $\gamma : K \to J$. Pour tout $j \in J$, on note $/j/ = \gamma^{-1}(\{j\})$. Si $/j/ = \emptyset$, on pose $\alpha_j = 0$; si $/j/ \neq \emptyset$, on pose $\alpha_j = \sum_{k \in /j/} \beta_k$. Dans le deuxième cas, tout $x \in M$ a un voisinage sur lequel la somme est finie : la définition a donc un sens, et α_j est de classe C^∞.

Pour pouvoir vérifier la condition (i), il nous faut un dernier

5.11. <u>LEMME</u> : Pour tout sous-ensemble L de K, $\bigcup_{k \in L} \mathrm{Supp}\,\beta_k$ est fermée.

<u>Démonstration</u> : Soit $x \notin \bigcup_{k \in L} \mathrm{Supp}\,\beta_k$, X un voisinage de x et $k_1, \ldots, k_p \in K$ tels que, pour tout $k \in K \setminus \{k_1, \ldots, k_p\}$, $X \cap W_k = \emptyset$ et a fortiori $(\mathrm{Supp}\,\beta_k) \cap X = \emptyset$.

Si $i = 1, \ldots, p$, ou bien $k_i \in L$, auquel cas il existe encore un voisinage Y_i de x tel que $Y_i \cap \mathrm{Supp}\,\beta_k = \emptyset$, ou bien $k_i \notin L$, auquel cas on pose $Y_i = X$.

Finalement $X \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_p$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas $\bigcup_{k \in L} \mathrm{Supp}\,\beta_k$.
□

Alors :

(i) Si $j \in J$, $x \in M$ sont tels que $\alpha_j(x) \neq 0$, il existe un $k \in \gamma^{-1}(\{j\}) = /j/$ tel que $\beta_k(x) \neq 0$: ainsi $\alpha_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \bigcup_{k \in /j/} \mathrm{Supp}\,\beta_k$, d'où, vu 5.11, $\mathrm{Supp}\,\alpha_j \subset \bigcup_{k \in /j/} \mathrm{Supp}\,\beta_k$; a fortiori $\mathrm{Supp}\,\alpha_j \subset \bigcup_{k \in /j/} W_k \subset V_j$.

(ii) Si $j \in J$, ou bien $\alpha_j = 0$, ou bien, pour tout $x \in M$, $0 \leq \alpha_j(x) \leq \sum_{k \in K} \beta_k(x) = 1$.

(iii) Pour tout $x \in M$, soit X un voisinage de x et $k_1, \ldots, k_p \in K$ tels que, pour tout $k \in K \setminus \{k_1, \dots, k_p\}$, $X \cap W_k = \emptyset$. Si $j \notin \{\gamma(k_1), \dots, \gamma(k_p)\}$, ou bien $/j/ = \emptyset$ et $\alpha_j = 0$, ou bien $X \cap \mathrm{Supp}\, \alpha_j \subset X \cap \bigcup_{k \in /j/} W_k = \emptyset$; dans les deux cas, $\alpha_j(x) = 0$.

(iv) Soit $J' = \{j \in J \mid \gamma^{-1}(\{j\}) = /j/ \neq \emptyset\}$. Alors $\{/j/ \mid j \in J'\}$ est une partition (au sens ensembliste !...) de K et, pour tout $x \in M$:

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(x) = \sum_{j \in J'} \alpha_j(x) = \sum_{j \in J'} \Big(\sum_{k \in /j/} \beta_k(x) \Big) = \sum_{k \in K} \beta_k(x) = 1.$$

□

Les applications α_j sont définies sur M tout entier et leurs supports sont des fermés de M. La condition 5.1.(i), garantissant que, pour tout $j \in J$, $\mathrm{Supp}\, \alpha_j \subset V_j$, possède ainsi l'intérêt essentiel d'"arrondir les angles" et permet de "globaliser" une donnée locale. Ce pouvoir repose sur le

5.12. LEMME : Soit V un ouvert d'une variété différentiable M, ω une k-forme différentielle sur V dont le support est fermé dans M : c'est le cas par exemple si $\mathrm{Supp}\, \omega$ est compact.

Alors il existe une unique k-forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur M telle que

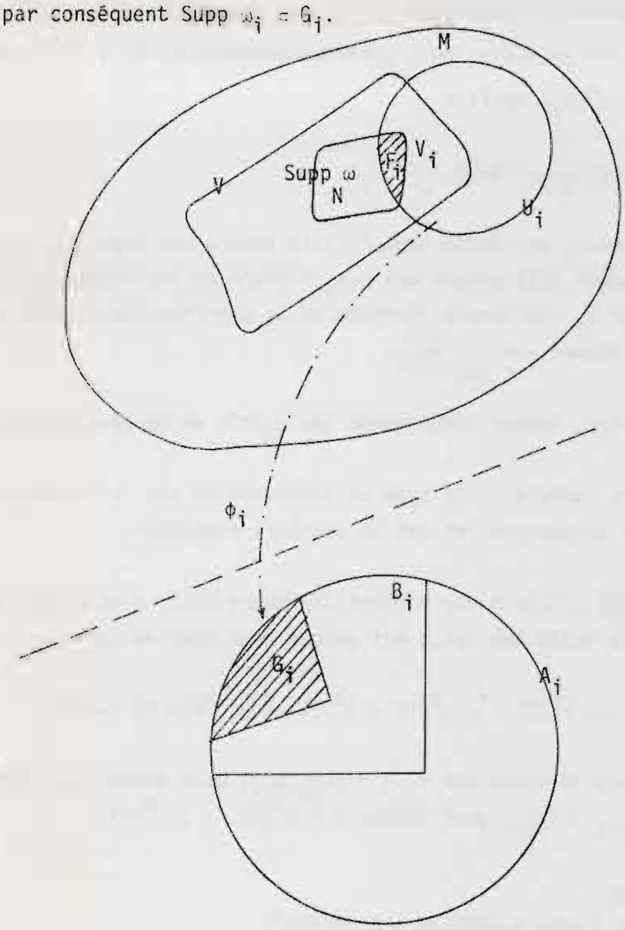
$$\tilde{\omega}|_V = \omega \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}|_{M \setminus V} = 0.$$

Démonstration : Dans le cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le résultat est classique, puisque ω est alors une application de classe C^∞ définie sur V à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas général, soit, pour $i \in I$, $V_i = V \cap U_i$, $B_i = \phi_i(V_i)$ et $\omega_i \in \Omega^k(B_i)$ la forme définissant localement ω. Soit N l'ensemble des $x \in M$ tels que $\omega(x) \neq 0$, N_i l'ensemble des $y \in B_i$ tels que $\omega_i(y) \neq 0$: par définition, $N_i = \phi_i(N \cap U_i)$ (cf. 1.3), $\mathrm{Supp}\, \omega$ est l'adhérence de N dans V, et $\mathrm{Supp}\, \omega_i$ est l'adhérence de N_i dans B_i.

Il suffit de montrer que $\mathrm{Supp}\, \omega_i$ est fermé dans A_i : il existe alors, comme on vient de le remarquer, une k-forme différentielle $\tilde{\omega}_i \in \Omega^k(A_i)$ telle que $\tilde{\omega}_i|_{B_i} = \omega_i$ et $\tilde{\omega}_i|_{A_i \setminus B_i} = 0$, et vérifier que la famille $(\tilde{\omega}_i)_{i \in I}$ définit bien une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ telle qu'annoncée est sans difficulté.

Or l'hypothèse assure que $U_i \cap \mathrm{Supp}\, \omega$ est un fermé F_i de U_i, donc $G_i = \phi_i(F_i)$ est un fermé de A_i. En fait $N_i \subset G_i \subset B_i$ puisque $N \cap U_i \subset F_i \subset V_i$, G_i est donc aussi un fermé de B_i, et par conséquent Supp $\omega_i \subset G_i$.



Tout se réduit donc au

5.13. SOUS-LEMME : Soit X un espace topologique, Y un ouvert de X, F un fermé de X tel que $F \subset Y$, G un fermé de Y tel que $G \subset F$.

Alors G est fermé dans X.

Démonstration : Elémentaire. □

Soit dans ces conditions $\{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentiable M et, pour tout $j \in J$, une k-forme différentielle $\omega_j \in \Omega^k(V_j)$. Si $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}$, alors pour tout $j \in J$ la forme $\alpha_j\omega_j \in \Omega^k(V_j)$ vérifie

$$\mathrm{Supp}\ \alpha_j\omega_j \subset \mathrm{Supp}\ \alpha_j \subset V_j$$

et, comme Supp α_j est fermé dans M, 5.13 montre que Supp $\alpha_j\omega_j$ est lui aussi fermé dans M. Le Lemme 5.12 prouve que $\alpha_j\omega_j$ s'étend en une forme $\widetilde{\alpha_j\omega_j} \in \Omega^k(M)$ qui coïncide avec $\alpha_j\omega_j$ sur V_j. La locale finitude de la partition de l'unité permet de définir la forme "globale" $\omega = \sum_{j\in J} \widetilde{\alpha_j\omega_j}$.

Par contre, sommer directement les ω_j n'a en général pas de sens.

Un autre exemple de ce type de construction est le résultat sur lequel nous terminons le paragraphe, et qui se révèlera essentiel.

5.14. THEOREME : Soit M une variété différentiable, U et V deux ouverts de M tels que $M = U \cup V$. La suite que voici est exacte pour tout entier k :

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{f} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{g} \Omega^k(U\cap V) \longrightarrow 0,$$

où f et g sont définies par $f(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ pour toute $\omega \in \Omega^k(M)$, $g(\theta,\lambda) = \theta|_{U\cap V} - \lambda|_{U\cap V}$ pour toutes $\theta \in \Omega^k(U)$, $\lambda \in \Omega^k(V)$.

Démonstration :

1) Que f soit injective est trivial.

2) Que $g \circ f = 0$ est trivial. Que Ker $g \subset$ Im f n'est qu'un cas particulier de 1.10.

3) Soit $\{\alpha_U, \alpha_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U,V\}$. Comme Supp α_V est fermé dans M, $U \cap$ Supp α_V est fermé dans U.

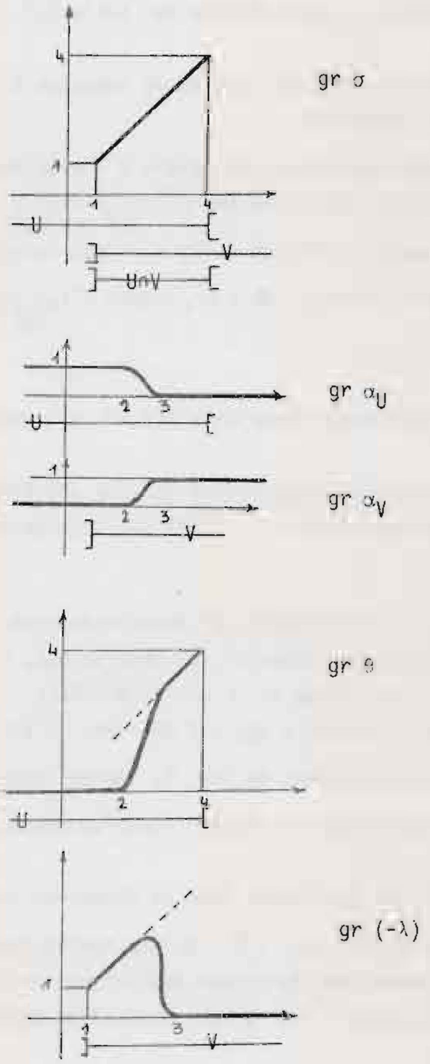
Pour toute forme $\sigma \in \Omega^k(U\cap V)$, le support de la forme $\alpha_V\sigma \in \Omega^k(U\cap V)$ est un fermé de $U \cap V$ inclus dans $U \cap$ Supp α_V : alors 5.13 montre que Supp$(\alpha_V\sigma)$ est un fermé de U et 5.12 fournit une forme $\theta \in \Omega^k(U)$ telle que

$$\theta|_{U\cap V} = \alpha_V\sigma \qquad \text{et} \qquad \theta|_{U\setminus V} = 0 .$$

On construit de même une forme $\lambda \in \Omega^k(V)$ telle que $\lambda|_{U \cap V} = -\alpha_U \sigma$ et $\lambda|_{V \setminus U} = 0$.

Enfin $\theta|_{U \cap V} - \lambda|_{U \cap V} = (\alpha_V + \alpha_U)\sigma = \sigma$. □

FIGURE : Avec $M = \mathbb{R}$, $U =]-\infty, 4[$, $V =]1, +\infty[$; $\alpha_U(x) = G(x-1)$ (cf. 5.10), $\alpha_V = 1 - \alpha_U$; $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}|_{]1,4[} \in \Omega^0(]1,4[)$:



6. EXEMPLES.

On rappelle la forme "angle" introduite en II.2.2. : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, on note $\omega(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$. Comme S^1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, la restriction à S^1 de ω fournit une 1-forme différentielle $\omega|_{S^1} \in \Omega^1(S^1)$ (cf. 2.4).

6.1. <u>THEOREME</u> : La forme $\omega|_{S^1}$ est partout non nulle (cf. 1.3).

<u>Démonstration</u> : On peut prendre des cartes et remonter à la définition. Mais il va plus vite de procéder comme suit :

soit R une rotation quelconque de centre O : elle induit un difféomorphisme $R : S^1 \to S^1$ et on vérifie sans-peine que $R^*(\omega|_{S^1}) = \omega|_{S^1}$. Il en résulte que, si $\omega|_{S^1}$ est nulle en un point, elle est nulle sur tout le cercle. Or, si on note ε l'application $t \mapsto (\cos t, \sin t) : \mathbb{R} \to S^1$, alors $\varepsilon^*(\omega|_{S^1}) = dt$, d'où la contradiction à supposer que $\omega|_{S^1} = 0$. □

Cette propriété est assez importante (cf. VI.1.7) pour qu'on introduise la

6.2. <u>DEFINITION</u> : On appelle <u>forme-volume</u> sur une variété différentiable M de dimension n une n-forme différentielle $\omega \in \Omega^n(M)$ qui soit partout non-nulle sur M.

Avant d'étendre 6.1. aux sphères de toute dimension, et même à toute variété définie par des fonctions de classe C^∞, on observe que, si on pose $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, la 2-forme $df \wedge \omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$, n'est autre que $\frac{1}{x^2+y^2}(2x\,dx + 2y\,dy) \wedge (-y\,dx + x\,dy) = 2\,dx \wedge dy$. (D'où l'on pourrait se laisser aller à conclure que, de ce point de vue, la "bonne" équation du cercle est $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}$, ou encore que la "bonne" forme-volume est $\frac{1}{2}\ \omega$...).

La généralisation se fait alors dans la situation suivante :

soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : V \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Soit $M = f^{-1}(\{0\})$. Pour tout ouvert W de $\mathbb{R}^n$ inclus dans V, $M \cap W$ est une variété différentiable de dimension $(n-1)$.

6.3. <u>LEMME</u> : Si $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$ est telle que $df|_W \wedge \omega$ soit une forme-volume de W, alors $\omega|_{M\cap W}$ est une forme-volume de $M \cap W$.

<u>Démonstration</u> :

1°) On se place dans le cas particulier où $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1$, c'est-à-dire que M est (un ouvert de) l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 = 0$. On peut même supposer sans perte de généralité que $W = V$, ce qui simplifie les notations.

L'hypothèse s'écrit alors

$$dx_1 \wedge \omega = g\, dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_n$$

où $g : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ partout non nulle. Il en résulte que

$$\omega = \lambda \wedge dx_1 + g\, dx_2 \wedge\ldots\wedge dx_n$$

où $\lambda \in \Omega^{n-2}(V)$, et donc que

$$\omega|_M = \tilde{g}\, dx_2 \wedge\ldots\wedge dx_n$$

où $\tilde{g}(x_2,\ldots,x_n) = g(0,x_2,\ldots,x_n)$, qui est clairement une forme-volume de l'hyperplan.

2°) Dans le cas général, on se ramène au cas précédent grâce aux cartes fournies par le théorème des fonctions implicites : si (U,ϕ,A) est une telle carte, A est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et on peut supposer sans perte de généralité que $U \subset W \cap M$ et que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in U$.

Alors $\mathbb{R} \times A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la fonction $\psi : A \to \mathbb{R}$ fournie par III.3.1. définit une application de classe C^∞

$$\Psi : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1 + \psi(x_2,\ldots,x_n), x_2,\ldots,x_n),$$

d'où, si $T = W \cap (\mathbb{R} \times A)$ et $Z = \Psi^{-1}(T)$, des difféomorphismes réciproques

$$\Psi : Z \to T : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1 + \psi(x_2,\ldots,x_n), x_2,\ldots,x_n)$$

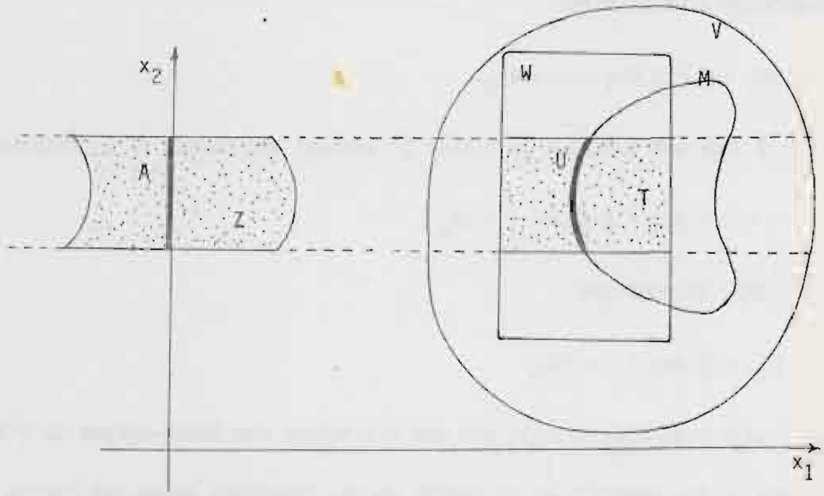
et

$$\Phi : T \to Z : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1 - \psi(x_2,\ldots,x_n), x_2,\ldots,x_n).$$

Il est clair que $\Psi(U) = A$; le calcul (se rappeler que, pour tout $i = 2,\dots,n$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x_2,\dots,x_n) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\psi(x_2,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(x_2,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n)}\;)$$

montre que $\Psi^*(df) = dx_1$ et, bien entendu, $\Psi^*(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n) = dx_1 \wedge\dots\wedge dx_n$. Par conséquent, d'après 1°), $\Psi^*(\omega)$ est une forme-volume sur A, et ω est une forme-volume sur U. □



On en tire immédiatement les

6.4. THEOREME : Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : V \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ et $M = f^{-1}(\{0\})$ la variété différentiable de dimension $(n-1)$ qui s'en déduit, la restriction à M de

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge\dots\wedge \widehat{dx_i} \wedge\dots\wedge dx_n$$

(où, conformément à la tradition, le $\wedge$ signifie que le terme ainsi chapeauté est omis) est une forme-volume sur M.

6.5. COROLLAIRE : La restriction à S^n de la forme

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i\, x_i\, dx_1 \wedge\dots\wedge \widehat{dx_i} \wedge\dots\wedge dx_{n+1}$$

est une forme-volume sur S^n.

Démonstration de 6.4. : Du fait que

$$dx_i \wedge (dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n) = (-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

il résulte que, sur V,

$$df \wedge \omega = -\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right\} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \ ,$$

qui est bien une forme-volume sur V, le théorème des fonctions implicites supposant précisément que le coefficient de $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ne s'y annule pas. Appliquer 6.3. ◻◻

6.6. EXERCICE : Généraliser 6.3. au cas où M est la $(n-p)$-sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dont les points sont solution des p équations

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0$$
$$\text{-----}$$
$$f_p(x_1,\ldots,x_n) = 0 \ ,$$

$f_1,\ldots,f_p$ étant des fonctions de classe C^∞ qui vérifient les hypothèses du théorème des fonctions implicites, et où ω est une $(n-p)$-forme différentielle sur W telle que $df_1 \wedge \ldots \wedge df_p \wedge \omega$ soit une forme-volume sur W.

6.7. EXERCICE : Utiliser l'isomorphisme $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \cong \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$ de I.10.3. et l'isomorphisme de dualité $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \cong \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$, déduit du produit $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ pour construire une forme ω répondant aux conditions de 6.6.

Pour l'exemple "exotique" sur lequel nous terminons le paragraphe et le chapitre on reprend les définitions et notations de II.2.4.

La variété différentiable $\mathcal{A}(n\,;p)$ dont les éléments sont les projecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux et de trace p (qui est par définition difféomorphe à la Grassmannienne $G_p(\mathbb{R}^n)$: cf. III.4.16 et III.6.11) est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. III.7.3). La restriction à $\mathcal{A}(n\,;p)$ d'une forme différentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit donc une forme différentielle sur $\mathcal{A}(n\,;p)$.

Soit alors r un entier et $\omega_{2r} \in \mathcal{M}_n(\Omega^{2r}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$ la matrice $n \times n$ dont les éléments sont des $2r$-formes différentielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\omega_{2r} = M(dM)^{2r} = \underbrace{M\ dM\ dM \ldots dM}_{2r\ \text{fois}} .$$

Comme en II.2.4., on en déduit la forme $\operatorname{Tr} \omega_{2r} \in \Omega^{2r}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

6.8. THEOREME : La restriction à $\mathcal{A}(n\,;p)$ de $\operatorname{Tr} \omega_{2r}$ est une forme $\alpha_{2r} \in \Omega^{2r}(\mathcal{A}(n\,;p))$ fermée pour tout r.

Démonstration : On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{A}(n\,;p)$, la matrice $J = 2M - I_n$ vérifie $J^2 = 4M - 2M - 2M + I_n = I_n$. On observe aussi que, J étant de degré 0 et quel que soit le degré k de $\sigma \in \mathcal{M}_n(\Omega^k(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$,

(1) $\qquad \operatorname{Tr}((J\sigma)J) = \operatorname{Tr}(J(J\sigma)) = \operatorname{Tr} \sigma .$

Par ailleurs, de $M^2 = M$ on déduit que

[E] $\qquad M\ dM + dM\ M = dM$,

d'où $\qquad 2M\ dM - dM = dM - 2\ dM\ M$

et $\qquad J\ dM = -\ dM\ J$.

De là $J(dM)^{2r+1} = -\ (dM)^{2r+1}\ J$, d'où $J(dM)^{2r+1}\ J = -\ (dM)^{2r+1}$ et $\operatorname{Tr}(J(dM)^{2r+1}J) = -\operatorname{Tr}((dM)^{2r+1})$.

Il résulte alors de (1), pris avec $\sigma = (dM)^{2r+1}$, que $\operatorname{Tr}((dM)^{2r+1}) = 0$.

Or $d(M(dM)^{2r}) = (dM)^{2r+1}$ et, comme Tr commute à d, $d\alpha_{2r} = \operatorname{Tr}((dM)^{2r+1}) = 0$. □

6.9. REMARQUE : La démonstration précédente est commode et les calculs qui s'y trouvent sont évidemment les mieux adaptés à la situation. Elle a pourtant le défaut, a priori rédhibitoire, de ne pas se référer, ou du moins pas de façon visible, à la définition 1.1 : en toute rigueur il aurait fallu prendre un atlas de $\mathcal{A}(n\,;p)$, déterminer pour toute carte (U,ϕ,A) de l'atlas la forme $\alpha_A \in \Omega^{2r}(A)$ qui définit α_{2r}, et vérifier que $d\alpha_A$ est nulle.

En fait il en est bien ainsi, et on peut s'en assurer en procédant grosso modo comme suit :

6.10. LEMME : Dans la situation du théorème des fonctions implicites (cf.III.6.8.) avec $p = 1$ et $f_1 = f$, la restriction à M de la forme $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ est nulle : $df|_M = 0 \in \Omega^1(M)$.

Démonstration : Soit (U,ϕ,A) une carte de M fournie par le théorème des fonctions implicites et supposons que, par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ reste non nulle sur U : alors ϕ est la projection $(x_1,\ldots,x_n) \to (x_1,\ldots,x_{n-1})$ et ϕ^{-1} est de la forme $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto (x_1,\ldots,x_{n-1},\psi(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ où ψ est de classe C^∞. Pour toute k-forme $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, la restriction $\omega|_M$ est définie localement par $\alpha = (\phi^{-1})^*\omega \in \Omega^k(A)$.

Dans le cas où $\omega = df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i ,$$

et

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{-\partial f/\partial x_j}{\partial f/\partial x_n} dx_j\right) = 0 . \quad \square$$

6.11. COROLLAIRE : L'inclusion $\iota : M \subset \mathbb{R}^n$ induit un homomorphisme d'A.D.G.

$$\tilde{\iota}^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n)/Z \to \Omega^*(M)$$

où Z est l'idéal engendré par df et f.

6.12. EXERCICE : Enoncer et démontrer la généralisation de 6.11 au cas de III.6.8. avec p quelconque, puis au cadre du théorème du rang constant (cf. III.7.5).

Observer alors que la démonstration de 6.8 consiste à prouver que $d(\mathrm{Tr}\ \omega_{2r})$ est nulle modulo Z (au détail d'écriture près qu'on garde la même lettre pour une forme et sa classe modulo Z, ou encore qu'on écrit des égalités au lieu de congruences : cf. [E]). La méthode est donc légitime et c'est elle qu'on a intérêt à suivre dans tous les cas analogues.

7. STRUCTURES MULTIPLICATIVES.

Pour toute variété différentiable M, le produit extérieur des formes différentielles munit (cf. 1.11) $\Omega^*(M)$ d'une structure d'algèbre différentielle graduée (ADG) commutative[(1)] et $\Omega^*_c(M)$ d'une structure d'idéal (gradué) de $\Omega^*(M)$. Soit, pour tous entiers i,j,

$$\Lambda^{ij} : \Omega^i(M) \times \Omega^j(M) \longrightarrow \Omega^{i+j}(M) : (\alpha,\beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$$

les applications bilinéaires définissant la structure de $\Omega^*(M)$, qui se restreignent donc en

$$\Lambda^{ij}_c : \Omega^i(M) \times \Omega^j_c(M) \longrightarrow \Omega^{i+j}_c(M) .$$

Les règles du calcul de la différentielle d'un produit extérieur de formes différentielles (3.1 (i)) garantissent que, pour tous entiers i,j,

$$\Lambda^{ij}(Z^i(M) \times Z^j(M)) \subset Z^{i+j}(M) ,$$

$$\Lambda^{ij}(B^i(M) \times Z^j(M)) \subset B^{i+j}(M) ,$$

$$\Lambda^{ij}(Z^i(M) \times B^j(M)) \subset B^{i+j}(M) ;$$

$$\Lambda^{ij}_c(Z^i(M) \times Z^j_c(M)) \subset Z^{i+j}_c(M) ,$$

$$\Lambda^{ij}_c(B^i(M) \times Z^j_c(M)) \subset B^{i+j}_c(M) ,$$

$$\Lambda^{ij}_c(Z^i(M) \times B^j_c(M)) \subset B^{i+j}_c(M) .$$

---

(1) nous utilisons désormais, comme il est d'usage dans le cas des algèbres graduées, ce mot pour désigner la condition avec signe dénommée anticommutativité en I.8.8 : $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est commutative ssi pour tous $a \in A_p$, $b \in A_q$, $ab = (-1)^{pq}\, ba$.
Celle-ci est en fait plus naturelle que la commutativité au sens strict (cf. I.8.12, V.3.1bis, etc...).
Tout idéal, tout module, toute application de degré 0 linéaire à gauche le sont aussi à droite (et réciproquement) de manière automatique.

De là, pour tous entiers i,j, les applications linéaires

$$\lambda^{ij} : H^i(M) \otimes H^j(M) \longrightarrow H^{i+j}(M)$$

et $$\lambda_c^{ij} : H^i(M) \otimes H_c^j(M) \longrightarrow H_c^{i+j}(M) .$$

Pour tous $a \in H^i(M)$, $b \in H^j(M)$, $\lambda^{ij}(a \otimes b)$ sera simplement noté a.b ou même ab ; autrement dit, pour toutes $\omega \in Z^i(M)$, $\sigma \in Z^j(M)$,

$$[\omega].[\sigma] = [\omega][\sigma] = [\omega \wedge \sigma] .$$

On garde la même notation si l'une et/ou l'autre forme est à support compact. (cf. 7.2).

Les propriétés formelles de ces applications linéaires sont résumées dans le

7.1. <u>THEOREME</u> : Pour toute variété différentiable M, le produit extérieur des formes différentielles munit $H^*(M)$ d'une structure d'algèbre graduée commutative (unitaire) et $H_c^*(M)$ d'une structure de $H^*(M)$-module gradué.

<u>Démonstration</u> : Une quasi-évidence, simple affaire de vérification. □

7.2. <u>REMARQUE</u> : En se restreignant des <u>deux</u> côtés aux formes à supports compacts, on obtient de même pour tous entiers i,j une application linéaire

$${}_c\lambda_c^{ij} : H_c^i(M) \otimes H_c^j(M) \longrightarrow H_c^{i+j}(M) .$$

Il en résulte pour $H_c^*(M)$ une structure d'algèbre graduée (sans unité) qui sert peu (mais cf. VI. 3.8 et 3.9).

Quant aux morphismes, si $f : M \to N$ est une application de classe C^∞ entre variétés différentiables, il est clair sur la définition (cf. 2.1) que, pour tous entiers i,j et toutes $\omega \in \Omega^i(N)$, $\sigma \in \Omega^j(N)$, $f^*(\omega\wedge\sigma) = f^*\omega \wedge f^*\sigma$.

Il en résulte le

7.3. <u>THEOREME</u> : Pour toute application de classe C^∞ entre variétés différentiables $f : M \to N$ l'homomorphisme $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ défini en 3.4 est un homomorphisme d'algèbres graduées.

Démonstration : Appliquer les définitions (cf. 7.1, 3.3, 3.4) afin d'écrire, pour tous entiers i,j et toutes $\omega \in Z^i(N)$, $\sigma \in Z^j(N)$, la suite d'égalités

$$f^*([\omega][\sigma]) = f^*([\omega\wedge\sigma]) = [f^*(\omega\wedge\sigma)]$$

$$= [f^*\omega \wedge f^*\sigma] = [f^*\omega].[f^*\sigma]$$

$$= f^*([\omega]).f^*([\sigma]) \; . \qquad \square$$

7.4. REMARQUE : On peut, grâce à 3.8, supposer seulement f continue.

La situation est plus délicate si la cohomologie à supports compacts intervient (cf. comme toujours II.8.3). Pour la décrire, on rappelle que, étant donné deux anneaux A, B et un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \to B$, tout B-module Y devient un A-module sous l'action

$$A \otimes Y \longrightarrow Y : a \otimes y \longmapsto \phi(a)\, y \; .$$

De même, étant donné un A-module X et un B-module Y, des applications

$$f : X \to Y \qquad \text{et} \qquad g : Y \to X$$

sont A-linéaires ssi pour tout $a \in A$, tout $x \in X$, $f(ax) = \phi(a)\, f(x)$ (resp. : pour tout $a \in A$, $y \in Y$, $g(\phi(a)y) = a\, g(y)$).

Cet état de choses apparaît ici dans (au moins) deux cas. D'abord si M est une variété différentiable et U un ouvert de M, l'inclusion $\iota : U \to M$ induit le morphisme $\iota_* : \Omega^*_C(U) \to \Omega^*_C(M)$ défini (cf. II.8.4 et ce chapitre §4 et 5.12) en étendant une forme par 0 dans le complémentaire à M de son support, d'où une application $\mathbb{R}$-linéaire $\iota_* : H^*_C(U) \to H^*_C(M)$. Par ailleurs $\iota^* : H^*(M) \to H^*(U)$ fait de $H^*_C(U)$, comme on vient de le voir et d'après 7.1, un $H^*(M)$-module.

7.5. THEOREME : Cette application $\iota_* : H^*_C(U) \to H^*_C(M)$ est $H^*(M)$-linéaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in H^i(M)$ et tout $y \in H^j_C(U)$,

$$\iota_*(\iota^*(x).y) = x.\iota_*(y) \in H_C^{i+j}(M) \; .$$

Démonstration : Soit $\xi \in Z^i(M)$ tel que $x = [\xi]$, $\eta \in Z^j_C(U)$ tel que $y = [\eta]$. Par définition, $x.\iota_*(y) = [\xi \wedge \tilde{\eta}]$, $\iota^*(x).y = [\xi|_U \wedge \eta]$ et $\iota_*(\iota^*(x).y) = [(\widetilde{\xi|_U\wedge\eta})]$, où $\sim$ désigne l'extension d'une forme à M par 0 en-dehors de son support.

Or $\mathrm{Supp}(\xi_{|U} \wedge \eta) \subset \mathrm{Supp}\,\eta$ est un compact de U ; $(\xi \wedge \tilde{\eta})_{|\mathrm{Supp}\,\eta} = (\xi_{|U} \wedge \eta)_{|\mathrm{Supp}\,\eta}$; en-dehors de $\mathrm{Supp}\,\eta$ (donc de $\mathrm{Supp}(\xi_{|U} \wedge \eta)$), $\xi \wedge \tilde{\eta} = \widetilde{\xi_{|U} \wedge \eta} = 0$. □

L'autre cas est celui où M, N sont deux variétés différentiables et $f : M \to N$ une application de classe C^∞ propre (c'est-à-dire telle que pour tout compact K de N, $f^{-1}(K)$ soit un compact de M) : alors une application $\mathbb{R}$-linéaire $f_C^* : H_C^*(N) \to H_C^*(M)$ est définie. Par ailleurs on dispose toujours de l'homomorphisme d'algèbres $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$.

7.6. THEOREME : L'application $f_C^* : H_C^*(N) \to H_C^*(M)$ est $H^*(N)$-linéaire, c'est-à-dire que pour tout $x \in H^i(N)$ et tout $y \in H_C^j(N)$,

$$f_C^*(xy) = f^*(x)\, f_C^*(y) \in H_C^{i+j}(M) .$$

Démonstration : Vérifications formelles analogues à tout ce qui précède. □

7.7. REMARQUE : Le Théorème 7.6 s'applique en particulier au cas où f est un difféomorphisme, qui est toujours propre : f_C^* est alors un isomorphisme de $H^*(N)$-modules. (Ne pas s'inquiéter de l'apparente dissymétrie : comme f^* est aussi un isomorphisme, les structures de $H^*(M)$-module et $H^*(N)$-module coïncident - cf. 7.8).

Mieux encore, l'adjectif "propre" (ou l'adverbe "proprement") peuvent être ajoutés partout dans les propositions 3.8 (c'est en fait sous cette forme qu'on les trouve énoncées et démontrées dans [5]) ce qui assure le

7.8. THEOREME : Si $f : M \to N$ est un homéomorphisme entre variétés différentiables, $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives et $f_C^* : H_C^*(N) \to H_C^*(M)$ est un isomorphisme de $H^*(N)$ - (ou $H^*(M)$-) modules, c'est-à-dire qu'on a,

en termes de $H^*(N)$-modules, pour tous $x \in H^i(N)$, $y \in H_C^j(N)$, $f_C^*(xy) = f^*(x) f_C^*(y)$

(en termes de $H^*(M)$-modules, pour tous $x' \in H^i(M)$, $y \in H_C^j(N)$, $f_C^*((f^{-1})^*(x').y) = x'.f_C^*(y)$).

Démonstration : Soit $f : M \to N$ et $g = f^{-1} : N \to M$ des homéomorphismes, donc des applications propres (si K est un compact de M et L un compact de N, $g^{-1}(K) = f(K)$

et $f^{-1}(L) = g(L)$). La version "propre" de 3.8 donne alors deux applications de classe C^{∞}, $\tilde{f} : M \to N$ et $\tilde{g} : N \to M$, qui sont propres et sont proprement et continûment homotopes à f et g respectivement : par définition $f^* = \tilde{f}^*$, $f^*_C = \tilde{f}^*_C$, $g^* = \tilde{g}^*$, $g^*_C = \tilde{g}^*_C$. Comme $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est proprement et continûment homotope à Id_M, elle est proprement et différentiablement homotope à Id_M, d'où $(\tilde{g} \circ \tilde{f})^* = Id_{H^*(M)}$ et $(\tilde{g} \circ \tilde{f})^*_C = Id_{H^*_C(M)}$. Ainsi $f^* \circ g^* = Id_{H^*(M)}$ et $f^*_C \circ g^*_C = Id_{H^*_C(M)}$. De la même manière, $g^* \circ f^* = Id_{H^*(N)}$ et $g^*_C \circ f^*_C = Id_{H^*_C(N)}$.

Les propriétés formelles se vérifient avec $\tilde{f}^*$ et $\tilde{g}^*$: cf. 7.7. □

7.9. <u>REMARQUE</u> : Aux produits "internes" définis dans ce paragraphe le Chapitre V va ajouter une notion "externe" : celle de cup-produit (V.3.2). On vérifiera sans peine que la liaison entre les deux est assurée,

dans un sens par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^i(M) \otimes H^j(M) \arrow[r, "\lambda^{ij}"] \arrow[dr, "\smile"'] & H^{i+j}(M) \\ & H^{i+j}(M \times M) \arrow[u, "\Delta^*"'] \end{tikzcd}$$

où $\Delta : M \to M \times M : x \mapsto (x,x)$ est la traditionnelle diagonale ;

dans l'autre sens, si $p : M \times N \to M$ et $q : M \times N \to N$ sont les projections, $x \in H^i(M)$, $y \in H^j(M)$, par la relation

$$x \smile y = (p^*x).(q^*y) \in H^{i+j}(M \times N).$$