

CHAPITRE VI

DUALITE DE POINCARÉ - THEOREME DE LEFSCHETZ

1. ORIENTATION ET COHOMOLOGIE EN DIMENSION MAXIMALE.

Nous revenons à des considérations moins algébriques et plus descriptives. Les notations habituelles sont reprises : M est une variété différentiable de dimension n ; $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ est un atlas de M ; $A_{ij} = \phi_i(U_i \cap U_j)$: c'est un ouvert de \mathbb{R}^n . Par contre on se contente de sous-entendre A_{ji} dans $\phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{A_{ji}}$, notation légèrement incorrecte mais plus explicite que ϕ_{ij} (cf. III.5.2).

Les applications $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : A_{ji} \rightarrow A_{ij}$ étant par hypothèse des difféomorphismes de classe C^∞ pour tous $i, j \in I$, leurs matrices jacobiennes sont inversibles en tout point, et les déterminants de celles-ci, appelés aussi jacobiens, sont partout non-nuls.

1.1. DEFINITION : L'atlas est orienté ssi pour tous $i, j \in I$ le jacobien de

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : A_{ji} \rightarrow A_{ij}$$

est strictement positif en tout point de A_{ji} .

1.2. DEFINITION : La variété différentiable M est orientable s'il existe un atlas orienté compatible avec sa structure différentiable.

1.3. REMARQUE : Il résulte immédiatement de la définition que si M est une variété différentiable orientable et U un ouvert de M , U est une variété différentiable orientable.

Il est clair que, $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ et $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$ étant deux atlas inclus dans l'atlas maximal d'une variété différentiable M , poser $\mathcal{A} \sim_0 \mathcal{B}$ ssi, pour tous $i \in I, j \in J$, le jacobien de $\psi_j \circ \phi_i^{-1}$ est strictement positif en tout point de $\phi_i(U_i \cap V_j)$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas contenus dans l'atlas maximal.

1.4. DEFINITION : Une orientation sur une variété orientable M est une classe d'équivalence d'atlas orientés de M pour la relation \sim_0 . Une variété orientée est la donnée d'une variété orientable et d'une orientation.

1.5. EXERCICES :

(i) Si M est orientable et connexe, il existe exactement deux orientations sur M .

(ii) Soit (M, \mathcal{A}) et (N, \mathcal{B}) deux variétés connexes orientées, $f : M \rightarrow N$ un C^∞ -difféomorphisme. Alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ (en un sens évident) est un atlas orienté de M .

(Si $f^{-1}(\mathcal{B}) \sim_0 \mathcal{A}$ on dira que f conserve l'orientation ; sinon, qu'il la renverse).

Bien entendu, toute variété n'est pas orientable, comme on sait par le très célèbre

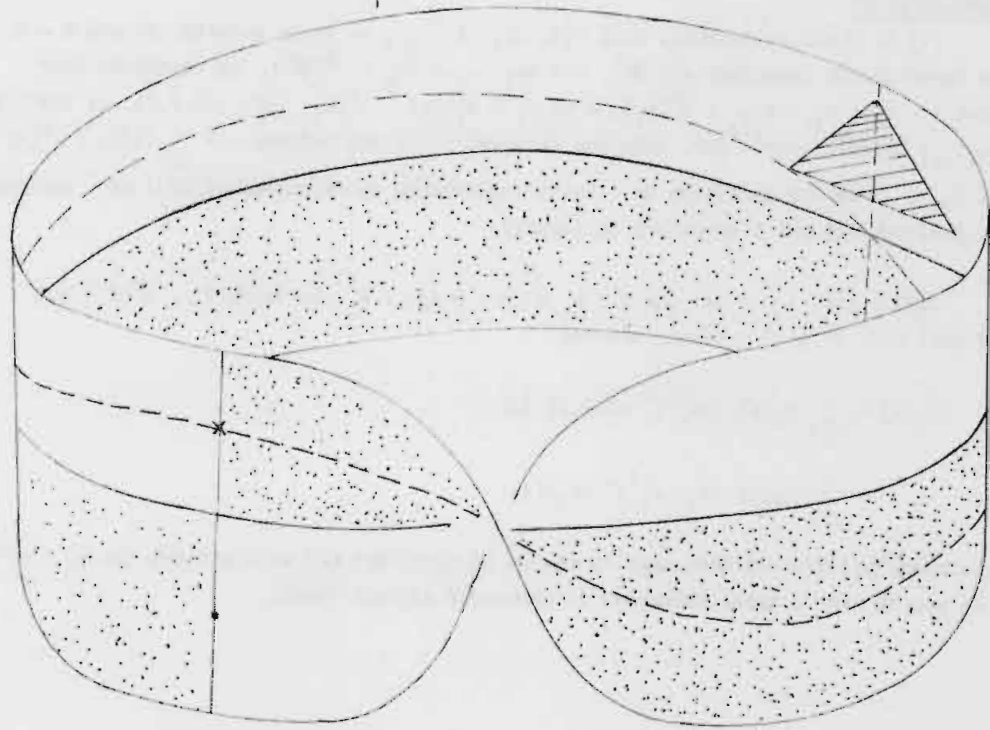
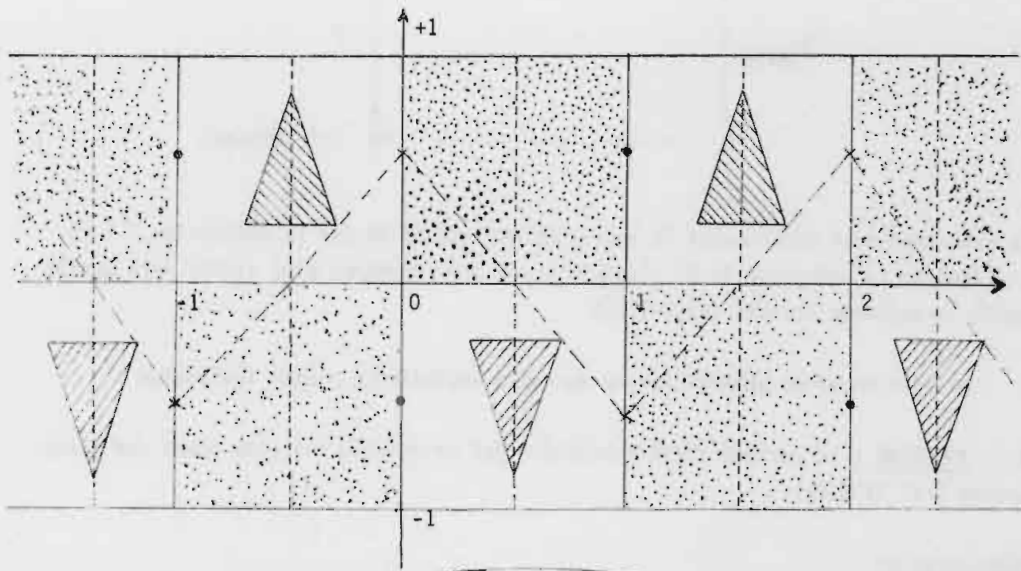
1.6. CONTRE-EXEMPLE : (Bande de Möbius) Soit $U = \mathbb{R} \times]-1, +1[$. C'est un ouvert de \mathbb{R}^2 , donc une variété différentiable orientée (cf. 1.3, \mathbb{R}^2 étant orienté... par l'atlas à une carte $\{(\mathbb{R}^2, \text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathbb{R}^2)\}$).

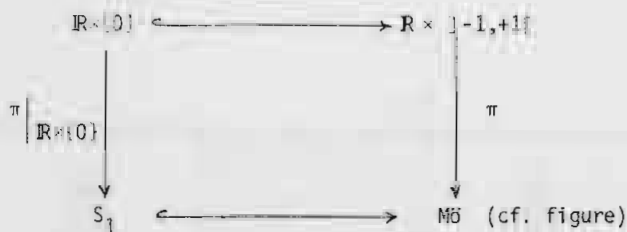
On fait agir \mathbb{Z} sur U en posant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $(x, t) \in U$,

$$k.(x, t) = (x+k, (-1)^k t).$$

Il est facile de voir par un raisonnement adapté de celui de III.7.6 que le quotient $M\ddot{O} = U/\mathbb{Z}$ est muni d'une structure de variété différentiable de dimension 2 telle que la projection canonique $\pi : U \rightarrow M\ddot{O}$ soit de classe C^∞ .

Etant donné que S^1 apparaît naturellement comme sous-variété fermée de dimension 1 de $M\ddot{O}$ grâce au diagramme





on peut démontrer directement la non-orientabilité de $M\tilde{0}$ sur la définition 1.1 en s'aidant de la compacité de S^1 . Toutefois une démonstration plus simple sera donnée après le théorème suivant (voir 1.15).

On voit en effet apparaître une agréable équivalence plutôt inattendue :

1.7. THEOREME : La variété différentiable M est orientable ssi elle admet une forme-volume (cf. IV.6.2).

Démonstration :

(i) Si M est orientable, soit $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ un atlas orienté. Si $\dim M = n$, la forme-volume canonique sur \mathbb{R}^n , $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, se restreint pour tout $i \in I$ en $\omega_i = \omega|_{A_i} \in \Omega^n(A_i)$, d'où $\omega_i = \phi_i^*(\theta_i) \in \Omega^n(U_i)$ (cf. III.7.7). La famille $\{\omega_i\}_{i \in I}$ définit alors (cf. chapitre IV avant 5.14) une n -forme $\omega = \sum_{i \in I} \tilde{\alpha}_i \omega_i \in \Omega^n(M)$ où $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$ et $\tilde{}$ désigne le prolongement par 0 en-dehors du support.

Soit $y \in M$, $i \in I$ tel que $y \in U_i$ et $x = \phi_i(y) \in A_i$. La forme $\tilde{\omega}_i \in \Omega^n(A_i)$ qui définit (cf. IV.1.1) ω sur A_i vérifie

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_i(x) &= \sum_{j \in I} \alpha_j(y) ((\phi_i^{-1})^* \phi_j^*(\theta_j))(x) \\
 &= \sum_{j \in I} \alpha_j(y) (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\theta_j)(x) .
 \end{aligned}$$

(La somme est bien définie dans la mesure où $\alpha_j(y)$ est nul si j est tel que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ n'a pas de sens ; cette somme est au demeurant partout finie).

Appliquant II.3.2 avec $k = p = n$, on obtient

$$\begin{aligned} (\phi_i \circ \phi_i^{-1})^* (\theta_i) &= (\phi_i \circ \phi_i^{-1})^* (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= J(\phi_i \circ \phi_i^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

où J désigne le jacobien.

De là,

$$\tilde{\omega}_1(x) = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i(y) J(\phi_i \circ \phi_i^{-1})(x) \right) \varepsilon_1^* \wedge \dots \wedge \varepsilon_n^* .$$

L'hypothèse d'orientabilité et la propriété (ii) (cf. IV.5.1) des partitions de l'unité font que, pour tout $i \in I$, $\alpha_i(y) J(\phi_i \circ \phi_i^{-1})(x) \geq 0$; de plus (IV.5.1 (iv)) il existe un $j \in I$ tel que $\alpha_j(y) > 0$: cela implique que $y \in U_j$ et ainsi $J(\phi_j \circ \phi_j^{-1})(x)$ est défini, donc strictement positif. Au bout du compte le coefficient de $\varepsilon_1^* \wedge \dots \wedge \varepsilon_n^*$ est strictement positif, et $\tilde{\omega}_1(x) \neq 0$, c'est-à-dire $\omega(y) \neq 0$.

(ii) Réciproquement, soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme-volume. Soit $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M , a priori quelconque quant à l'orientabilité mais où, pour tout $i \in I$, $A_i = \mathbb{R}^n$. (Pareil atlas peut toujours être obtenu : partant d'un atlas $\{(V_j, \psi_j, B_j)\}_{j \in J}$, écrire chaque V_j ($j \in J$) comme réunion d'ouverts dont l'image par ψ_j soit une boule de \mathbb{R}^n ; prolonger par des difféomorphismes entre ces boules et \mathbb{R}^n).

Pour tout $i \in I$, la forme $\phi_i^*(\theta_i)$ considérée en (i) est une forme-volume sur U_i , il existe donc une fonction $\lambda_i \in \Omega^0(U_i)$ partout non-nulle et telle que $\omega|_{U_i} = \lambda_i \phi_i^*(\theta_i)$; par connexité de U_i , λ_i garde un signe constant.

On définit un nouvel atlas $\{(U_i, \psi_i, \mathbb{R}^n)\}_{i \in I}$ en posant $\psi_i = \phi_i$ si le signe de λ_i est positif, et $\psi_i = \tau \circ \phi_i$, où $\tau = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, dans le cas contraire. Comme il est clair que $(\tau \circ \phi_i)^* = -\phi_i^*$, on a, pour tout $i \in I$, $\omega|_{U_i} = \mu_i \psi_i^*(\theta_i)$ avec $\mu_i \in \Omega^0(U_i)$ strictement positive.

Cet atlas est orienté : en effet, nous venons de voir que, pour tous $i, j \in I$, on a, sur $\psi_j(U_i \cap U_j)$,

$$(\psi_i \circ \psi_j^{-1})^* (\theta_i) = J(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) \theta_j .$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (\psi_i \circ \psi_j^{-1})^* (\theta_i) &= (\psi_j^{-1})^* \circ \psi_i^* (\theta_i) \\ &= (\psi_j^{-1})^* \left(\frac{1}{\mu_i} \omega|_{U_i \cap U_j} \right) \\ &= (\psi_j^{-1})^* \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} \psi_j^* (\theta_j) \right) \\ &= \frac{\mu_j}{\mu_i} \theta_j . \end{aligned}$$

D'où $J(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) = \frac{\mu_j}{\mu_i} > 0$. \square

1.8. COROLLAIRE : Si M est la sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n , de dimension $n-1$, dont les points sont les solutions de l'équation

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

où f est une application de classe C^∞ , à valeurs réelles, définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n et dont les dérivées partielles ne s'annulent simultanément en aucun point de M , alors M est orientable.

Démonstration : Utiliser IV.6.4. \square

1.9. REMARQUE : En se servant de la notion de fibré normal (cf. V.4.11 et (11)) on peut montrer la réciproque de ce théorème.

Ainsi (cf. III.6.7) sont orientables, pour tout entier n , $O(n)$, $SO(n)$ et $U(n)$, de même que les variétés de Stiefel $V_{n,p}(\mathbb{R})$ et $V_{n,p}(\mathbb{C})$ pour tous entiers n, p ($1 < p < n$).

1.10. EXERCICE : Soit n un entier, $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la projection canonique (cf. III.2.7), $\tau : S^n \rightarrow S^n : x \mapsto -x$ l'application antipodale.

Si $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$ est une forme-volume, $p^* \omega$ est une forme-volume sur S^n invariante par τ^* ; réciproquement, si $\sigma \in \Omega^n(S^n)$ est une forme-volume invariante par τ^* , il existe une unique forme différentielle $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$ telle que $p^* \omega = \sigma$, et ω est une forme-volume sur $\mathbb{R}P^n$ (cf. démonstration de 1.15).

Ainsi $\mathbb{R}P^n$ est orientable ssi n est impair (cf. V.5.18 ; cf. aussi 1.24).

Par contre les espaces projectifs complexes sont tous orientables. Remarquer que la preuve que nous donnons de ce fait s'applique aussi aux Grassmanniennes complexes et, pour tout entier n , à $U(n)$ (déjà obtenu) et $SU(n)$. Elle procède ainsi :

de manière générale, en remplaçant dans III.5.2 et III.5.7 \mathbb{R} par \mathbb{C} et "fonction de classe C^∞ " par "fonction analytique", on obtient la notion de variété analytique.

1.11. EXERCICE : Reprendre les démonstrations du Chapitre III pour vérifier que les variétés ici envisagées sont bien analytiques.

Par ailleurs, le \mathbb{R} -isomorphisme canonique $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (x_1+iy_1, \dots, x_n+iy_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ fait apparaître $GL(n, \mathbb{C})$ comme sous-groupe de $GL(2n, \mathbb{R})$ sous l'"inclusion" $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$ qui envoie la matrice $(z_{kl})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} \in GL(n, \mathbb{C})$ sur la matrice $2n \times 2n$ de la forme $(X_{kl})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n}$ où, posant $z_{kl} = x_{kl} + iy_{kl}$,

$$X_{kl} = \begin{pmatrix} x_{kl} & -y_{kl} \\ y_{kl} & x_{kl} \end{pmatrix} .$$

Si $M \in GL(n, \mathbb{C})$ est la matrice d'un \mathbb{C} -automorphisme de \mathbb{C}^n , $\rho(M)$ est ainsi la matrice du \mathbb{R} -automorphisme de \mathbb{R}^{2n} obtenu en "oubliant" la \mathbb{C} -linéarité.

1.12. LEMME : Pour tout entier $n \geq 1$, $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Démonstration : Soit $M \in GL(n, \mathbb{C})$. Comme M n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il est toujours possible de trouver un chemin continu

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2 : t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$$

tel que $\alpha(0) = \beta(1) = 1$,

$$\alpha(1) = \beta(0) = 0,$$

$$\alpha(t) \neq 0 \text{ pour } t < 1,$$

et que pour aucune valeur de $t \in]0, 1[$, $\frac{-\beta(t)}{\alpha(t)}$ ne soit une valeur propre de M . On pose $M_t = \alpha(t)M + \beta(t)I_n$, où $I_n \in GL(n, \mathbb{C})$ est la matrice-unité.

Alors $M_0 = M$, $M_1 = I_n$ et, pour tout $t \in [0,1]$, $M_t \in GL(n, \mathbb{C})$: ainsi toute $M \in GL(n, \mathbb{C})$ peut être jointe par un chemin dans $GL(n, \mathbb{C})$ à I_n , et donc à toute $M' \in GL(n, \mathbb{C})$. \square

1.13. COROLLAIRE : $\rho(GL(n, \mathbb{C})) \subset GL(2n, \mathbb{R})^+$ où $GL(2n, \mathbb{R})^+$, composante connexe de l'identité I_{2n} dans $GL(2n, \mathbb{R})$, est formé de matrices à déterminant strictement positif.

Démonstration : Triviale. \square

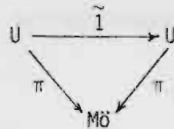
1.14. COROLLAIRE : Toute variété analytique est orientable.

Démonstration : Si M est une variété analytique de dimension complexe n , pour tout couple de cartes (U, ϕ, A) , (V, ψ, B) , la jacobienne de $\phi \circ \psi^{-1}$ est dans $GL(n, \mathbb{C})$ en tout point de $\psi(U \cap V)$. Regarder M comme $2n$ -variété différentiable revient à garder les mêmes cartes, mais on y considère A et B comme des ouverts de \mathbb{R}^{2n} en oubliant la structure complexe. Dans ces conditions, la jacobienne de $\phi \circ \psi^{-1}$ au sens réel n'est autre que l'image par ρ de la jacobienne au sens complexe, donc elle a un déterminant strictement positif d'après 1.13. \square

Enfin, comme annoncé, on déduit de 1.7. 1e

1.15. THEOREME : La bande de Möbius n'est pas orientable.

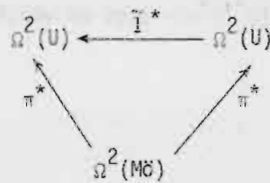
Démonstration : Reprenant les notations de 1.6, on dispose du diagramme commutatif suivant



où $\tilde{1} : U \rightarrow U$ est l'application induite par l'action de $1 \in \mathbb{Z}$ sur U , soit, pour tout $(x,t) \in U$,

$$\tilde{1}(x,t) = (x+1, -t).$$

Il en résulte le diagramme commutatif



d'où, pour toute $\omega \in \Omega^2(M\ddot{O})$, une forme $\pi^*\omega \in \Omega^2(U)$ invariante par \tilde{I}^* .

Supposons $M\ddot{O}$ orientable. Alors il existe (1.7) une forme-volume sur $M\ddot{O}$, c'est-à-dire une $\sigma \in \Omega^2(M\ddot{O})$ telle que, pour tout $\xi \in M\ddot{O}$, $\sigma(\xi) \neq 0$. Par définition (cf. IV.1.3) et par construction de la structure différentiable sur $M\ddot{O}$, il en résulte que $\pi^*\sigma$ est une forme-volume sur U , autrement dit que $\pi^*\sigma = \lambda \, dx \wedge dt$ où $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^∞ partout non-nulle.

Par ailleurs il est clair que $\tilde{I}^*(dx \wedge dt) = -dx \wedge dt$, et l'invariance de $\pi^*\sigma$ par \tilde{I}^* implique que, pour tout $(x,t) \in U$, $\lambda(x+1,-t) = -\lambda(x,t)$.

En particulier $\lambda(1,0) = -\lambda(0,0)$, d'où, par continuité de λ , un $c \in [0,1]$ tel que $\lambda(c,0) = 0$, et une contradiction. \square

Si la cohomologie de De Rham des variétés orientables est particulièrement riche de structure (et donc a priori plus aisément calculable) c'est que, sur une variété orientable de dimension n , on peut, une fois choisie une orientation, définir l'intégrale d'une n -forme à support compact.

Soit M une variété différentiable orientable de dimension n , \mathcal{A} un atlas orienté compatible avec la structure différentiable de M , $\omega \in \Omega_C^n(M)$.

On suppose d'abord qu'il existe une carte $(U, \phi, A) \in \mathcal{A}$ telle que $\text{Supp } \omega \subset U$. On pose $\alpha = (\phi^{-1})^*\omega \in \Omega_C^n(A)$. (Bien entendu si ω est définie à l'aide de \mathcal{A} , α n'est autre que la forme qui figure dans la définition IV.1.1 : cf. IV.2.3).

1.16. DEFINITION :

Dans ce cas, $\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha$.

La compacité du support de ω assure que cette dernière intégrale a un sens, mais la définition n'est cohérente que si elle ne dépend pas de la carte. On suppose donc qu'il existe une autre carte $(U, \psi, B) \in \mathcal{A}$ (quitte à prendre une intersection ce n'est pas une restriction de généralité de supposer que le même ouvert de M est

commun aux deux cartes), on pose $(\psi^{-1})^* \omega = \beta$ et on vérifie le

1.17. THEOREME :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \beta .$$

Démonstration : On note $\gamma = \psi \circ \phi^{-1} : A \rightarrow B$. Alors $\alpha = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\beta = b dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ où a, b sont des fonctions réelles de classe C^∞ à support compact définies sur A, B respectivement. Comme $\alpha = \gamma^* \beta$ par hypothèse, $a = J(\gamma) b \circ \gamma$, en notant J le jacobien et d'après II.3.2.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} J(\gamma)(x_1, \dots, x_n) b(\gamma(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Par ailleurs, regardant γ comme un changement de variables, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \beta &= \int_B \beta = \int_B b(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_A b(\gamma(x_1, \dots, x_n)) |J(\gamma)(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} b(\gamma(x_1, \dots, x_n)) |J(\gamma)(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Et comme \mathcal{A} est orienté par hypothèse ,

$$J(\gamma) = |J(\gamma)|, \text{ d'où } \int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \beta . \quad \square$$

Dans le cas général, soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de M par des ouverts de cartes de \mathcal{A} et $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Alors, pour toute $\omega \in \Omega_c^q(M)$, $\omega = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega$ et, pour tout $i \in I$, $\text{Supp}(\alpha_i \omega)$ est un compact de U_i (d'ailleurs vide sauf pour un nombre fini d'indices), ce qui permet de définir $\int_M \alpha_i \omega$ à l'aide de 1.16.

1.18. DEFINITION :

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \alpha_i \omega .$$

(En réalité la somme n'est étendue qu'à un sous-ensemble fini de I par compacité de $\text{Supp } \omega$).

Il faut ici encore vérifier la cohérence de la définition. Soit donc $\{V_j\}_{j \in J}$ un (autre) recouvrement de M par des ouverts de cartes de \mathcal{A} , $\{\beta_j\}_{j \in J}$ une partition de l'unité y subordonnée.

1.19. THEOREME :

$$\sum_{i \in I} \int_M \alpha_i \omega = \sum_{j \in J} \int_M \beta_j \omega$$

(les sommes étant toujours finies).

Démonstration : On considère le recouvrement $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ pour lequel la famille $\{\alpha_i \beta_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ est clairement une partition de l'unité. De plus, pour tout $i \in I$,

$$\int_M \alpha_i \omega = \int_M \alpha_i \left(\sum_{j \in J} \beta_j \omega \right) = \sum_{j \in J} \int_M \alpha_i \beta_j \omega ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_M \alpha_i \omega &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_M \alpha_i \beta_j \omega \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} \int_M \alpha_i \beta_j \omega . \end{aligned}$$

De même évidemment, $\sum_{j \in J} \int_M \beta_j \omega = \sum_{(i,j) \in I \times J} \int_M \alpha_i \beta_j \omega$. \square

1.20. REMARQUE : Il est clair sur la définition que l'intégrale est linéaire (cf.

1.22).

1.21. EXERCICE : Soit M une variété différentiable orientée de dimension m, N une variété différentiable orientée de dimension n. Alors $M \times N$ est une variété différentiable orientée de dimension $m+n$.

Si $\omega \in \Omega_C^m(M)$, $\sigma \in \Omega_C^n(N)$, alors $\omega \bar{\wedge} \sigma \in \Omega_C^{m+n}(M \times N)$ (cf. introduction à V.3.2) et

$$\int_{M \times N} \omega \bar{\wedge} \sigma = \left(\int_M \omega \right) \left(\int_N \sigma \right).$$

La réapparition de la cohomologie de De Rham s'opère alors à la faveur de la construction suivante :

pour toute variété différentiable M , orientable et de dimension n , le choix d'une orientation définit une forme linéaire

$$T : Z_C^n(M) = \Omega_C^n(M) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_M \omega.$$

1.22. THEOREME : La forme linéaire T est surjective et $B_C^n(M) \subset \text{Ker } T$.

D'où, par passage au quotient, le

1.23. COROLLAIRE : Pour toute variété orientable M de dimension n , le choix d'une orientation définit un épimorphisme $S : H_C^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour toute $\omega \in Z_C^n(M) = \Omega_C^n(M)$,

$$S([\omega]) = \int_M \omega.$$

En particulier $H_C^n(M) \neq 0$.

Démonstration de 1.22. :

(i) Surjectivité de T .

Il suffit de trouver une $\omega \in \Omega_C^n(M)$ telle que $\int_M \omega \neq 0$.

Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ (avec l'orientation canonique), la forme $\lambda dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ où $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ est la fonction, définie en IV.5.10, telle que $\lambda(u) = 1$ si $\|u\| \leq 1$ et $\lambda(u) = 0$ si $\|u\| \geq 2$, a bien un support compact et vérifie clairement

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n > 0.$$

Dans le cas général, prendre une carte (U, ϕ, A) de M compatible avec l'orientation et telle que $A = \mathbb{R}^n$ (cf. 1.7 (ii)). Par compacité du support, la forme $\lambda dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ définie ci-dessus induit une forme $\omega \in \Omega_C^n(U)$, d'où une $\tilde{\omega} \in \Omega_C^n(M)$ telle que $\tilde{\omega}|_U = \omega$ et $\tilde{\omega}|_{M \setminus \text{Supp } \omega} = 0$.

Par définition (1.16) :

$$\int_M \tilde{\omega} = \int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n > 0 .$$

(ii) Que l'intégrale d'une forme exacte soit nulle est l'énoncé d'une version faible du théorème de Stokes.

Si $M = \mathbb{R}^n$, soit

$$\theta = \sum_{p=1}^n \theta_p \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_p \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_C^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

où, pour tout entier p , $1 \leq p \leq n$, $\theta_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ à support compact. Alors

$$d\theta = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \frac{\partial \theta_p}{\partial x_p} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

$$\text{Or } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \, dx_1 \right] \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et, pour tout $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} (x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} (x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta_1(x, x_2, \dots, x_n) - \lim_{y \rightarrow -\infty} \theta_1(y, x_2, \dots, x_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\text{Supp } \theta_1$ est compact.

Un raisonnement analogue se tient pour $p = 2, \dots, n$, d'où, par addition,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta = 0 .$$

Dans le cas général, soit $\{(U_i, \phi_i, A_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M , compatible avec l'orientation et tel que, pour tout $i \in I$, $A_i = \mathbb{R}^n$; soit $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. Pour toute forme $\theta \in \Omega_C^{n-1}(M)$, on a, par linéarité

de d et de l'intégrale,

$$\int_M d\theta = \sum_{i \in J} \int_{U_i} d(\alpha_i \theta)$$

où J est un sous-ensemble de I , fini par compacité de $\text{Supp } \theta$. Soit, pour tout $i \in J$, $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{C}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ la forme telle que $\alpha_i \theta = \phi_i^* \omega_i$: par définition,

$$\begin{aligned} \int_{U_i} d(\alpha_i \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} d\omega_i \\ &= 0 \text{ d'après ce qui précède.} \end{aligned}$$

Par addition, $\int_M d\theta = 0$. \square

1.24. REMARQUE : Les espaces projectifs étant compacts, on a, pour tout entier n , $H_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{R}P^n) = H^n(\mathbb{R}P^n)$. La cohomologie calculée en V.5.19 et le Corollaire 1.23 montrent alors, sans passer par 1.10, que pour n pair $\mathbb{R}P^n$ n'est pas orientable.

1.25. REMARQUE : Etant donné deux variétés différentiables M et N , orientées et de même dimension n , et $f : M \rightarrow N$ une application propre de classe C^∞ , on peut certes écrire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{C}}^n(M) & \xrightarrow{S_M} & \mathbb{R} \\ f_{\mathbb{C}}^* \uparrow & & \nearrow S_N \\ H_{\mathbb{C}}^n(N) & & \end{array}$$

où S_M et S_N désignent les formes linéaires définies respectivement sur M et N comme en 1.23.

Mais ce diagramme n'est en général pas commutatif.

Par exemple, si M et N sont compactes et f constante, $f_{\mathbb{C}}^* = f^* = 0$, d'où $S_M \circ f^* \neq S_N$ puisque S_N reste surjective.

Ou encore, soit $M = N = S^1$, $f : S^1 \rightarrow S^1$ l'application induite par $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$. Alors $H_C^1(S^1) = H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ (cf. V.2.3) et $f_C^* = f^*$ est la multiplication par 2 (comme on le voit par un calcul direct de $f^*\sigma$, σ étant la forme-volume canonique (IV.6.1) dont la classe de cohomologie $[\sigma]$ engendre $H^1(S^1)$). Le diagramme n'est donc pas commutatif, bien que f^* soit un isomorphisme dans ce cas.

Toutefois,

1.26. **EXERCICE** : Si $f : M \rightarrow N$ est un C^∞ -difféomorphisme entre variétés différentiables connexes de même dimension n , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_C^n(M) & & \mathbb{R} \\ \uparrow f_C^* \cong & \searrow S_M & \\ H_C^n(N) & & \mathbb{R} \\ & \nearrow S_N & \end{array}$$

- est - commutatif si f conserve l'orientation (cf. 1.5).
- commutatif au signe près si f renverse l'orientation.

(Dans le cas où $M = N = \mathbb{R}^n$, on se retrouve face à la formule du changement de variables).

2. DUALITE DE POINCARÉ.

Nous réintroduisons la structure multiplicative de la cohomologie, provisoirement négligée, en reprenant les applications linéaires de IV. §7. Afin de faire le lien avec ce qui précède, nous regardons en particulier les applications $\lambda_C^{i,j}$ telles que $i+j$ soit la dimension de la variété.

Soit donc M une variété différentiable de dimension n et, pour tout entier $i \leq n$, l'application linéaire

$$\lambda_C^{i,n-i} : H^i(M) \otimes H_C^{n-i}(M) \rightarrow H_C^n(M) : [\omega] \otimes [\sigma] \mapsto [\omega \wedge \sigma].$$

Si M est orientable, le choix d'une orientation permet de prolonger celle-ci par l'épimorphisme S du paragraphe précédent et d'obtenir ainsi l'accouplement

$$D_M^i : H^i(M) \otimes H_C^{n-i}(M) \rightarrow \mathbb{R} : [\omega] \otimes [\sigma] \mapsto \int_M \omega \wedge \sigma \quad (i = 0, \dots, n)$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme des applications linéaires

$$P_M^i : H^i(M) \rightarrow H_C^{n-i}(M)^* : [\omega] \mapsto ([\sigma] \mapsto \int_M \omega \wedge \sigma) \quad (i = 0, \dots, n).$$

L'objet du présent paragraphe est de démontrer le

2.1. THEOREME DE DUALITE de Poincaré : Pour toute variété différentiable M orientée et de dimension n , et pour tout entier $i \leq n$, l'application linéaire

$$P_M^i : H^i(M) \rightarrow H_C^{n-i}(M)^*$$

est un isomorphisme. (Bien entendu, $*$ désigne ici le dual.)

2.2. REMARQUE : Il s'ensuivra immédiatement que si M est orientable et compacte (d'où, pour tout i , $H_C^i(M) = H^i(M)$) on a pour tout entier $i \leq n$

$$H^i(M) \cong H^{n-i}(M)^* \cong H^i(M)^{**},$$

ce qui prouve - résultat classique d'algèbre linéaire non élémentaire - que les espaces vectoriels de De Rham d'une variété différentiable compacte orientable sont de dimension finie. De plus si on note M cette variété et n sa dimension, alors, pour tout entier $i \leq n$, $H^i(M) \cong H^{n-i}(M)$.

Mais cf. 3.2.

La démonstration du théorème 2.1 se fait (presque...) directement dans le cas particulier où M est un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^n (2.3 à 2.8). Le cas général s'ensuit par étapes successives (2.14) à l'aide d'une machinerie algébrique traditionnelle mise au point de 2.9 à 2.13.

2.3. THEOREME : Si on en restreint l'hypothèse au cas où $M = \mathbb{R}^n$, le Théorème 2.1 est vrai.

Démonstration : Si $i \neq 0$, $H^i(\mathbb{R}^n) = H_C^{n-i}(\mathbb{R}^n) = 0$ (II.6.3 et V.4.19). Il suffit donc de considérer

$$P_{\mathbb{R}^n}^0 : H^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_C^n(\mathbb{R}^n)^*$$

Les deux espaces vectoriels étant de dimension 1 il suffit même de vérifier que $P_{\mathbb{R}^n}^0 \neq 0$. Or la fonction constante $\underline{1}$ (égale à 1 sur \mathbb{R}^n entier) est telle que

$$P_{\mathbb{R}^n}^0(\underline{1}) : H_C^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} : [\sigma] \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \sigma,$$

c'est-à-dire que $P_{\mathbb{R}^n}^0(\underline{1}) = S$, qui est un épimorphisme. A fortiori $P_{\mathbb{R}^n}^0(\underline{1})$ n'est pas la forme linéaire nulle, d'où $P_{\mathbb{R}^n}^0 \neq 0$. \square

2.4. COROLLAIRE : Si M est une boule ouverte de \mathbb{R}^n , P_M^i est un isomorphisme pour tout entier $i \leq n$.

Démonstration : Un homéomorphisme $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (on sait qu'ils abondent) fournit des isomorphismes $\phi^* : H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(M)$ et $\phi_C^* : H_C^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_C^*(M)$ (cf. IV.7.8), d'où $H^i(M) = 0$ pour $i > 0$, $H_C^j(M) = 0$ pour $j \neq n$ et $H^0(M) \cong H_C^n(M) \cong \mathbb{R}$.

Il en résulte que, pour $i > 0$, P_M^i est automatiquement un isomorphisme. Il en résulte aussi que les épimorphismes S_M et $S_{\mathbb{R}^n}$ sont des isomorphismes : il existe donc un $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_C^n(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{S_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R} \\ \alpha \phi_C^* \cong \downarrow & \cong & \uparrow \\ H_C^n(M) & \xrightarrow{S_M} & \mathbb{R} \end{array}$$

soit commutatif (si ϕ est un difféomorphisme, 1.26 garantit même que $\alpha = \pm 1$).

Par ailleurs, toujours d'après IV.7.8, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{R}^n) \cong H_C^n(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\lambda_C^{0,n}} & H_C^n(\mathbb{R}^n) \\ \phi^* \cong \phi_C^* \downarrow & & \cong \downarrow \phi_C^* \\ H^0(M) \cong H_C^n(M) & \xrightarrow{\lambda_C^{0,n}} & H_C^n(M) \end{array}$$

d'où, par juxtaposition de diagrammes, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\mathbb{R}^n) \otimes H_C^n(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{D_{\mathbb{R}^n}^0} & \mathbb{R} \\
 \alpha(\phi^* \otimes \phi_C^*) \downarrow \cong & & \uparrow \\
 H^0(M) \otimes H_C^n(M) & \xrightarrow{D_M^0} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Or il est très facile de vérifier que, dans ce cas où tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension 1, D_M^0 (resp. $D_{\mathbb{R}^n}^0$) est un isomorphisme ssi P_M^0 (resp. $P_{\mathbb{R}^n}^0$) en est un. Le diagramme précédent et 2.3 montrent donc que P_M^0 est bien un isomorphisme. \square

2.5. REMARQUE : Ce précédent diagramme peut se réécrire sous la forme

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{P_{\mathbb{R}^n}^0} & H_C^n(\mathbb{R}^n)^* \\
 \alpha\phi^* \downarrow & & \uparrow t\phi_C^* \\
 H^0(M) & \xrightarrow{P_M^0} & H_C^n(M)^*
 \end{array}$$

(cf. 4.1).

On peut encore sans algèbre généraliser un peu plus : au cas des ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n . En effet, démontrons par des moyens de pure topologie générale le

2.6. THEOREME : Un ouvert Γ convexe borné de \mathbb{R}^n est homéomorphe à la boule unité B .

Démonstration : Quitte à effectuer une translation qui (est un difféomorphisme...) on peut supposer que $0 \in \Gamma$. Tout revient à construire une sorte de pseudo-norme anisotrope pour laquelle Γ "ait l'air" d'une boule. De façon précise, on appelle jauge relative à Γ une application continue $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- (i) $\rho(x) = 0$ ssi $x = 0$;
 - (ii) $\rho(x) < 1$ ssi $x \in \Gamma$;
 - (iii) pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\alpha x) = \alpha \rho(x)$
- (comparer avec la condition "pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$) ;
- (iv) pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

2.7. LEMME : Une telle jauge existe.

Démonstration : Comme Γ est ouvert et borné, il existe deux réels strictement positifs r et R tels que $B(0, r) \subset \Gamma \subset B(0, R)$.

Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X_x = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in \Gamma\}$ on voit alors que $X_x \neq \emptyset$, que X_x n'est pas borné à droite, que $\inf X_x \leq \frac{\|x\|}{r}$ et que $\frac{\|x\|}{R} \notin X_x$. La convexité de Γ entraîne celle de X_x , et $\inf X_x \in X_x$ parce que Γ est ouvert. Finalement, si on pose $\rho(x) = \inf X_x$, on a $X_x =]\rho(x), +\infty[$ et $0 < \frac{\|x\|}{R} \leq \rho(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$. Ainsi ρ est définie si on ajoute la condition $\rho(0) = 0$.

Les propriétés (i) et (iii) sont immédiates.

Pour (ii), la condition est nécessaire parce que Γ est ouvert, suffisante parce que Γ est convexe, donc étoilé par rapport à 0.

La condition (iv) est triviale si x ou y sont nuls. On suppose désormais $\rho(x) \geq \rho(y) > 0$. Soit

$$x' = \frac{\rho(x) + \rho(y)}{\rho(x)} x \quad \text{et} \quad y' = \frac{\rho(x) + \rho(y)}{\rho(y)} y :$$

ainsi $\rho(x') = \rho(y') = \rho(x) + \rho(y)$.

Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\Gamma_\lambda = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \rho(z) < \lambda\}$ est homothétique (dans le rapport λ) de $\Gamma_1 = \Gamma$, donc convexe. Si $\lambda > \rho(x) + \rho(y)$, $x' \in \Gamma_\lambda$ et $y' \in \Gamma_\lambda$, et donc $x+y = \frac{\rho(x)}{\rho(x) + \rho(y)} x' + \frac{\rho(y)}{\rho(x) + \rho(y)} y' \in \Gamma_\lambda$, c'est-à-dire que $\rho(x+y) < \lambda$: ainsi $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Enfin la continuité de ρ en 0 résulte de la double inégalité vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\frac{\|x\|}{R} \leq \rho(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$. La continuité en tout point s'en déduit à l'aide

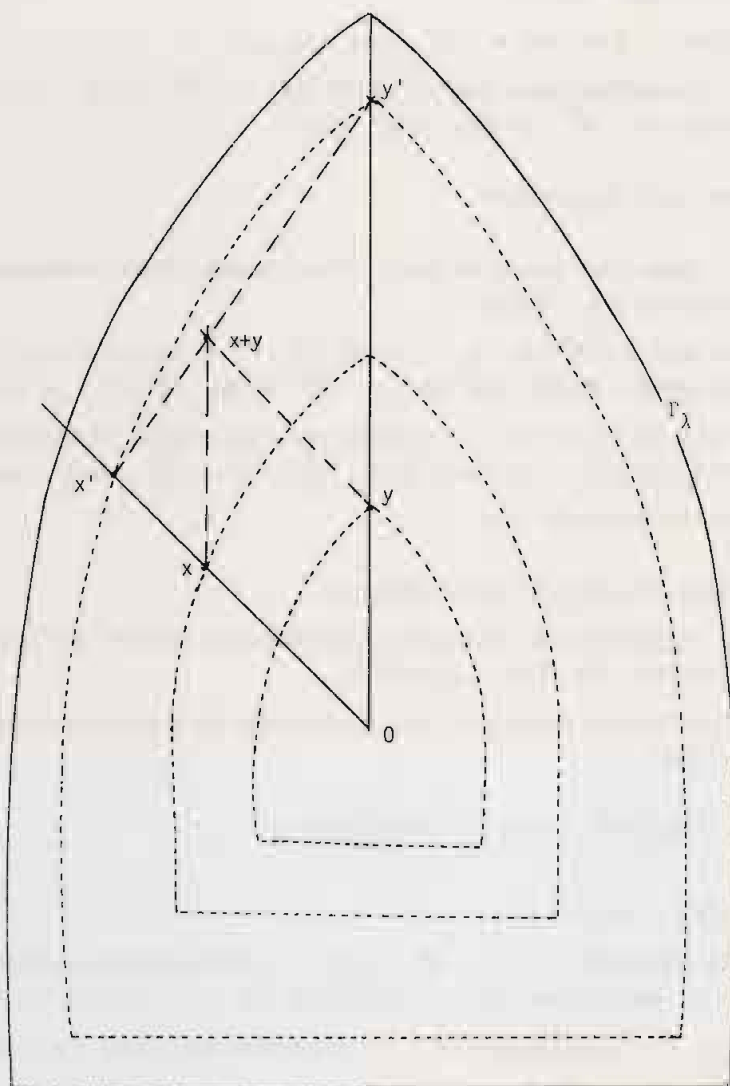


Figure : avec $\rho(x) > \rho(y) > 0$.

de (iv) (Noter, en écrivant $x = (x+y) - y$, que (iv) donne aussi l'inégalité $\rho(x) - \rho(-y) \leq \rho(x+y)$). \square

Fin de la démonstration de 2.6 : Pour montrer que Γ et B sont homéomorphes, il suffit alors, pour $x \in \Gamma \setminus \{0\}$, de poser $\phi(x) = \frac{\rho(x)}{\|x\|} x$; pour $y \in B \setminus \{0\}$, poser $\psi(y) = \frac{\|y\|}{\rho(y)} y$; poser $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Il est facile de vérifier que $\phi(\Gamma) \subset B$, que $\psi(B) \subset \Gamma$ et que $\phi : \Gamma \rightarrow B$ et $\psi : B \rightarrow \Gamma$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre. \square

Ainsi la première étape de la démonstration de 2.1 culmine-t-elle sur le

2.8. COROLLAIRE : Si Γ est un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^n , alors pour tout entier $i \leq n$

$$P_{\Gamma}^i : H^i(\Gamma) \rightarrow H_C^{n-i}(\Gamma)^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Calquée sur 2.4. \square

A partir de là, l'extension de 2.1 à des variétés plus compliquées requiert le secours de l'algèbre homologique. Le cadre classique, est la donnée de deux ouverts U et V d'une variété différentiable M , orientable et de dimension n , tels que $M = U \cup V$ (cf. 1.3). On en déduit deux suites exactes de Mayer-Vietoris, une "ordinaire" (V.2.1)

$$\rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow$$

et une "à supports compacts" (V.4.2)

$$\rightarrow H_C^k(U \cap V) \rightarrow H_C^k(U) \oplus H_C^k(V) \rightarrow H_C^k(M) \rightarrow H_C^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H_C^{k+1}(U) \oplus H_C^{k+1}(V) \rightarrow .$$

Vu la définition de l'homomorphisme de Poincaré, il est naturel de chercher à dualiser la deuxième suite ; on devrait alors déboucher sur une situation de lemme des Cinq propice aux généralisations.

Toute l'algèbre homologique nécessaire à la manœuvre est contenue dans les deux lemmes suivants :

2.9. LEMME :

(i) Si la suite de \mathbb{R} -espaces vectoriels et applications linéaires $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est exacte, il en est de même pour la suite $C^* \xrightarrow{t_g} B^* \xrightarrow{t_f} A^*$.

(ii) Si E et F sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels, $(E \oplus F)^*$ est canoniquement isomorphe à $E^* \oplus F^*$.

Démonstration :

(i) Evidemment, $t_f \circ t_g = t_{(g \circ f)} = t_0 = 0$. Réciproquement, soit $\beta \in B^*$ tel que $t_f(\beta) = 0$; autrement dit une application linéaire $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\beta \circ f = 0 : A \rightarrow \mathbb{R}$. Pour construire $\gamma \in C^*$ tel que $t_g(\gamma) = \beta$, on prend un supplémentaire D de $g(B)$ dans C , on décide que $\gamma|_D = 0$; pour $c \in g(B)$ on prend un $b \in B$ tel que $g(b) = c$ et on pose $\gamma(c) = \beta(b)$. Cette définition est sans ambiguïté puisque, si $g(b) = g(b')$, il existe un $a \in A$ tel que $b - b' = f(a)$, d'où $\beta(b) - \beta(b') = \beta(f(a)) = 0$. La linéarité de γ et le fait que $\gamma \circ g = \beta$ sont alors évidents.

(ii) Si $\alpha \in E^*$, $\beta \in F^*$, on définit $\alpha \oplus \beta \in (E \oplus F)^*$ en posant, pour tous $x \in E$, $y \in F$, $\alpha \oplus \beta(x+y) = \alpha(x) + \beta(y) \in \mathbb{R}$. Il est clair que $E^* \times F^* \rightarrow (E \oplus F)^*$: $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \oplus \beta$ et $(E \oplus F)^* \rightarrow E^* \times F^* : \gamma \mapsto (\gamma|_E, \gamma|_F)$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. Il est bien connu que $E^* \times F^* \cong E^* \oplus F^*$. \square

Et à cause de la condition de signe (cf. ch.IV, § 7) dans les algèbres de cohomologie, il faut aussi améliorer le lemme des Cinq (V.1.8) :

2.10. LEMME des Cinq gauche : Si les hypothèses de V.1.8 sont affaiblies pour ne supposer que la commutativité au signe près des carrés, la conclusion reste vraie.

Démonstration : Si le carré d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

vérifie $\beta \circ f = -f' \circ \alpha$, le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{-f'} & B' \end{array}$$

est commutatif. Par ailleurs $\text{Ker}(-f') = \text{Ker } f'$ et $(-f')(A') = f'(A')$. Le présent théorème se ramène donc en fait à la version "ordinaire" V.1.8, quitte à changer de signe certaines flèches horizontales. \square

On applique alors 2.9 et la définition de l'homomorphisme de Poincaré afin d'obtenir pour tout entier i le diagramme suivant (on convient que les éventuels espaces vectoriels et applications linéaires non définis pour cause de degré négatif sont remplacés par des zéros) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \rightarrow H^{i-1}(U) \oplus H^{i-1}(V) & \longrightarrow & H^{i-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^i(M) & \longrightarrow & H^i(U) \oplus H^i(V) & \longrightarrow & H^i(U \cap V) \longrightarrow \\
 \downarrow P_U^{i-1} \oplus P_V^{i-1} & & \downarrow P_{U \cap V}^{i-1} & & \downarrow P_M^i & & \downarrow P_U^i \oplus P_V^i & & \downarrow P_{U \cap V}^i \\
 \rightarrow H_C^{n-i+1}(U)^* \oplus H_C^{n-i+1}(V)^* & \longrightarrow & H_C^{n-i+1}(U \cap V)^* & \longrightarrow & H_C^{n-i}(M)^* & \longrightarrow & H_C^{n-i}(U)^* \oplus H_C^{n-i}(V)^* & \longrightarrow & H_C^{n-i}(U \cap V)^* \longrightarrow .
 \end{array}$$

Or, heureusement,

2.11. THEOREME : Ce diagramme est commutatif au signe près.

Démonstration :

1°) Les carrés (1), (3) et (4) sont commutatifs.

Appliquer aux ouverts adéquats et au bon degré le

2.12. LEMME : Si W, T sont deux ouverts d'une variété différentiable M , orientable et de dimension n , tels que $W \subset T$, alors, pour tout entier $j \leq n$, le diagramme suivant, où i désigne l'inclusion, est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^j(T) & \xrightarrow{i^*} & H^j(W) \\
 P_T^j \downarrow & & \downarrow P_W^j \\
 H_C^{n-j}(T)^* & \xrightarrow{i_*} & H_C^{n-j}(W)^* .
 \end{array}$$

Démonstration : Soit $\omega \in Z^j(T)$, $\sigma \in Z_C^{n-j}(W)$. Alors

$$t_{i*} \circ P_T^j([\omega]).[\sigma] = P_T^j([\omega]).i_*[\sigma] = \int_T \omega \wedge \tilde{\sigma}$$

où $\tilde{\sigma}|_W = \sigma$ et $\tilde{\sigma}|_{T \setminus W} = 0$. Comme $\text{Supp } \tilde{\sigma} = \text{Supp } \sigma \subset W$, $\text{Supp } (\omega \wedge \tilde{\sigma})$ est un compact de W et $(\omega \wedge \tilde{\sigma})|_W = (\omega|_W) \wedge \sigma$. Ainsi $\int_T \omega \wedge \tilde{\sigma} = \int_W (\omega|_W) \wedge \sigma$; ceci est précisément $P_W^j \circ i^*([\omega]).[\sigma]$. \square

2°) Le carré (2) est commutatif au signe près.

Les flèches horizontales représentent respectivement le bord ∂ de la suite exacte de Mayer-Vietoris ordinaire et la transposée t_δ du bord δ de la suite de Mayer-Vietoris à supports compacts. Ces bords sont explicitement connus (V.2.2 et V.4.3) : prenant une partition de l'unité $\{\alpha_U, \alpha_V\}$ subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$, on a, pour $\omega \in Z^{i-1}(U \cap V)$, $\partial([\omega]) = [\theta]$ où $\theta|_U = d(\alpha_V \omega)$ et $\theta|_V = -d(\alpha_U \omega)$; pour $\sigma \in Z_C^{n-i}(M)$, $\delta([\sigma]) = [\lambda]$ où $\lambda = d(\alpha_V \sigma)|_{U \cap V} = -d(\alpha_U \sigma)|_{U \cap V}$.

De là $P_M^i \circ \partial([\omega]).[\sigma] = \int_M \theta \wedge \sigma$, ce qu'on peut écrire (en négligeant de noter les restrictions évidentes)

$$\begin{aligned} \int_M \theta \wedge \sigma &= \int_M \theta \wedge (\alpha_U + \alpha_V)\sigma = \int_U \theta \wedge \alpha_U \sigma + \int_V \theta \wedge \alpha_V \sigma \\ &= \int_U d(\alpha_V \omega) \wedge \alpha_U \sigma + \int_V -d(\alpha_U \omega) \wedge \alpha_V \sigma \\ &= \int_{U \cap V} d(\alpha_V \omega) \wedge \alpha_U \sigma + \int_{U \cap V} -d(\alpha_U \omega) \wedge \alpha_V \sigma \\ &= (-1)^i \int_{U \cap V} \alpha_V \omega \wedge d(\alpha_U \sigma) + (-1)^{i-1} \int_{U \cap V} \alpha_U \omega \wedge d(\alpha_V \sigma) \end{aligned}$$

(cf. démonstrations de 1.22(ii) et IV.3.1)

$$\begin{aligned} &= (-1)^i \int_{U \cap V} \alpha_V \omega \wedge (-\lambda) + (-1)^{i-1} \int_{U \cap V} \alpha_U \omega \wedge \lambda \\ &= (-1)^{i-1} \int_{U \cap V} (\alpha_V + \alpha_U) \omega \wedge \lambda \\ &= (-1)^{i-1} \int_{U \cap V} \omega \wedge \lambda \\ &= (-1)^{i-1} P_{U \cap V}^{i-1}([\omega]).\delta([\sigma]) \\ &= (-1)^{i-1} t_{\delta} \circ P_{U \cap V}^{i-1}([\omega]).[\sigma]. \quad \square \end{aligned}$$

2.13. COROLLAIRE : Soit M une variété différentiable orientable de dimension n , U et V deux ouverts de M tels que $M = U \cup V$ (cf. 1.3). Si, pour tout entier $i \leq n$, les homomorphismes de Poincaré P_U^i , P_V^i et $P_{U \cap V}^i$ sont des isomorphismes, alors, pour tout entier $i \leq n$, P_M^i est un isomorphisme.

Démonstration : Appliquer 2.10 et 2.11. \square

L'outillage algébrique est désormais suffisant. Encore faut-il montrer que toute variété orientable de dimension n peut être reconstituée à partir d'ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n (pour lesquels la dualité de Poincaré a été établie en 2.8) en un sens compatible avec 2.13.

2.14. Fin de la démonstration de 2.1 :

1°) M est un ouvert de \mathbb{R}^n réunion finie d'ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n .

On procède par récurrence sur le nombre d'ouverts. Soit $M = X_1 \cup \dots \cup X_p$ où, pour tout entier i , $1 \leq i \leq p$, X_i est un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^n .

Si $p = 1$, il s'agit du Théorème 2.8, déjà démontré.

Si $p \geq 2$, soit $U = X_1 \cup \dots \cup X_{p-1}$ et $V = X_p$. Alors $U \cap V = (X_1 \cap X_p) \cup \dots \cup (X_{p-1} \cap X_p)$ est lui aussi réunion de $(p-1)$ ouverts convexes bornés. L'hypothèse de récurrence assure que, pour tout entier $i \leq n$, P_U^i , P_V^i et $P_{U \cap V}^i$ sont des isomorphismes : appliquer 2.13.

2°) M est un ouvert de \mathbb{R}^n réunion dénombrable disjointe d'ouverts dont chacun est du type précédent.

(Qu'un tel objet soit bien une variété différentiable orientable de dimension n est immédiat sur les définitions).

Soit $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la famille d'ouverts : pour tout $m \in \mathbb{N}$, X_m est réunion finie d'ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n et $M = \coprod_{m \in \mathbb{N}} X_m$ (le signe \coprod au lieu de \cup indique que la réunion est disjointe). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\iota_m : X_m \rightarrow M$ l'inclusion. Il en résulte des homomorphismes $\iota_m^* : H^*(M) \rightarrow H^*(X_m)$ et $(\iota_m)_* : H_C^*(X_m) \rightarrow H_C^*(M)$, d'où $\iota_* : H^*(M) \rightarrow \prod_{m \in \mathbb{N}} H^*(X_m)$ et $\iota_* : \oplus_{m \in \mathbb{N}} H_C^*(X_m) \rightarrow H_C^*(M)$.

On démontre à la manière de 2.9 (ii) que pour tout entier $j \leq n$

$$[\oplus_{m \in \mathbb{N}} H_C^j(X_m)]^* \cong \prod_{m \in \mathbb{N}} H_C^j(X_m)^*$$

(bien entendu dans ce cas où la famille est infinie le produit cartésien ne peut plus être remplacé par une somme directe). Vérifier -il n'y a pas d'embûche- que i^* et i_* sont des isomorphismes qui rendent le diagramme suivant commutatif pour tout entier $i \leq n$:

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(M) & \xrightarrow[\cong]{i^*} & \prod_{m \in \mathbb{N}} H^i(X_m) \\
 P_M^i \downarrow & & \downarrow \prod_{m \in \mathbb{N}} P_{X_m}^i \\
 H_C^{n-i}(M)^* & \xrightarrow[\cong]{i_*} & \prod_{m \in \mathbb{N}} H_C^{n-i}(X_m)^*
 \end{array}$$

Appliquer 1°) : $P_{X_m}^i$ est un isomorphisme pour tout m ; donc $\prod_{m \in \mathbb{N}} P_{X_m}^i$ est un isomorphisme. Donc P_M^i est un isomorphisme.

3°) M est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n .

On recouvre M par une suite exhaustive de compacts K_p (cf. IV.5.6) :

$$M = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p \text{ et, pour tout } p \in \mathbb{N}, K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1} \text{ (voir figure ci-contre).}$$

Par compacité de K_0 , il existe une famille finie $\{B_0, \dots, B_{p_0}\}$ de boules ouvertes contenues dans $\overset{\circ}{K}_1$ telle que $K_0 \subset B_0 \cup \dots \cup B_{p_0}$; on pose $V_0 = W_0 = B_0 \cup \dots \cup B_{p_0}$.

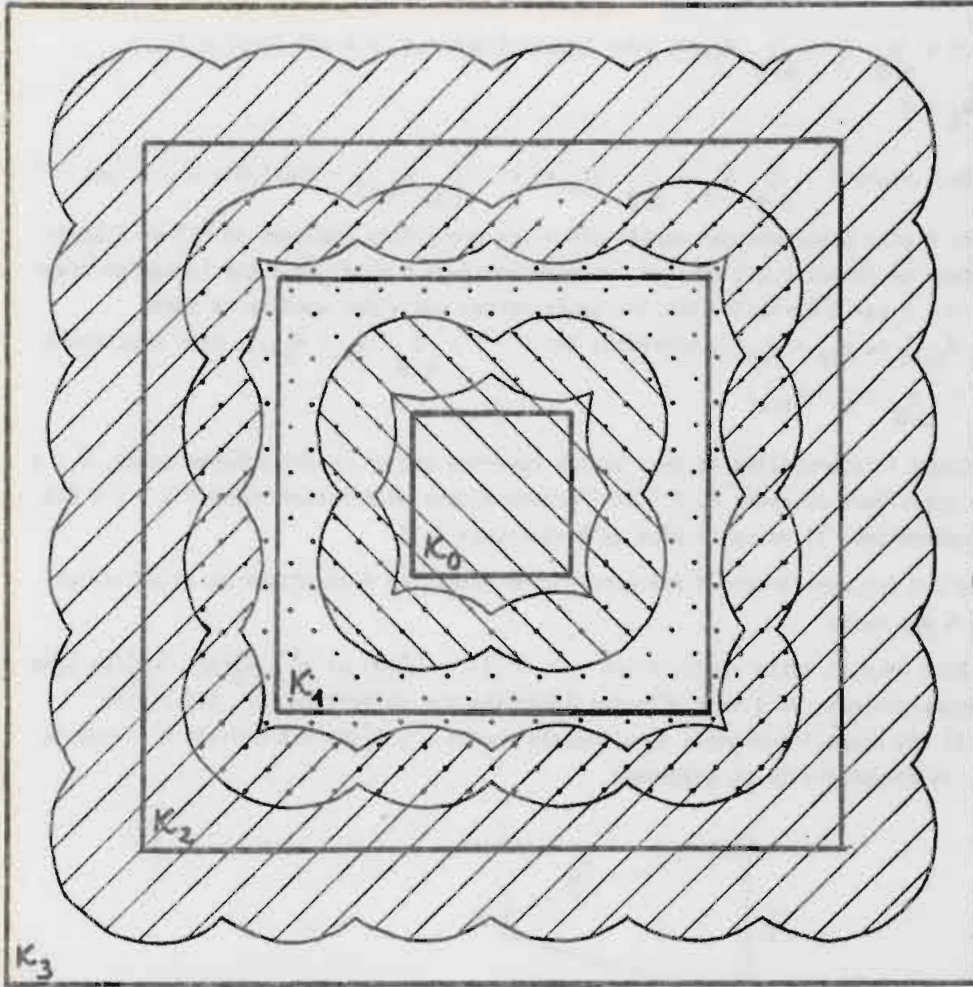
Alors $K_1 \setminus V_0$ est compact et contenu dans $\overset{\circ}{K}_2 \setminus K_0$; donc il existe une famille finie $\{B_{p_0+1}, \dots, B_{p_1}\}$ de boules ouvertes contenues dans $\overset{\circ}{K}_2 \setminus K_0$ telle que

$$K_1 \setminus V_0 \subset B_{p_0+1} \cup \dots \cup B_{p_1}. \text{ On pose } W_1 = B_{p_0+1} \cup \dots \cup B_{p_1} \text{ et } V_1 = V_0 \cup W_1 : \text{ ainsi } K_1 \subset V_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \text{ et } W_1 \cap K_0 = \emptyset.$$

Ensuite, on obtient une famille finie $\{B_{p_1+1}, \dots, B_{p_2}\}$ de boules ouvertes contenues dans $\overset{\circ}{K}_3 \setminus K_1$ telle que $K_2 \setminus V_1 \subset B_{p_1+1} \cup \dots \cup B_{p_2} = W_2$. Si $V_2 = V_1 \cup W_2$ on a $K_2 \subset V_2 \subset \overset{\circ}{K}_3$ et $W_2 \cap K_1 = \emptyset$; a fortiori $W_2 \cap V_0 = \emptyset$.

En itérant le processus, on construit une suite $(W_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de M possédant les propriétés suivantes (où l'on note $V_p = W_0 \cup \dots \cup W_p$) :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, W_p est une réunion finie de boules ouvertes contenues dans M ;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset V_p$;



W_0



W_1



W_2

pour tout $p \in \mathbb{N}$, $V_p \cap W_{p+2} = \emptyset$.

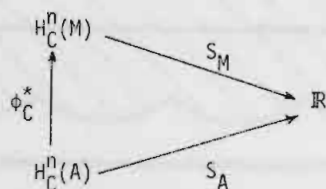
Ainsi $M = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} V_p = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} W_p$ et, pour tous entiers p, q tels que $|q-p| \geq 2$,
 $W_p \cap W_q = \emptyset$.

Soit alors $U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} W_{2p} = \coprod_{p \in \mathbb{N}} W_{2p}$ et $V = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} W_{2p+1}$: ainsi $M = U \cup V$. Les
 ouverts U et V possèdent par construction les propriétés requises au 2°) et l'homomorphisme de Poincaré est donc un isomorphisme pour U et V . En outre lorsqu'on développe $U \cap V$ par distributivité, les seuls termes non vides sont de la forme
 $W_{2p} \cap W_{2p+1}$ ou $W_{2p} \cap W_{2p-1}$, autrement dit $U \cap V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (W_k \cap W_{k+1})$, plus exactement
 $U \cap V = \coprod_{k \in \mathbb{N}} (W_k \cap W_{k+1})$.

Comme l'intersection de deux boules ouvertes est un ouvert convexe borné, $U \cap V$ entre aussi dans le cadre du 2°) et l'homomorphisme de Poincaré relatif à $U \cap V$ est un isomorphisme. Il ne reste plus qu'à appliquer 2.13.

4°) M est une variété différentiable de dimension n admettant un atlas (orienté !) à une carte.

Soit (M, ϕ, A) cette carte. Alors $\phi^* : H^*(A) \rightarrow H^*(M)$ et $\phi_C^* : H_C^*(A) \rightarrow H_C^*(M)$ sont des isomorphismes, ou à vrai dire des identités par définition (cf. III.7.7 et IV.2.3). Et comme l'intégrale de n'importe quelle $\omega \in \Omega_C^n(M)$ est définie à l'aide de 1.16, la commutativité du diagramme



est non seulement vraie mais tautologique.

Il en résulte pour tout entier $i \leq n$ la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(M) \otimes H_C^{n-i}(M) & \xrightarrow{D_M^i} & \mathbb{R} \\
 \uparrow \cong \quad \phi^* \otimes \phi_C^* & & \nearrow \\
 H^i(A) \otimes H_C^{n-i}(A) & \xrightarrow{D_A^i} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

donc celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(M) & \xrightarrow{P_M^i} & H_C^{n-i}(M)^* \\
 \uparrow \cong \quad \phi^* & & \downarrow \cong \quad t_{\phi_C^*} \\
 H^i(A) & \xrightarrow{P_A^i} & H_C^{n-i}(A)
 \end{array}$$

D'après 3°), P_A^i est un isomorphisme donc P_M^i en est un.

5°) M est une variété différentiable de dimension n admettant un atlas orienté à un nombre fini de cartes.

On procède par récurrence sur le nombre p de cartes telles que leurs ouverts X_1, \dots, X_p recouvrent M .

Si $p = 1$, la question a été résolue en 4°).

Si $p \geq 2$, poser $U = X_1 \cup \dots \cup X_{p-1}$ et $V = X_p$. Alors U, V et $U \cap V$ sont recouverts par moins de p ouverts de cartes et l'hypothèse de récurrence assure que l'homomorphisme de Poincaré est un isomorphisme pour U, V et $U \cap V$. Appliquer 2.13.

6°) M est une variété différentiable orientable de dimension n , réunion dénombrable disjointe de variétés du type précédent.

Procéder à la manière de 2°).

7°) M est une quelconque variété différentiable orientable de dimension n .

Si M est compacte, elle ressortit au cas 5°).

Si M est non-compacte, procéder comme en 3°) en remplaçant "boules ouvertes" par "ouverts de cartes" et en utilisant 6°). \square

2.15. REMARQUE : Il est souvent commode de reformuler 2.1. à l'aide de D_M^i plutôt que P_M^i . En fait, pour simplifier les notations, on pose même, pour tous $\xi \in Z^i(M)$, $\eta \in Z_C^{n-i}(M)$, $x = [\xi]$, $y = [\eta]$:

$$\langle x, y \rangle = D_M^i(x \otimes y)$$

$$(\text{=} P_M^i(x) \cdot y = \int_M \xi \wedge \eta) .$$

La variété M et le degré i ont disparu de l'écriture, le contexte se chargeant de les préciser. Le symbole \langle , \rangle est dit crochet de Kronecker.

2.16. EXERCICES :

(i) Lorsque $\langle xy, z \rangle$ a un sens, $\langle x, yz \rangle$ en a un aussi, et alors

$$\langle xy, z \rangle = \langle x, yz \rangle .$$

(ii) Si M est compacte et que $\langle x, y \rangle$ ait un sens, $\langle y, x \rangle$ en a un aussi, et alors

$$\langle x, y \rangle = (-1)^{(\deg x)(\deg y)} \langle y, x \rangle .$$

(iii) Si M est compacte de dimension n , $\xi \in Z^n(M)$, $x = [\xi]$ et $\underline{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur M , alors

$$\langle x, \underline{1} \rangle = \langle \underline{1}, x \rangle = S(x) = \int_M \xi .$$

(iv) Si M et N sont des variétés différentiables compactes orientées de dimensions respectives m et n , $x \in H^m(M)$, $y \in H^n(N)$, alors

$$\langle x \cup y, \underline{1}_{M \times N} \rangle = \langle x, \underline{1}_M \rangle \langle y, \underline{1}_N \rangle$$

(cf. 1.21).

De ce point de vue, le théorème 2.1 devient

2.17. THEOREME : Si M est une variété différentiable orientée de dimension n , alors pour tout entier $i \leq n$, l'application linéaire

$$H^i(M) \rightarrow H_C^{n-i}(M)^* : x \mapsto \langle x, \rangle$$

est un isomorphisme.

2.18. COROLLAIRE : Sous ces hypothèses, le crochet de Kronecker est non dégénéré, c'est-à-dire que

(i) étant donné un entier $i \leq n$ et un $x \in H^i(M)$, si pour tout $y \in H_C^{n-i}(M)$, $\langle x, y \rangle = 0$, alors $x = 0$; et

(ii) étant donné un entier $j \leq n$ et un $y \in H_C^j(M)$, si pour tout $x \in H^{n-j}(M)$, $\langle x, y \rangle = 0$, alors $y = 0$.

Démonstration : L'assertion (i) énonce que P_M^i est injective.

Par surjectivité de P_M^{n-j} , l'assertion (ii) est équivalente à

(ii') étant donné un entier $j \leq n$ et un $y \in H_C^j(M)$, si pour tout $\phi \in H_C^j(M)^*$, $\phi(y) = 0$, alors $y = 0$, ce qui est un résultat classique d'algèbre linéaire. \square

Parmi les conséquences immédiates du théorème de dualité de Poincaré on trouve le

2.19. THEOREME : Si M est une variété différentiable orientable connexe de dimension n non compacte, $H^n(M) = 0$.

Démonstration : Par dualité $H^n(M) \cong H_C^0(M) = Z_C^0(M)$. Or si $f \in \Omega_C^0(M)$ et $df = 0$, c'est que $f = 0$, seule fonction constante sur M à support compact. \square

2.20. COROLLAIRE : Soit M une variété différentiable connexe, orientable et de dimension n . Alors M est compacte ssi $H^n(M) \neq 0$, auquel cas $H^n(M) \cong \mathbb{R}$.

Démonstration : Utiliser 2.19 et 1.23, se rappelant que, pour M compacte, $H_C^n(M) = H^n(M)$. \square

On obtient aussi les résultats suivants, relatifs aux variétés de dimension paire, qu'on retrouvera plus loin (voir § 5) :

2.21. THEOREME : Si M est une variété différentiable orientable compacte de dimension $4n+2$, $H^{2n+1}(M)$ est de dimension finie paire.

Démonstration La finitude de $\dim H^{2n+1}(M)$ a déjà été observée (2.2). Dans ce cas, $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{2n+1}(M) \times H^{2n+1}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire alternée (car $2n+1$ est impair...) non dégénérée (2.18). Si une telle forme est définie sur un espace vectoriel de dimension finie k , sa matrice X par rapport à n'importe quelle base vérifie

$$\det X \neq 0$$

$$\text{et } {}^t X = -X$$

d'où $\det X = \det({}^t X) = (-1)^k \det X$, ce qui implique que k soit pair. \square

2.22. DEFINITIONS : Pour $n = 0$ (auquel cas M est une variété différentiable compacte de dimension 2) on dit que M est une surface orientable.

On pose $\dim H^1(M) = 2g$: g s'appelle le genre de la surface M (cf. 5.12 pour voir que g "compte les trous" de M).

Si M est une variété différentiable compacte orientable de dimension $4n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{2n}(M) \times H^{2n}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ définit cette fois une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $H^{2n}(M)$. On sait qu'une telle forme ayant r_+ valeurs propres positives et r_- valeurs propres négatives a pour signature $r_+ - r_-$.

2.23. DEFINITION : Si M est une variété différentiable orientable compacte de dimension $4n$, la signature de M est la signature de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{2n}(M) \times H^{2n}(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(cf. 5.13, 5.14).

Enfin nous montrons comment la dualité de Poincaré permet de déterminer la structure multiplicative des algèbres de cohomologie des espaces projectifs complexes.

Nous avons déjà établi leur structure vectorielle (V.4.21) :

$$H^k(\mathbb{C}P^n) \begin{cases} \cong \mathbb{R} & \text{si } k = 2\ell, 0 \leq \ell \leq n \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme il s'agit d'algèbres graduées, pour tout $x \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ et tout entier i , $x^i \in H^{2i}(\mathbb{C}P^n)$.

2.24. LEMME : Soit r un entier, $r \geq 2$. On suppose qu'il existe un $y \in H^2(\mathbb{C}P^r)$ tel que $y^{r-1} \neq 0$. Alors $y^r \neq 0$.

Démonstration : Comme $\mathbb{C}P^r$ est compact, $H_C^*(\mathbb{C}P^r) = H^*(\mathbb{C}P^r)$; en particulier, $\langle , \rangle : H^2(\mathbb{C}P^r) \times H^{2r-2}(\mathbb{C}P^r) \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\langle y, y^{r-1} \rangle = 0$, il résulterait de la non-dégénérescence du crochet de Kronecker, et du fait que $\dim H^2(\mathbb{C}P^r) = \dim H^{2r-2}(\mathbb{C}P^r) = 1$, que $y = 0$ ou $y^{r-1} = 0$, donc de toute façon $y^{r-1} = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi $\langle y, y^{r-1} \rangle \neq 0$.

Mais (2.16(i) et (iii))

$$\langle y, y^{r-1} \rangle = \langle \underline{1}, y^r \rangle,$$

d'où $y^r \neq 0$. \square

2.25. THEOREME : Pour tout entier $n \geq 1$, si x est un élément non nul de $H^2(\mathbb{C}P^n)$, alors la première puissance de x qui soit nulle est x^{n+1} .

Démonstration : Si $n = 1$ le résultat est trivial, et dans tous les cas on sait déjà que $x^{n+1} = 0$.

Supposons qu'il existe un entier i , $2 \leq i \leq n$, tel que $x^{i-1} \neq 0$ et $x^i = 0$. On considère l'inclusion $\iota : \mathbb{C}P^i \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$, composée des inclusions classiques $\mathbb{C}P^i \subset \mathbb{C}P^{i+1} \subset \dots \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ (cf. V.4.21 (iii)) et fournissant par conséquent pour tout entier $k < 2i$ un isomorphisme

$$\iota_k^* : H^k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\cong} H^k(\mathbb{C}P^i)$$

où ι_k^* est la restriction de ι^* à $H^k(\mathbb{C}P^n)$.

Comme ι^* est un homomorphisme d'algèbres,

$$\iota^*(x)^{i-1} = \iota^*(x^{i-1}) = \iota_{2i-2}^*(x^{i-1}) \neq 0$$

et $\iota^*(x)^i = \iota^*(x^i) = \iota_{2i}^*(x^i) = 0$, ce qui contredit le Lemme 2.24 avec $r = i$ et $y = \iota(x)$. \square

2.26. COROLLAIRE : Pour tout entier n , $H^*(\mathbb{C}P^n)$ est une algèbre de polynômes tronquée :

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}[X]/(X^{n+1}) .$$

Démonstration :

Si $n = 0$, le résultat est trivial.

Si $n = 1$, on retrouve bien la cohomologie de S^2 .

Pour $n \geq 2$, prendre un élément non nul $x \in H^2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$: il existe alors un unique homomorphisme d'algèbres

$$\phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^n)$$

tel que $\phi(X) = x$.

D'après 2.25, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, x^i est un générateur de l'espace vectoriel $H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$, d'où la surjectivité de ϕ . Enfin il est clair (toujours 2.25) que $\text{Ker } \phi$ est l'idéal engendré par X^{n+1} . \square

Pour les Grassmanniennes complexes, voir 5.17 et la suite.

3. A VARIÉTÉ COMPACTE COHOMOLOGIE FINIE, FORMULE DE KÜNNETH : SUITE ET FIN.

La dualité de Poincaré a permis de montrer que, si M est une variété différentiable compacte et orientable, alors, pour tout entier k , $H^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie : cf. 2.2.

La première partie de ce paragraphe a pour but de se débarrasser de l'hypothèse d'orientabilité dans cette assertion. En fait nous étendrons même le résultat à une classe plus vaste de variétés :

3.1. DEFINITION : Une variété différentiable M de dimension n est dite de type fini s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M vérifiant les conditions suivantes :

- (i) I est fini
- (ii) pour tout $J \subset I$, $\bigcap_{i \in J} U_i$ est soit \emptyset soit homéomorphe à \mathbb{R}^n .

On appelle type de M le nombre minimum d'ouverts nécessaire pour former un tel recouvrement.

Il n'est pas étonnant que cette définition se prête bien aux démonstrations par récurrence, comme on le vérifie tout de suite :

3.2. THEOREME : Si M est une variété différentiable de type fini, alors, pour tout entier k , $H^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration : La récurrence se fait sur le type de M .

Si M est de type 1, ou bien $M = \emptyset$, ou bien M est homéomorphe à \mathbb{R}^n , et le résultat est évident.

Supposons le théorème établi jusqu'au type $r-1$ inclus et soit M une variété différentiable de type r : $M = U_1 \cup \dots \cup U_r$ où la famille $\{U_i\}_{1 \leq i \leq r}$ vérifie 3.1 (ii). On pose $U = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$ et $V = U_r$; alors $U \cap V = (U_1 \cap U_r) \cup \dots \cup (U_{r-1} \cap U_r)$, U et $U \cap V$ sont de type au plus $r-1$ et V est de type 1 : par hypothèse de récurrence, pour tout entier k , $H^k(U)$, $H^k(V)$ et $H^k(U \cap V)$ sont de dimension finie. De la suite exacte de Mayer-Vietoris (V.2.1) peut s'extraire pour tout k la suite exacte

$$H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^k(M) \xrightarrow{i} H^k(U) \oplus H^k(V).$$

Ainsi $H^k(M)$ est somme directe de $\text{Im } \partial$ et d'un sous-espace vectoriel envoyé isomorphiquement par i sur un sous-espace vectoriel de $H^k(U) \oplus H^k(V)$: $H^k(M)$ est de dimension finie comme somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension finie. \square

Il ne reste plus qu'à montrer qu'une variété compacte est de type fini. La clef du raisonnement tient dans le

3.3. LEMME : Soit U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n , $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme (de classe C^∞), Ω un ouvert de V dont l'adhérence $\bar{\Omega}$ soit un compact de V .

Alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $b \in \bar{\Omega}$:

- (i) la boule ouverte $B(b, \varepsilon_0)$ soit incluse dans V ,
- (ii) pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon))$ soit convexe.

Démonstration :

1° Notations et préliminaires.

Soit $\psi = \phi^{-1} : V \rightarrow U$ et $\Xi = \psi(\bar{\Omega})$. Si $x \in U$ et $y = \phi(x)$, ψ est dérivable en y et $\psi'(y) = \phi'(x)^{-1}$.

Comme $\bar{\Omega}$ est un compact de V , $\bar{\Xi} = \psi(\bar{\Omega})$ est un compact de U : il existe donc une famille finie $\{B_1, \dots, B_p\}$ de boules ouvertes de \mathbb{R}^n telle que $\bar{\Xi} \subset B_1 \cup \dots \cup B_p$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\bar{B}_i \subset U$. On pose $\Xi' = B_1 \cup \dots \cup B_p$, $\bar{\Omega}' = \phi(\Xi')$, d'où $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}'$. Par finitude, $\bar{\Xi}' = \bar{B}_1 \cup \dots \cup \bar{B}_p$: c'est un compact de U ; $\bar{\Omega}' = \phi(\bar{\Xi}')$ est un compact de V .

(Dessin ci-contre).

Par compacité de $\bar{\Xi}$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \bar{\Xi}$, $B(x, \alpha) \subset \bar{\Xi}'$.

Etant donné que, pour tous $x \in U$, $y \in V$, $\phi'(x)$ et $\psi'(y)$ sont des isomorphismes, on a

$$K = \sup_{x \in \bar{\Xi}'} \|\phi'(x)\| > 0 \text{ et } L = \sup_{y \in \bar{\Omega}'} \|\psi'(y)\| > 0 .$$

Alors, si $x \in \bar{\Xi}'$, $y \in \bar{\Omega}'$, les inégalités suivantes sont vraies pour tous $h, k \in \mathbb{R}^n$:

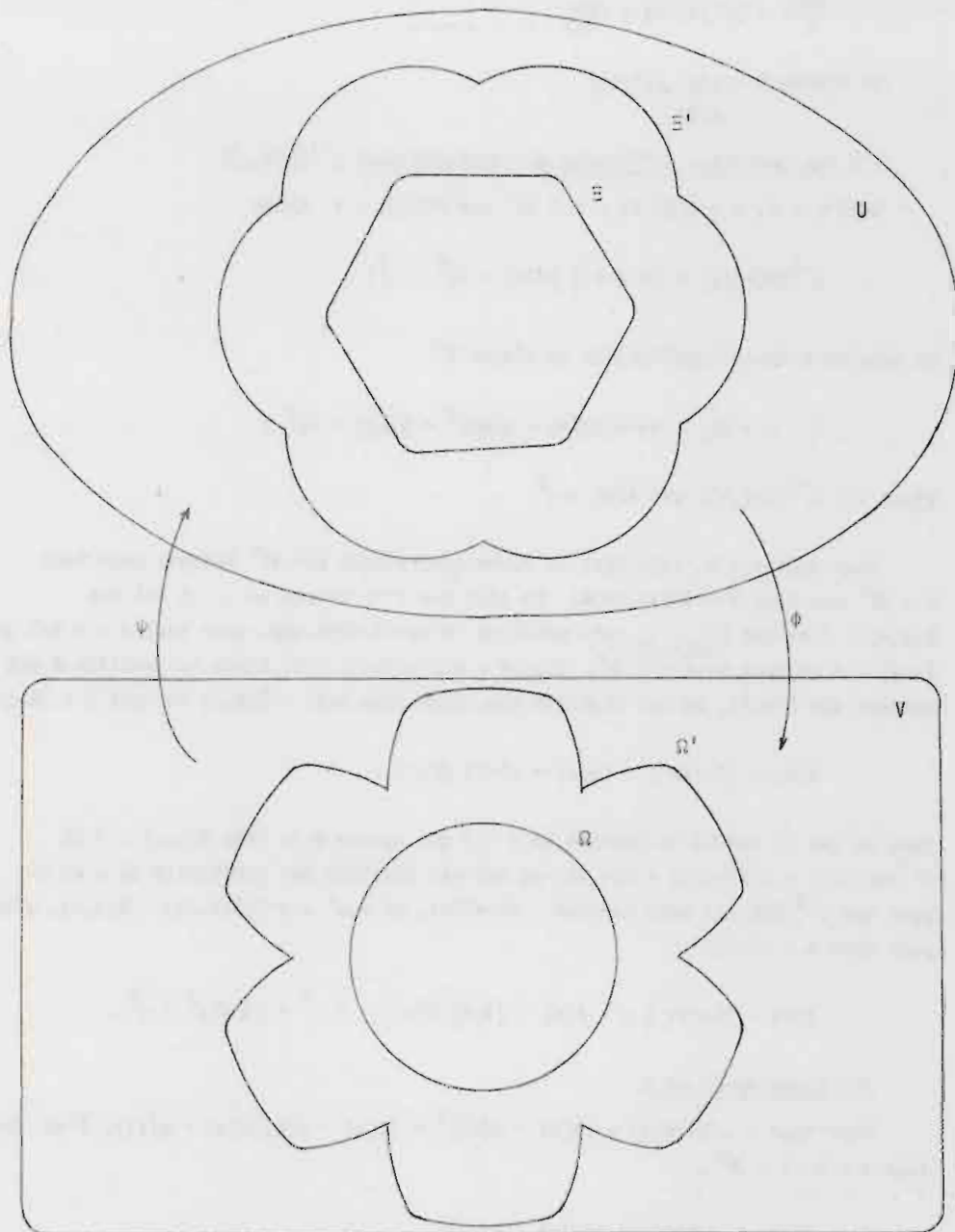
$$\|\phi'(x) \cdot h\| \leq \|\phi'(x)\| \cdot \|h\| \leq K \|h\|$$

et $\|\psi'(y) \cdot k\| \leq \|\psi'(y)\| \cdot \|k\| \leq L \|k\|$;

en particulier si $y = \phi(x)$, $h \neq 0$ et $k = \phi'(x) \cdot h$ (d'où $h = \psi'(y) \cdot k$),

$$\frac{\|\phi'(x) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{\|k\|}{\|\psi'(y) \cdot k\|} \geq \frac{1}{L} :$$

cela entraîne que, pour tous $x \in \bar{\Xi}$ et $h \in \mathbb{R}^n$,



$$\frac{\|h\|}{L} \leq \|\phi'(x) \cdot h\| \leq K\|h\|.$$

On notera $M = \sup_{x \in \Xi'} \|\phi''(x)\|$.

2°) Une condition suffisante de convexité pour $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon))$.

Soit $b \in V$, $a = \phi(b)$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(b, \varepsilon) \subset V$. Alors

$$\phi^{-1}(B(b, \varepsilon)) = \{x \in U \mid \|\phi(x) - b\|^2 < \varepsilon^2\};$$

on considère donc l'application de classe C^∞

$$\tilde{a} : U \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \|\phi(x) - \phi(a)\|^2 = \|\phi(x) - b\|^2 :$$

ainsi $x \in \phi^{-1}(B(b, \varepsilon))$ ssi $\tilde{a}(x) < \varepsilon^2$.

Pour tout $x \in U$, soit $Q(x)$ la forme quadratique sur \mathbb{R}^n définie pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ par $Q(x) \cdot h = \tilde{a}''(x) \cdot (h, h)$. On sait que s'il existe un $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U$ et que $Q|_{B(a, \delta)}$ soit positive (c'est-à-dire que, pour tout $x \in U$ tel que $\|x-a\| < \delta$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $Q(x) \cdot h = \tilde{a}''(x) \cdot (h, h) \geq 0$) alors la fonction \tilde{a} est convexe sur $B(a, \delta)$, ce qui signifie que, pour tous $x, x' \in B(a, \delta)$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\tilde{a}(tx + (1-t)x') \leq t\tilde{a}(x) + (1-t)\tilde{a}(x').$$

Dans ce cas il suffit de prendre un $\varepsilon > 0$ qui assure à la fois $B(b, \varepsilon) \subset V$ et $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon)) = \psi(B(b, \varepsilon)) \subset B(a, \delta)$ -ce qui est possible par continuité de ψ en b - pour que $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon))$ soit convexe : en effet, si $x, x' \in \phi^{-1}(B(b, \varepsilon)) \subset B(a, \delta)$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\tilde{a}(tx + (1-t)x') \leq t\tilde{a}(x) + (1-t)\tilde{a}(x') < t\varepsilon^2 + (1-t)\varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

3°) Etude de \tilde{a}'' et Q .

Pour tout $x \in U$, $\tilde{a}(x) = \|\phi(x) - \phi(a)\|^2 = (\phi(x) - \phi(a)) \cdot (\phi(x) - \phi(a))$, d'où, pour tous $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{a}'(x) \cdot h = 2(\phi'(x) \cdot h) \cdot (\phi(x) - \phi(a))$$

et, pour tous $x \in U$, $(h, k) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\tilde{a}''(x).(h, k) = 2(\phi''(x).(h, k) | \phi(x) - \phi(a)) + 2(\phi'(x).h | \phi'(x).k) ;$$

en particulier, pour tous $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(x).h = \tilde{a}''(x).(h, h) = 2(\phi''(x).(h, h) | \phi(x) - \phi(a)) + 2 \|\phi'(x).h\|^2 .$$

L'inégalité de Schwarz assure que, pour tous $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$,

$$(\phi''(x).(h, h) | \phi(x) - \phi(a)) \geq - \|\phi''(x).(h, h)\| \cdot \|\phi(x) - \phi(a)\|$$

d'où

$$Q(x).h \geq 2[\|\phi'(x).h\|^2 - \|\phi''(x).(h, h)\| \cdot \|\phi(x) - \phi(a)\|] .$$

$$\text{Si } x \in \Xi', \|\phi'(x).h\| \geq \frac{h}{L} \text{ et } \|\phi''(x).(h, h)\| \leq S \|h\|^2 \text{ d'après 1}^\circ).$$

Si $a \in \Xi$ et $\|x-a\| < \alpha$, $x \in B(a, \alpha) \subset \Xi'$: le théorème des accroissements finis s'applique à ϕ sur le segment $[x, a] \subset \Xi'$, d'où $\|\phi(x) - \phi(a)\| \leq K\|x-a\|$.

Finalement, pour $a \in \Xi$ et $x \in U$ tel que $\|x-a\| < \alpha$ (d'où $x \in \Xi'$), on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(x).h \geq 2\|h\|^2 \left[\frac{1}{L} - SK\|x-a\| \right] .$$

Si $S > 0$, on pose $\delta = \inf(\alpha, \frac{1}{LSK})$, sinon $\delta = \alpha$: il est capital d'observer que δ ne dépend que de ϕ et du recouvrement $\{B_1, \dots, B_p\}$, et ne dépend pas de a . Alors, si $a \in \Xi$, $Q|_{B(a, \delta)}$ est positive.

4°) Fin de la démonstration :

Sous les hypothèses de l'énoncé et avec les notations de 1°), on pose, à la suite de l'étude précédente,

$$\delta = \begin{cases} \alpha & \text{si } S = 0 \\ \inf(\alpha, \frac{1}{LSK}) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad : \text{ ainsi } \delta > 0$$

Par compacité de $\bar{\Omega}'$, $\psi|_{\bar{\Omega}'}$ est uniformément continue : il existe un $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tous $y, b \in \bar{\Omega}'$, si $\|y-b\| < \varepsilon_1$ alors $\|\psi(y) - \psi(b)\| < \delta$.

Par compacité de $\bar{\Omega}$, il existe un $\varepsilon_2 > 0$ tel que, pour tout $b \in \bar{\Omega}$, $B(b, \varepsilon_2) \subset \Omega'$.

On pose $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$.

On prend $b \in \bar{\Omega}$ et $a = \psi(b) \in \bar{\Xi}$:

(i) comme $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_2$, $B(b, \varepsilon_0) \subset \Omega' \subset V$;

(ii) comme $B(b, \varepsilon_0) \subset \Omega'$ et $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, si $y \in B(b, \varepsilon_0)$ alors $\psi(y) \in B(a, \delta)$, autrement dit $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon_0)) \subset B(a, \delta)$; a fortiori, pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon)) \subset B(a, \delta)$: d'après 3°) et 2°) $\phi^{-1}(B(b, \varepsilon))$ est convexe. \square

3.4. THEOREME : Si M est une variété différentiable compacte, M est de type fini.

Démonstration : Soit $n = \dim M$. On part d'un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de M où I est fini et, pour tout $i \in I$, U_i est l'ouvert d'une carte $\phi_i : U_i \rightarrow A_i \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. On pose, pour tout $i \in I$, $\Xi_i = \alpha_i^{-1}(]0, 1])$ et $\Omega_i = \phi_i(\Xi_i)$; aussi, comme d'habitude, pour tous $i, j \in I$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $A_{ij} = \phi_i(U_{ij})$, $\phi_{ij} = \phi_i \circ (\phi_j^{-1}|_{A_{ji}})$: ainsi $M = \bigcup_{i \in I} \Xi_i$ et, pour tout $i \in I$, Ξ_i (resp. Ω_i) est un ouvert relativement compact dans U_i (resp. A_i).

Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe pour tout $i \in I$ un ensemble fini K_i et une famille $\{y_{ik}\}_{k \in K_i}$ d'éléments de $\bar{\Omega}_i$ tels que $\bar{\Omega}_i \subset \bigcup_{k \in K_i} B(y_{ik}, \varepsilon)$. Soit $K = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times K_i)$: la famille $\{\phi_i^{-1}(B(y_{ik}, \varepsilon))\}_{(i,k) \in K}$ est un recouvrement ouvert fini de M . Pour trouver à quelle condition 3.1 (ii) peut être satisfait, considérons d'abord, pour $(i,k) \in K$, $(j,l) \in K$, l'intersection

$$T_{ikjl} = \phi_i^{-1}(B(y_{ik}, \varepsilon)) \cap \phi_j^{-1}(B(y_{jl}, \varepsilon)) \subset U_{ij}.$$

On a $\phi_j(T_{ikjl}) = \phi_{ji}(B(y_{ik}, \varepsilon)) \cap B(y_{jl}, \varepsilon)$

$$= \phi_{ij}^{-1}(B(y_{ik}, \varepsilon)) \cap B(y_{jl}, \varepsilon) \subset A_{ji} \subset \mathbb{R}^n.$$

D'après 3.3, il existe un $\varepsilon_{ij} > 0$ tel que, si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{ij}$, $\phi_{ij}^{-1}(B(y_{ik}, \varepsilon))$ soit convexe. (Si $i = j$, ϕ_{ij} est l'identité, 3.3 est trivial, ε_{ij} arbitraire). Alors

$\phi_j(T_{ijk})$ est un convexe borné de \mathbb{R}^n (éventuellement \emptyset).

Pour itérer ce raisonnement, si $L \subset K$, on choisit un indice quelconque $j \in I$ figurant dans L : $\bigcap_{(i,k) \in L} \phi_i^{-1}(B(y_{ik}, \epsilon))$ est envoyé homéomorphiquement par ϕ_j sur un convexe borné de \mathbb{R}^n (éventuellement \emptyset), pourvu que $0 < \epsilon \leq \inf_{i,j} \epsilon_{ij}$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des indices $i \in I$ qui figurent dans L .

Il suffit donc de faire la construction précédente avec $\epsilon = \inf_{(i,j) \in I \times I} \epsilon_{ij}$ pour obtenir un recouvrement de M satisfaisant 3.1, puisque, d'après 2.6, un ouvert convexe borné non vide de \mathbb{R}^n est homéomorphe à \mathbb{R}^n . \square

3.5. COROLLAIRE : Soit M une variété différentiable compacte (orientable ou non). Pour tout entier k , $H^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration : Utiliser 3.2 et 3.4. \square

Nous sommes ainsi conduits à remplacer la version "forte" (V.3.1bis) du théorème de Künneth, qui reste à démontrer, par une version plus forte encore, mais susceptible d'un traitement aisé par récurrence :

3.6. THEOREME (Künneth) : Soit X une variété différentiable de type fini (par exemple une variété compacte) et Y une variété différentiable quelconque.

Alors le cup-produit (V.3.2) induit un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y) .$$

Démonstration : Par récurrence sur le type r de X .

Si $r = 1$ et $X = \emptyset$, d'où $X \times Y = \emptyset$, $H^*(X) = H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y) = H^*(X \times Y) = 0$.

Si $r = 1$, X étant homéomorphe à \mathbb{R}^n , on est ramené à vérifier que, pour tout entier i ,

$$\cup : H^0(\mathbb{R}^n) \otimes H^i(Y) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n \times Y)$$

est un isomorphisme. Il suffit de considérer le diagramme commutatif induit par l'inclusion ι d'un point dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\{pt\}) \otimes H^i(Y) & \xrightarrow{\cup} & H^i(\{pt\} \times Y) \cong H^i(Y) \\
 \uparrow \iota^* \otimes Id & & \uparrow (\iota \times Id_Y)^* \\
 H^0(\mathbb{R}^n) \otimes H^i(Y) & \xrightarrow{\cup} & H^i(\mathbb{R}^n \times Y) .
 \end{array}$$

On sait que ι^* et $(\iota \times Id_Y)^*$ sont des isomorphismes (II.6.3) de même que la flèche horizontale du haut (cf. V.3.1bis (ii)) : donc la flèche du bas l'est également, ce qui établit le théorème dans ce cas.

On suppose $r > 1$ et le théorème vrai jusqu'au type $r-1$ inclus. Si $\{U_1, \dots, U_r\}$ désigne un recouvrement de X vérifiant les conditions 3.1, on pose $U = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$ et $V = U_r$. Alors U et $U \cap V$ sont au plus de type $r-1$ et V est de type 1 : par hypothèse de récurrence, pour tout entier k ,

$$\cup : [H^*(U) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k \longrightarrow H^k(U \times Y),$$

$$\cup : [H^*(V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k \longrightarrow H^k(V \times Y)$$

et $\cup : [H^*(U \cap V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k \longrightarrow H^k((U \cap V) \times Y)$

sont des isomorphismes (où $[H^*(U) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k = \bigoplus_{i+j=k} H^i(U) \otimes H^j(Y)$; de même pour les deux autres).

On se réfère alors au diagramme commutatif (Δ) de V.3.1.bis (où $U' = U \times Y$, $V' = V \times Y$) pour conclure. \square

L'hypothèse de finitude sur le type de X n'est pas seulement une commodité de démonstration. Le théorème devient faux si on la supprime, comme on peut voir sur le

3.7. CONTRE-EXEMPLE : Si $X = Y = \mathbb{N}$, $H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y)$ et $H^*(X \times Y)$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration : Il s'agit ici de variétés de dimension 0, d'où $H^*(\mathbb{N}) = H^0(\mathbb{N})$ et $H^*(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = H^0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. En outre $H^0(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ puisque une application de classe C^{∞} n'est dans ce cas rien de plus qu'une fonction. De même $H^0(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, dont les éléments peuvent être notés sous forme de matrices infinies à coefficients réels.

Le cup-produit $\cup : H^0(\mathbb{N}) \otimes H^0(\mathbb{N}) \rightarrow H^0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ se réduit à la multiplication : si $f, g \in H^0(\mathbb{N})$ et $x, y \in \mathbb{N}$, $(f \cup g)(x, y) = f(x) g(y)$, soit, en notation matricielle,

$$f \cup g = \begin{pmatrix} f(1)g(1) & f(1)g(2) & \dots & f(1)g(y) & \dots \\ f(2)g(1) & f(2)g(2) & \dots & f(2)g(y) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ f(x)g(1) & f(x)g(2) & \dots & f(x)g(y) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} .$$

On voit immédiatement qu'une telle matrice est de rang au plus 1, tous ses déterminants d'ordre 2 étant nuls. Il en résulte qu'une combinaison linéaire finie de telles matrices est de rang fini (démonstration facile par récurrence sur la longueur de la combinaison linéaire). Ainsi l'image par \cup de $H^0(\mathbb{N}) \otimes H^0(\mathbb{N})$ ne contient que des matrices de rang fini.

Or la matrice

$$I_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

n'est évidemment pas de rang fini. \square

Par contre nous allons établir une formule de Künneth en cohomologie à supports

compacts, valide sans restriction sur les variétés qui y figurent.

On observe d'abord que, étant donné deux variétés différentiables X et Y , si $\omega \in \Omega_C^1(X)$ et $\theta \in \Omega_C^1(Y)$, alors (avec les notations de l'introduction à V.3.2) :

$$\begin{aligned} \text{Supp}(\omega \wedge \theta) & \subset \text{Supp}(p^*\omega) \cap \text{Supp}(q^*\theta) \\ & = ((\text{Supp } \omega) \times Y) \cap (X \times (\text{Supp } \theta)) \\ & = (\text{Supp } \omega) \times (\text{Supp } \theta). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Supp}(\omega \wedge \theta)$, fermé dans un compact, est compact et le cup-produit se restreint en un homomorphisme d'algèbres

$$\cup: H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y) \longrightarrow H_C^*(X \times Y).$$

Les propriétés formelles de celui-ci qu'on utilisera par la suite sont rassemblées dans le

3.8. LEMME :

(i) Si X, X', Y, Y' sont des variétés différentiables et $f: X' \rightarrow X, g: Y' \rightarrow Y$ des applications (de classe C^∞ ou même seulement continues) propres, alors $f \times g: X' \times Y' \rightarrow X \times Y$ est propre et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y) & \xrightarrow{\cup} & H_C^*(X \times Y) \\ f_C^* \otimes g_C^* \downarrow & & \downarrow (f \times g)_C^* \\ H_C^*(X') \hat{\otimes} H_C^*(Y') & \xrightarrow{\cup} & H_C^*(X' \times Y'). \end{array}$$

(ii) Si X, Y sont des variétés différentiables, U un ouvert de X, V un ouvert de $Y, \epsilon: U \rightarrow X, \eta: V \rightarrow Y$ les inclusions respectives, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_C^*(U) \hat{\otimes} H_C^*(V) & \xrightarrow{\cup} & H_C^*(U \times V) \\ \epsilon_* \otimes \eta_* \downarrow & & \downarrow (\epsilon \times \eta)_* \\ H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y) & \xrightarrow{\cup} & H_C^*(X \times Y). \end{array}$$

(iii) Si X, Y sont des variétés différentiables, $\{U, V\}$ un recouvrement ouvert de X , $U' = U \times Y, V' = V \times Y$, alors les suites exactes de Mayer-Vietoris à supports compacts relatives à $\{U, V\}$ et $\{U', V'\}$ donnent lieu au diagramme commutatif (Δ_C) de la page suivante.

Démonstration :

(i) Si K est un compact de $X \times Y$, alors, p et q désignant les deux projections canoniques, $p(K)$ et $q(K)$ sont compacts. Comme $K \subset p(K) \times q(K)$, on a

$$(f \times g)^{-1}(K) \subset (f \times g)^{-1}(p(K) \times q(K)) = f^{-1}(p(K)) \times g^{-1}(q(K)).$$

Comme f et g sont propres, $f^{-1}(p(K))$ et $g^{-1}(q(K))$ sont compacts, et $(f \times g)^{-1}(K)$, qui est de toute façon fermé, est compact.

La commutativité du diagramme se vérifie comme en V.3.3.

(ii) Si $\omega \in \Omega_C^i(U)$ et $\theta \in \Omega_C^j(V)$, $\tilde{\omega} = \varepsilon_u(\omega) \in \Omega_C^i(X)$ et $\tilde{\theta} = \eta_v(\theta) \in \Omega_C^j(Y)$ désignant les formes prolongées par 0 en dehors des supports, $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta}$ coïncide avec $\omega \wedge \bar{\lambda} \theta$ sur $(\text{Supp } \omega) \times (\text{Supp } \theta)$; à l'extérieur de ce compact, $\tilde{\omega}$ et/ou $\tilde{\theta}$, donc $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta}$, sont nulles : autrement dit $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta} = \overline{\omega \wedge \bar{\lambda} \theta}$.

La commutativité du diagramme en résulte par passage au quotient.

(iii) La démonstration est copiée sur la démonstration relative au diagramme (Δ) de V.3.1bis : la ligne supérieure est exacte parce que l'exactitude se conserve par tensorisation et sommes directes finies ; la commutativité des premier, deuxième et quatrième carrés provient de (ii) ; pour le troisième carré, on remonte à la définition (V.4.3) des bords ∂ et ∂' :

si $\omega \in Z_C^i(X)$, $\partial([\omega]) = [\xi]$ où $\xi = d(\alpha_U \omega)|_{U \cap V} = -d(\alpha_V \omega)|_{U \cap V}$, $\{\alpha_U, \alpha_V\}$ étant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$; formule analogue pour ∂' . Comme en V.3.1bis, on choisit pour partition de l'unité subordonnée à $\{U', V'\}$ les applications de classe C^∞ définies, pour $(x, y) \in X \times Y$, par $\alpha'_U(x, y) = \alpha_U(x)$ et $\alpha'_V(x, y) = \alpha_V(y)$.

On vérifie sur-le-champ que, pour toutes $\lambda \in \Omega_C^i(X)$, $\mu \in \Omega_C^j(Y)$, $\alpha'_V(\lambda \bar{\lambda} \mu) = (\alpha_V \lambda) \bar{\lambda} \mu$.

$$\begin{aligned} \text{Comme } d(\alpha'_V(\lambda \bar{\lambda} \mu)) &= (d\alpha'_V) \wedge (\lambda \bar{\lambda} \mu) + \alpha'_V(d(\lambda \bar{\lambda} \mu)) \\ &= (d\alpha'_V) \wedge (\lambda \bar{\lambda} \mu) + \alpha'_V(d(\lambda \bar{\lambda} \mu)) + (-1)^i \alpha'_V(\lambda \bar{\lambda} d\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \longrightarrow & [H_C^*(U \cap V) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k & \longrightarrow & [H_C^*(U) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k \oplus [H_C^*(V) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k & \longrightarrow & [H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k & \xrightarrow{\partial \otimes \text{Id}} \\
 & \downarrow \cup & & \downarrow \cup \oplus \cup & & \downarrow \cup & \\
 \longrightarrow & H_C^k(U' \cap V') & \longrightarrow & H_C^k(U') \oplus H_C^k(V') & \longrightarrow & H_C^k(X \times Y) & \xrightarrow{\partial'}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \longrightarrow & [H_C^*(U \cap V) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_{k+1} & \longrightarrow & [H_C^*(U) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_{k+1} \oplus [H_C^*(V) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_{k+1} & \longrightarrow \\
 & \downarrow \cup & & \downarrow \cup \oplus \cup & \\
 \longrightarrow & H_C^{k+1}(U' \cap V') & \longrightarrow & H_C^{k+1}(U') \oplus H_C^{k+1}(V') & \longrightarrow
 \end{array}$$

(N.B. : $[H_C^*(U) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k = \bigoplus_{i+j=k} H_C^i(U) \otimes H_C^j(Y)$, etc...)

Diagramme (Λ_C)

$$\begin{aligned} \text{et } d((\alpha_V \lambda) \bar{\lambda} \mu) &= d(\alpha_V \lambda) \bar{\lambda} \mu + (-1)^i (\alpha_V \lambda) \bar{\lambda} d\mu \\ &= (d\alpha_V \wedge \lambda) \bar{\lambda} \mu + (\alpha_V d\lambda) \bar{\lambda} \mu + (-1)^i (\alpha_V \lambda) \bar{\lambda} d\mu, \end{aligned}$$

il résulte qu'également

$$(d\alpha_V^i) \wedge (\lambda \bar{\lambda} \mu) = (d\alpha_V \wedge \lambda) \bar{\lambda} \mu.$$

$$\text{En outre } (\lambda \bar{\lambda} \mu)|_{U' \cap V'} = \lambda|_{U \cap V} \bar{\lambda} \mu.$$

Tout cela permet d'écrire, pour $\omega \in Z_C^i(X)$, $\theta \in Z_C^j(Y)$, $\partial([\omega] \smile [\theta]) = [\sigma]$ où $\sigma = d(\alpha_V \omega)|_{U \cap V} \bar{\lambda} \theta$, et $\partial'([\omega] \smile [\theta]) = [\tau]$ où $\tau = d(\alpha_V^i, (\omega \bar{\lambda} \theta))|_{U' \cap V'}$;

$$\begin{aligned} \sigma &= ((d\alpha_V) \wedge \omega)|_{U \cap V} \bar{\lambda} \theta + (\alpha_V d\omega)|_{U \cap V} \bar{\lambda} \theta \\ &= ((d\alpha_V) \wedge \omega)|_{U \cap V} \bar{\lambda} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tau &= ((d\alpha_V^i) \wedge (\omega \bar{\lambda} \theta))|_{U' \cap V'} + \alpha_V^i (d\omega \bar{\lambda} \theta)|_{U' \cap V'} + (-1)^i \alpha_V^i (\omega \bar{\lambda} d\theta)|_{U' \cap V'} \\ &= (((d\alpha_V) \wedge \omega) \bar{\lambda} \theta)|_{U' \cap V'} \\ &= ((d\alpha_V) \wedge \omega)|_{U \cap V} \bar{\lambda} \theta \\ &= \sigma. \quad \square \end{aligned}$$

Tout est prêt désormais pour énoncer et démontrer le

3.9. THEOREME : Soit X et Y deux variétés différentiables. Alors le cup-produit induit un isomorphisme d'algèbres graduées

$$\smile : H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y) \longrightarrow H_C^*(X \times Y).$$

Démonstration : Elle reprend les techniques du §2. Pour les mettre en oeuvre de façon aussi claire que possible, on note $\mathcal{K}(X, Y)$ la proposition "le Théorème 3.9 est vrai pour les variétés différentiables X et Y " et on démontre les deux lemmes suivants,

dont 3.9 est évidemment un corollaire immédiat :

3.10. LEMME : Pour tous entiers n, p , $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est vraie.

3.11. LEMME :

(i) Soit Y une variété différentiable et n un entier. Si $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n, Y)$ est vraie, alors pour toute variété différentiable X de dimension n , $\mathcal{K}(X, Y)$ est vraie.

(ii) Soit X une variété différentiable et p un entier. Si $\mathcal{K}(X, \mathbb{R}^p)$ est vraie, alors pour toute variété différentiable Y de dimension p , $\mathcal{K}(X, Y)$ est vraie.

Démonstration de 3.10 : Dans ce cas $H_C^*(\mathbb{R}^n) = H_C^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$, $H_C^*(\mathbb{R}^p) = H_C^p(\mathbb{R}^p) \cong \mathbb{R}$, $H_C^*(\mathbb{R}^{n+p}) = H_C^{n+p}(\mathbb{R}^{n+p}) \cong \mathbb{R}$ (cf. V.4.19) et tout se réduit à vérifier que l'application linéaire

$$\cup : H_C^n(\mathbb{R}^n) \otimes H_C^p(\mathbb{R}^p) \longrightarrow H_C^{n+p}(\mathbb{R}^{n+p})$$

n'est pas nulle.

Soit $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^∞ définie en IV.5.10 telle que $G(x) = 1$ pour $x \leq 1$ et $G(x) = 0$ pour $x \geq 2$. Si on pose, pour tout entier m et tout $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\sigma_m(x_1, \dots, x_m) = G(|x_1|) \dots G(|x_m|) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

on obtient une forme $\sigma_m \in \mathcal{L}_C^m(\mathbb{R}^m)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^m} \sigma_m > 0$: c'est dire que $S(\sigma_m) \neq 0$ (cf. 1.23), d'où $[\sigma_m] \neq 0$.

Par ailleurs il est évident que pour tous entiers n, p , $\sigma_n \wedge \sigma_p = \sigma_{n+p}$, d'où $[\sigma_n] \cup [\sigma_p] = [\sigma_{n+p}] \neq 0$, et \cup est dans le cas présent un isomorphisme. \square

Démonstration de 3.11 : On se contentera de démontrer (i), la démonstration de (ii) étant identique à l'ordre des facteurs près. On procède par étapes successives, prenant pour X des variétés différentiables de plus en plus "compliquées".

1°) X est un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^n .

Soit $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme (cf. 2.6). Il en résulte d'après 3.8 (i)

un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_C^*(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} H_C^*(Y) & \xrightarrow{\cong} & H_C^*(\mathbb{R}^n \times Y) \\
 \downarrow v_C^* \otimes \text{Id} & & \downarrow (v \times \text{Id}_Y)_C^* \\
 H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y) & \xrightarrow{\cup} & H_C^*(X \times Y)
 \end{array}$$

où les flèches verticales, induites par des homéomorphismes, sont des isomorphismes (cf. IV.7.8) ; la flèche horizontale du haut en est un par hypothèse, celle du bas aussi par conséquent, ce qui prouve le lemme dans ce cas.

2°) X est un ouvert de \mathbb{R}^n , réunion finie d'ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n .

On procède par récurrence sur le nombre r d'ouverts.

Si r = 1, le lemme est vrai d'après 1°).

Soit r > 1, $X = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$ où $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ sont des ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n , $U = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{r-1}$, $V = \Gamma_r$, et supposons le résultat établi jusqu'à r-1, donc pour U, V et $U \cap V = (\Gamma_1 \cap \Gamma_r) \cup \dots \cup (\Gamma_{r-1} \cap \Gamma_r)$. Le diagramme commutatif (Δ_C) de (3.8)(iii) montre alors, d'après le lemme des Cinq et l'hypothèse de récurrence, que, pour tout entier k,

$$\cup : [H_C^*(X) \hat{\otimes} H_C^*(Y)]_k \longrightarrow H^k(X \times Y)$$

est un isomorphisme, ce qui établit le lemme dans ce cas.

3°) X est un ouvert de \mathbb{R}^n , réunion dénombrable disjointe d'ouverts du type précédent.

Soit $X = \coprod_{m \in \mathbb{N}} X_m$ où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, X_m est un ouvert du type précédent, sous les inclusions $i_m : X_m \rightarrow X$; de même, $X \times Y = \coprod_{m \in \mathbb{N}} (X_m \times Y)$ sous les inclusions $j_m = i_m \times \text{Id}_Y : X_m \times Y \rightarrow X \times Y$.

Par souci de clarté on note, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout entier k,

$$(i_m)_*^k : H_C^k(X_m) \longrightarrow H_C^k(X)$$

la restriction de $(i_m)_* : H_C^*(X_m) \rightarrow H_C^*(X)$; ces homomorphismes induisent respectivement

$$i_*^k : \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H_C^k(X_m) \longrightarrow H_C^k(X);$$

et $i_*^k : \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H_C^k(X_m) \longrightarrow H_C^k(X)$, qui sont des isomorphismes (2.14.2°).

Notations analogues pour j_* .

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout entier k , le diagramme suivant est commutatif (3.8(ii)) :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i+j=k} [H_C^i(X_m) \otimes H_C^j(Y)] & \xrightarrow{\cup_m} & H_C^k(X_m \times Y) \\ \downarrow \bigoplus_{i+j=k} ((i_m)_*^i \otimes Id_j) & & \downarrow (j_m)_*^k \\ \bigoplus_{i+j=k} [H_C^i(X) \otimes H_C^j(Y)] & \xrightarrow{\cup} & H_C^k(X \times Y) \end{array}$$

(avec $Id_j = Id_{H_C^j(Y)}$). Par conséquent le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \bigoplus_{i+j=k} [H_C^i(X_m) \otimes H_C^j(Y)] & \xrightarrow{\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \cup_m} & \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H_C^k(X_m \times Y) \\ \downarrow \bigoplus_{i+j=k} (i_*^i \otimes Id_j) & & \downarrow \cong (j_*)^k \\ \bigoplus_{i+j=k} [H_C^i(X) \otimes H_C^j(Y)] & \xrightarrow{\cup} & H_C^k(X \times Y) \end{array}$$

La flèche de gauche est un isomorphisme parce qu'elle se déduit de $\bigoplus_{i+j=k} (i_*^i \otimes Id_j)$ en permutant les deux sommations et en distribuant \otimes par rapport à \oplus ; la flèche du haut est un isomorphisme d'après 2°) et par somme directe. Ainsi, pour tout entier k ,

$$\cup : [H_C^*(X) \otimes H_C^*(Y)]_k \longrightarrow H_C^k(X \times Y)$$

est un isomorphisme et le lemme est encore vrai dans ce cas.

4°) X est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n .

Procéder comme en 2.14. 3°) pour obtenir un recouvrement $\{U, V\}$ de X tel que U, V et $U \cap V$ soient du type précédent. Conclure à l'aide de 3.8. (iii).

5°) X est une variété différentiable de dimension n recouvrable par un nombre fini d'ouverts de cartes.

Si X admet un atlas à une carte, utiliser cette carte et 3.8(i) pour se ramener au cas précédent.

Si $X = U_1 \cup \dots \cup U_r$ où $r \geq 2$ et U_1, \dots, U_r sont des ouverts de cartes, poser $U = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$, $V = U_r$ et procéder par récurrence à l'aide de 3.8 (iii).

6°) X est une réunion dénombrable disjointe de variétés du type précédent.

Imiter la démonstration de 3°).

7°) X est une variété différentiable quelconque de dimension n.

Si X est compacte, elle ressortit au cas 5°). Sinon, adapter 4°) (cf. 2.14.7°)). \square

Evidemment, si X et Y sont toutes deux compactes, 3.9 ne se distingue pas de 3.6 et n'a pas à être redémontré... C'est le cas dans l'exemple que nous donnons pour terminer ce paragraphe et qui généralise V.5.11 (lui-même déduit de la forme faible V.3.1bis du théorème de Künneth).

3.12. THEOREME : Soit X une H-variété (V.5.9) connexe compacte. Alors le premier entier $r > 0$ tel que $H^r(X) \neq 0$ est impair.

3.13. COROLLAIRE : Pour aucun entier n, $\mathbb{C}P^n$ ne peut être muni d'une structure de H-variété.

Démonstration de 3.12 : Tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie par compacité de X.

Soit $\xi \in H^r(X)$, $\xi \neq 0$ et s le plus petit entier tel que $\xi^s = 0$: on a donc $s \geq 2$ et $\xi^{s-1} \neq 0$.

L'application $m : X \times Y \rightarrow X$ définissant la structure de H-variété induit un homomorphisme d'algèbres

$$m^* : H^*(X) \rightarrow H^*(X \times X) \cong H^*(X) \hat{\otimes} H^*(X)$$

d'après 3.6. En particulier, en degré r , $[H^*(X) \hat{\otimes} H^*(X)]_r = H^r(X) \otimes H^0(X) \oplus H^0(X) \otimes H^r(X)$, tous les autres termes étant nuls par hypothèse.

En composant m avec les injections $X \rightarrow X \times X : x \mapsto (x, e)$ et $X \rightarrow X \times X : x \mapsto (e, x)$, où e est l'élément tel que, pour tout $x \in X$, $m(x, e) = m(e, x) = x$, on vérifie comme en V.5.13 et grâce à la connexité de X que

$$m^*(\xi) = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi,$$

$$\text{d'où } 0 = m^*(\xi^S) = m^*(1)^S = (\xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi)^S.$$

Si on suppose r pair, on a (I.8.11(ii)) :

$$(\xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi)^S = \sum_{k=0}^S \binom{S}{k} \xi^{S-k} \otimes \xi^k \in \bigoplus_{k=0}^S H^{r(S-k)}(X) \otimes H^{rk}(X)$$

cette somme directe étant un sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{i+j=rs} H^i(X) \otimes H^j(X) \cong H^{rs}(X \times X)$.

Certes les termes extrêmes $\xi^S \otimes 1$ et $1 \otimes \xi^S$ sont nuls mais, comme $s \geq 2$, la somme contient au moins le terme $s\xi^{s-1} \otimes \xi \in H^{r(s-1)}(X) \otimes H^r(X)$. Or, par hypothèse, $\xi \neq 0$ et $\xi^{s-1} \neq 0$, d'où $s\xi^{s-1} \otimes \xi \neq 0$ (utiliser par exemple I.2.3 (iv)) et une contradiction à supposer r pair. \square

3.14. EXERCICE : Soit X, Y deux variétés différentiables compactes, $p : X \times Y \rightarrow X$, $q : X \times Y \rightarrow Y$ les projections.

Montrer que, pour tout $x \in H^i(X)$, $p^*(x) = x \cup \underline{1}_Y \in H^i(X \times Y)$ et, pour tout $y \in H^j(Y)$, $q^*(y) = \underline{1}_X \cup y \in H^j(X \times Y)$, où $\underline{1}_X \in H^0(X)$ (resp. $\underline{1}_Y \in H^0(Y)$) est l'unité de $H^*(X)$ (resp. de $H^*(Y)$), c'est-à-dire la fonction constante égale à 1 sur X (resp. sur Y).

En déduire que, X, Y, Z étant trois variétés différentiables compactes, $f : Z \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$ deux applications continues et $h = (f, g)$ (c'est-à-dire que pour

tout $z \in Z$, $h(z) = (f(z), g(z))$, alors, pour tous $x \in H^i(X)$, $y \in H^j(Y)$,

$$h^*(x \cup y) = f^*(x) \cdot g^*(y) \in H^{i+j}(X \times Y).$$

4. LE THEOREME DE LEFSCHETZ.

La première partie du paragraphe est consacrée à la construction d'un nouvel homomorphisme, l'homomorphisme de Gysin. Celui-ci joue un rôle fondamental dans la démonstration (sinon dans l'énoncé) du théorème de Lefschetz (4.17) qui est notre but ultime, mais son intérêt intrinsèque dépasse de loin cette utilisation.

Jusqu'à 4.10 inclus, M et N désignent des variétés différentiables orientées de dimensions respectives m et n ; $f : M \rightarrow N$ est une application continue.

La définition de l'homomorphisme de Gysin se faisant par dualité ("à travers" les isomorphismes de Poincaré), il faut supposer f propre pour l'obtenir en cohomologie ordinaire. Si f est propre, on a pour tout entier i une application linéaire $f_C^* : H_C^i(N) \rightarrow H_C^i(M)$, d'où $t_{f_C}^* : H_C^i(M)^* \rightarrow H_C^i(N)^*$. On a aussi, pour tout entier i , les isomorphismes de dualité $p_M^i : H^i(M) \xrightarrow{\cong} H_C^{m-i}(M)^*$ et $p_N^i : H^i(N) \xrightarrow{\cong} H_C^{n-i}(N)^*$ définis en 2.1.

4.1. DEFINITION : L'homomorphisme de Gysin induit par f , noté f_* , est celui qui, pour tout entier i , rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^i(M) & \xrightarrow{f_*} & H^{i+n-m}(N) \\ p_M^i \downarrow \cong & & \cong \downarrow p_N^{i+n-m} \\ H_C^{m-i}(M)^* & \xrightarrow{t_{f_C}^*} & H_C^{m-i}(N)^* \end{array}$$

Remarquer que si $n = m$ (donc en particulier si $N = M$: cf 4.15 bis), f_* est de degré 0.

Autrement dit, $f_* = (p_N^{i+n-m})^{-1} \circ t_{f_C}^* \circ p_M^i$.

En d'autres termes encore (traduire le diagramme, ou cf. 4.2), si $\xi \in Z^i(M)$, $f^*([\xi]) = [\omega]$ où $\omega \in Z^{i+n-m}(N)$ est telle que, pour toute $\lambda \in Z_C^{m-i}(N)$,

$$\int_N \omega \wedge \lambda = \int_M \xi \wedge f^* \lambda.$$

Enfin, si l'on utilise le crochet de Kronecker (cf. 2.15), on a le résultat suivant qu'on peut, de ce point de vue, prendre pour définition de f_* :

4.2. THEOREME : L'homomorphisme de Gysin induit par f est l'adjoint à gauche de f_C^* pour \langle , \rangle , c'est-à-dire l'unique f_* tel que, pour tout entier i , $f_* : H^i(M) \rightarrow H^{i+n-m}(N)$ et, pour tous $x \in H^i(M)$, $y \in H_C^{m-i}(N)$,

$$\langle f_*(x), y \rangle = \langle x, f_C^*(y) \rangle.$$

Démonstration :

(i) Unicité : Il est immédiat que l'égalité ci-dessus définit f_* sans ambiguïté : si $g : H^i(M) \rightarrow H^{i+n-m}(N)$ est telle que, pour tous $x \in H^i(M)$, $y \in H_C^{m-i}(N)$, $\langle g(x), y \rangle = 0$, alors, pour tout $x \in H^i(M)$, $g(x) = 0$ (cf. 2.18 (i)) et $g = 0$.

(ii) D'après 4.1 et par définition de \langle , \rangle et d'une transposée :

$$\begin{aligned} \langle f_*(x), y \rangle &= \langle (P_N^{i+n-m})^{-1} ({}^t f_C^* \circ P_M^i(x)), y \rangle \\ &= \langle {}^t f_C^* \circ P_M^i(x), y \rangle \\ &= P_M^i(x) \cdot f_C^*(y) \\ &= \langle x, f_C^*(y) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Les propriétés formelles essentielles de l'homomorphisme de Gysin sont les suivantes :

4.3. THEOREME :

(i) Si P est une variété différentiable orientable et $g : N \rightarrow P$ une application continue,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

(ii) Formule de projection : pour tous $x \in H^i(M)$, $y \in H^j(N)$,

$$f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y$$

Démonstration :

(i) immédiat par juxtaposition de diagrammes 4.1, ou comme composée d'adjoints.

(ii) Comme $f_*(x.f^*(y)) \in H^{i+j+n-m}(N)$,

on prend $z \in H_C^{m-i-j}(N)$:

$$\begin{aligned} \langle f_*(x.f^*(y)), z \rangle &= \langle x.f^*(y), f_C^*(z) \rangle && \text{(d'après 4.2 (ii))} \\ &= \langle x, f^*(y) f_C^*(z) \rangle && \text{(d'après 2.16 (i))} \\ &= \langle x, f_C^*(yz) \rangle && \text{(d'après IV.7.6)} \\ &= \langle f_*(x), yz \rangle && \text{(4.2 (ii))} \\ &= \langle f_*(x).y, z \rangle && \text{(2.16 (i))} \end{aligned}$$

d'où $f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y$ d'après 2.18 (i). \square

4.4. REMARQUE : De toute façon, ne serait-ce que pour des raisons de degré, il était vain d'espérer que f_* fût un homomorphisme d'anneaux. Par contre, la "formule de projection" signifie que f_* est $H^*(N)$ -linéaire à droite. Comme elle n'est pas de degré 0, cela n'entraîne pas (cf. note de bas de page au début du §7 chapitre IV), si $n \neq m$ [2], la linéarité à gauche : en effet, pour $x \in H^i(N)$, $y \in H^j(M)$,

$$f^*(x).y = (-1)^{ij} y.f^*(x),$$

d'où (f_* étant quand même \mathbb{R} -linéaire !)

$$\begin{aligned} f_*(f^*(x).y) &= (-1)^{ij} f_*(y.f^*(x)) \\ &= (-1)^{ij} f_*(y).x \end{aligned}$$

d'après 4.3 (ii). Mais $f_*(y) \in H^{j+n-m}(N)$ et $f_*(y).x = (-1)^{i(j+n-m)} x.f_*(y)$; ainsi

$$f_*(f^*(x).y) = (-1)^{i(n-m)} x.f_*(y) .$$

Toutefois, dans le cas où $n = m$, la situation algébrique s'éclaircit, et nous la décrivons plus explicitement. (Prendre garde que le signe $*$ désigne tantôt un dual, tantôt une graduation : se référer au contexte.).

On pose, pour tout entier i , $A^i = H_C^{m-i}(M)^*$ et $B^i = H_C^{m-i}(N)^*$. Ainsi, pour tout entier i ,

$$p_M^i : H^i(M) \rightarrow A^i \quad \text{et} \quad p_N^i : H^i(N) \rightarrow B^i$$

d'où deux \mathbb{R} -isomorphismes de degré 0

$$p_M : H^*(M) \rightarrow A^* \quad \text{et} \quad p_N : H^*(N) \rightarrow B^* .$$

Corrélativement, on munit B^* d'une structure de $H^*(N)$ -module duale de celle de $H_C^*(N)$ (cf. IV.7.1) en définissant, pour $\lambda \in H^i(N)$ et $\omega \in B^j$, $\omega.\lambda \in B^{i+j} = H_C^{m-i-j}(N)^*$ par $\omega.\lambda : H_C^{m-i-j}(N) \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \omega(\lambda v)$ (et, bien entendu, $\lambda.\omega = (-1)^{ij} \omega.\lambda$).

De façon analogue, A^* est muni d'une structure de $H^*(M)$ -module.

4.5. THEOREME : Avec ces conditions de dimensions, de degrés et de signes, les isomorphismes de Poincaré et ${}^t f_C^*$ (et donc f_* comme composée) sont $H^*(N)$ -linéaires.

Démonstration : Comme ces trois applications sont de degré 0 (car, étant donné que $n = m$, on a, pour tout entier i , ${}^t f_C^* : A^i \rightarrow B^i$) il suffit de vérifier leur $H^*(N)$ -linéarité d'un seul côté (cf. note de IV.7).

Soit $x \in H^i(N)$, $y \in H^j(N)$, $z \in H_C^{m-i-j}(N)$. Alors

$$\begin{aligned} p_N^{i+j}(xy).z &= \langle xy, z \rangle = \langle x, yz \rangle \\ &= p_N^i(x).(yz) , \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après la définition de la structure de module sur B^{i+j} ,

$$p_N^{i+j}(xy) = p_N^i(x).y ,$$

d'où la $H^*(N)$ -linéarité de P_N .

La $H^*(M)$ -linéarité de P_M se démontre de la même manière. Sa $H^*(N)$ -linéarité s'en-suit puisqu'elle est définie "à travers f^* " (elle signifie que, pour $u \in H^1(M)$ et $y \in H^j(N)$, $P_M^{i+j}(u.f^*(y)) = P_N^i(u).f^*(y)$).

Quant à la $H^*(N)$ -linéarité de ${}^t f_C^*$ elle provient du lemme suivant, qui resservi-ra :

4.6. LEMME : Soit U^* , V^* deux $H^*(N)$ -modules gradués, $\phi : V^* \rightarrow U^*$ une application $H^*(N)$ -linéaire de degré 0, m un entier. On note, pour tout entier i , X^i le dual de U^{m-i} et Y^i le dual de V^{m-i} ; on définit la structure de $H^*(N)$ -module sur X^* en posant pour tous $\omega \in X^i$, $\lambda \in H^j(N)$, $z \in U^{m-i-j}$,

$$(\omega.\lambda).z = \omega.(\lambda.z) .$$

(Définition analogue pour Y^*).

Alors

$${}^t \phi : X^* \rightarrow Y^*$$

est $H^*(N)$ -linéaire.

Démonstration : Soit $\alpha \in X^i$, $\lambda \in H^j(N)$, $x \in V^{m-i-j}$. Par définition des diverses struc-tures de $H^*(N)$ -module et par $H^*(N)$ -linéarité de ϕ :

$$\begin{aligned} {}^t \phi(\alpha.\lambda).x &= (\alpha.\lambda).\phi(x) \\ &= \alpha.(\lambda\phi(x)) \\ &= \alpha.\phi(\lambda x) \\ &= {}^t \phi(\alpha).(\lambda x) \\ &= ({}^t \phi(\alpha).\lambda).x , \end{aligned}$$

d'où ${}^t \phi(\alpha.\lambda) = {}^t \phi(\alpha).\lambda$. \square

On revient au cas général : a priori $n \neq m$.

Pour définir l'homomorphisme de Gysin en cohomologie à supports compacts, il faut supposer que les cohomologies de M et N (ordinaires ou à supports compacts, peu importe d'après la dualité de Poincaré) sont de dimension finie en tant que \mathbb{R} -espaces vectoriels : c'est le cas si M et N sont de type fini (cf. 3.2).

Alors les espaces vectoriels s'identifient à leurs biduals. De façon précise, si $x \in H_C^i(M)$, on définit $\hat{x} \in H_C^i(M)^{**}$ en posant, pour toute $\omega \in H_C^i(M)^* = A^{m-i}$,

$$\hat{x}(\omega) = (-1)^{i(m-i)} \omega(x) ;$$

les dimensions étant finies, le monomorphisme canonique

$$\epsilon_M^i : H_C^i(M) \rightarrow H_C^i(M)^{**} : x \mapsto \hat{x}$$

est un isomorphisme. On a de même, pour tout entier i , un isomorphisme

$$\epsilon_N^i : H_C^i(N) \rightarrow H_C^i(N)^{**} : y \mapsto \hat{y}$$

(où n remplace m dans la définition de $\hat{}$).

On forme pour tout entier i les isomorphismes composés

$$Q_M^i = \tau_{P_M}^{m-i} \circ \epsilon_M^i : H_C^i(M) \rightarrow H_C^i(M)^{**} \rightarrow H^{m-i}(M)$$

et $Q_N^i = \tau_{P_N}^{n-i} \circ \epsilon_N^i : H_C^i(N) \rightarrow H_C^i(N)^{**} \rightarrow H^{n-i}(N)$.

4.7. DEFINITION : L'homomorphisme de Gysin à supports compacts induit par f , noté f_*^C , est celui qui, pour tout entier i , rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_C^i(M) & \xrightarrow{f_*^C} & H_C^{i+n-m}(N) \\ Q_M^i \downarrow \cong & & \cong \downarrow Q_N^{i+n-m} \\ H^{m-i}(M)^* & \xrightarrow{t_f^*} & H^{m-i}(N)^* \end{array}$$

Autrement dit $f_*^C = (Q_N^{i+n-m})^{-1} \circ t_{f^*} \circ Q_M^i = (\varepsilon_N^{i+n-m})^{-1} \circ (t_{P_N^{m-i}})^{-1} \circ t_{(P_M^{m-i} \circ f^*)} \circ \varepsilon_M^i$.

En d'autres termes encore (traduire le diagramme ou cf. 4.8(i)), si $\alpha \in Z_C^i(M)$, $f_*^C([\alpha]) = [\sigma] \circ \cup \sigma \in Z_C^{i+n-m}(N)$ est telle que, pour toute $\mu \in Z^{m-i}(N)$,

$$\int_N \mu \wedge \sigma = (-1)^{(n-m)(m-i)} \int_M (f^*\mu) \wedge \alpha.$$

Les propriétés formelles sont analogues, à certains signes près, à celles de f_* :

4.8. THEOREME :

(i) L'homomorphisme f_*^C est l'unique homomorphisme qui vérifie, pour tous $x \in H_C^i(M)$, $y \in H^{m-i}(N)$,

$$\langle y, f_*^C(x) \rangle = (-1)^{(n-m)(m-i)} \langle f^*(y), x \rangle.$$

(ii) Si P est une variété différentiable orientable et $g : N \rightarrow P$ une application continue,

$$(g \circ f)_*^C = g_*^C \circ f_*^C.$$

(iii) Pour tous $x \in H_C^i(M)$, $y \in H^j(N)$,

$$f_*^C(x \cdot f^*(y)) = f_*^C(x) \cdot y.$$

Démonstration :

(i) Unicité : comme en 4.2(i). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle y, f_*^C(x) \rangle &= P_N^{m-i}(y) \cdot f_*^C(x) \\ &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)} \widehat{f_*^C(x)} \cdot P_N^{m-i}(y) \\ &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)} t_{P_N^{m-i}}(\widehat{f_*^C(x)}) \cdot y \\ &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)} t_{P_N^{m-i}} \circ \varepsilon_N^{i+n-m}(f_*^C(x)) \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)} t_{(P_M^{m-i} \circ f^*)(\hat{x})} \cdot y \\
 &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)} \hat{x} \cdot (P_M^{m-i}(f^*(y))) \\
 &= (-1)^{(i+n-m)(m-i)+i(m-i)} P_M^{m-i}(f^*(y)) \cdot x \\
 &= (-1)^{(n-m)(m-i)} \langle f^*(y), x \rangle .
 \end{aligned}$$

(ii) par juxtaposition de diagrammes.

(iii) Soit $z \in H^{m-i-j}(N)$:

$$\begin{aligned}
 \langle z, f_*^C(x \cdot f(y)) \rangle &= (-1)^{(n-m)(m-i-j)} \langle f^*(z), x \cdot f^*(y) \rangle \\
 &= (-1)^{(n-m)(m-i-j)+ij} \langle f^*(z) f^*(y), x \rangle \\
 &= (-1)^{(n-m)(m-i-j)+ij+(n-m)(m-i)} \langle zy, f_*^C(x) \rangle \\
 &= (-1)^{(n-m)(m-i-j)+ij+(n-m)(m-i)+j(i+n-m)} \langle z, f_*^C(x) \cdot y \rangle .
 \end{aligned}$$

Or $(n-m)(m-i-j)+ij+(n-m)(m-i)+j(i+n-m) = (n-m)(m-i-j)+2ij+(n-m)(m-i+j) \equiv 0 \pmod{2}$,
 d'où $f_*^C(x \cdot f^*(y)) = f_*^C(x) \cdot y$ d'après 2.18(ii). \square

Ici encore la situation algébrique est complètement satisfaisante si $n = m$.
 Procédant comme en 4.5 on pose, pour tout entier i , $C^i = (A^{m-i})^* = H_C^i(M)^{**}$ et
 $D^i = (B^{m-i})^* = H_C^i(N)^{**}$. Ainsi les isomorphismes canoniques, définis pour tout entier
 i , $\epsilon_M^i : H_C^i(M) \rightarrow H_C^i(M)^{**} : x \mapsto \hat{x}$ et $\epsilon_N^i : H_C^i(N) \rightarrow H_C^i(N)^{**} : y \mapsto \hat{y}$ induisent-ils des
 \mathbb{R} -isomorphismes de degré 0 $\epsilon_M : H_C^*(M) \rightarrow C^*$ et $\epsilon_N : H_C^*(N) \rightarrow D^*$.

On pose de même, pour tout entier i , $E^i = H^{m-i}(M)^*$ et $F^i = H^{m-i}(N)^*$, ce qui donne le degré 0 aux transposés des isomorphismes de Poincaré $t_{P_M}^i : C^i \rightarrow E^i$ et
 $t_{P_N}^i : D^i \rightarrow F^i$.

On munit C^* , D^* , E^* , F^* des structures duales de celles de A^* , B^* , $H^*(M)$, $H^*(N)$
 à la manière de 4.5 et 4.6.

4.9. THEOREME : Dans ces conditions, ϵ_M , ϵ_N , t_{P_M} , t_{P_N} et t_{f^*} (et donc f_*^C comme composée) sont $H^*(N)$ -linéaires.

Démonstration : Si $x \in H_C^i(N)$, $\lambda \in H^j(N)$ et $\omega \in B^{m-i-j}$,

$$\begin{aligned} \widehat{x}\lambda \cdot \omega &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)} \omega \cdot (x\lambda) \\ &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)+ij} \omega \cdot (\lambda x) \\ &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)+ij} (\omega\lambda) \cdot x \\ &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)+ij+i(m-i)} \widehat{x} \cdot (\omega\lambda) \\ &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)+ij+i(m-i)+j(m-i-j)} \widehat{x} \cdot (\lambda\omega) \\ &= (-1)^{(i+j)(m-i-j)+ij+i(m-i)+j(m-i-j)} (\widehat{x}\lambda) \cdot \omega \end{aligned}$$

Or $(i+j)(m-i-j)+ij+i(m-i)+j(m-i-j) \equiv i(m-i)-ij+ij+i(m-i) \equiv 0 \pmod{2}$, d'où $\widehat{x}\lambda = \widehat{x}\lambda$. Ainsi ϵ_N est $H^*(N)$ -linéaire.

De même ϵ_M est $H^*(M)$ - (donc $H^*(N)$ -) linéaire.

D'après 4.6 et 4.5, t_{P_N} est $H^*(N)$ -linéaire et t_{P_M} est $H^*(M)$ - (donc $H^*(N)$ -) linéaire.

D'après 4.6 et IV.7.3, t_{f^*} est $H^*(N)$ -linéaire. \square

Si M et N sont compactes (pas forcément de même dimension), les deux définitions (4.1 et 4.7) sont valides. Comme en outre $H^*(M) = H_C^*(M)$ et $H^*(N) = H_C^*(N)$ dans ce cas, on se hâte de vérifier le

4.10. THEOREME : Si M et N sont compactes, $f_*^C = f_*$.

Démonstration : Soit $x \in H^i(M)$, $y \in H^{m-i}(N)$; alors

$$\langle f_*^C(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \quad (4.2)$$

$$= (-1)^{i(m-i)} \langle f^*(y), x \rangle \quad (2.16(ii))$$

$$= (-1)^{i(m-i)+(n-m)(m-i)} \langle y, f_*^C(x) \rangle \quad (4.8(i))$$

$$= (-1)^{i(m-i)+(n-m)(m-i)+(m-i)(i+n-m)} \langle f_*^C(x), y \rangle \quad (2.16(ii))$$

$$= \langle f_*^C(x), y \rangle$$

d'où le résultat d'après 2.18 (i). \square

Enfin, il est une situation intéressante, en soi et pour la démonstration de 4.17, celle d'un ouvert U d'une variété différentiable orientée M , les cohomologies de U et de M étant de dimension finie. Comme U est alors une variété orientée de même dimension que M , l'inclusion $\iota : U \rightarrow M$ induit un homomorphisme de Gysin de degré 0

$$\iota_*^C : H_C^*(U) \rightarrow H_C^*(M).$$

Mais on dispose aussi de l'homomorphisme d'extension défini, pour tout entier i , par

$$\tilde{\iota} : H_C^i(U) \rightarrow H_C^i(M) : [\omega] \mapsto [\tilde{\omega}]$$

$$\text{où } \tilde{\omega}|_U = \omega \text{ et } \tilde{\omega}|_{M \setminus \text{Supp } \omega} = 0$$

(cf. IV.7.5. ; on a rebaptisé ce dernier par précaution sans doute excessive, ι n'étant pas propre, donc l'homomorphisme de Gysin "ordinaire" pas défini, en général).

4.11. THEOREME : Dans ces conditions, $\tilde{\iota} = \iota_*^C$.

Démonstration : Soit $n = \dim M = \dim U$. Il suffit d'après 4.8 (i) de vérifier que, pour tous $x \in H_C^i(U)$, $y \in H^{n-i}(M)$,

$$\langle y, \tilde{\iota}(x) \rangle = \langle \iota^*(y), x \rangle,$$

c'est-à-dire que, pour tous $\xi \in Z_C^i(U)$, $\eta \in Z^{n-i}(M)$, $\int_M \eta \wedge \tilde{\xi} = \int_U (\eta|_U) \wedge \xi$;

cela est vrai puisque $\text{Supp}(\eta \wedge \tilde{\xi}) \subset \text{Supp} \tilde{\xi} = \text{Supp} \xi$ qui est un compact de U . \square

Cette situation se présente en particulier dans le cas suivant : X est une variété différentiable orientée de dimension n dont la cohomologie (en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel) est de dimension finie ; P est une sous-variété fermée de X , de dimension p et dont la cohomologie est de dimension finie ; U est un voisinage tubulaire de P dans X (ou un fibré en boules dudit voisinage tubulaire : cf. V.4.16 et 17). L'inclusion $\epsilon : P \rightarrow X$ est alors la composée des inclusions $\eta : P \rightarrow U$ et $\iota : U \rightarrow X$, $\eta^* : H^*(U) \rightarrow H^*(P)$ étant un isomorphisme par contractilité des fibres, cf. démonstration de V.4.10 (i) : ainsi $H^*(U)$ est également un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Dans ces conditions, pour tout entier i , $\eta_*^C : H_C^i(P) \rightarrow H_C^{i+n-p}(U)$ est un isomorphisme (puisque η^* , donc ι^* , le sont).

4.12. DEFINITION : L'isomorphisme de degré $n-p$

$$\eta_*^C : H_C^*(P) \rightarrow H_C^*(U)$$

ainsi défini s'appelle isomorphisme de Thom

Il rend, pour tout entier i , le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_C^i(P) & \xrightarrow{\epsilon_*^C} & H_C^{i+n-p}(X) \\ \eta_*^C \searrow \cong & & \nearrow \iota_*^C \\ & & H_C^{i+n-p}(U) \end{array}$$

Si on suppose X compact (ce qui rend aussi P compact, et assure les hypothèses précédentes sur la finitude des cohomologies) ce diagramme devient, utilisant 4.10 et 4.11 :

$$\begin{array}{ccc} H^i(P) & \xrightarrow{\epsilon_*} & H^{i+n-p}(X) \\ \eta_*^C \searrow \cong & & \nearrow \iota_* \\ & & H^{i+n-p}(U) \end{array}$$

et il en résulte le

4.13. LEMME : Soit X une variété différentiable compacte orientée de dimension n , P une sous-variété fermée de X de dimension p , $\varepsilon : P \rightarrow X$ l'inclusion ;

soit Y une variété différentiable compacte orientée et $f : Y \rightarrow X$ une application continue.

Alors, si $f(Y) \cap P = \emptyset$, $f^* \circ \varepsilon_* = 0$.

Démonstration : Par compacité de P et de $f(Y)$, on peut trouver un fibré en boules U d'un voisinage tubulaire de P dans X tel que $U \cap f(Y) = \emptyset$ (cf. V.4.16). Avec les notations précédentes, on a donc

$$f^* \circ \varepsilon_* = f^* \circ \tilde{i} \circ \eta_*^C : H^i(P) \rightarrow H^{i+n-p}(X) .$$

Or, pour tout entier j , si $\omega \in \Omega_C^j(U)$, il est évident sur la définition (cf. IV.2.1) que $f^*(\tilde{\omega}) = 0$. Donc $f^* \circ \tilde{i} = 0$ et $f^* \circ \varepsilon_* = 0$. \square

Le résultat suivant, dont on aura besoin, est laissé en

4.14. EXERCICE : Si X, Y, Z sont des variétés différentiables compactes orientées de dimensions respectives m, n, p et $\phi : X \rightarrow Y, \psi : Z \rightarrow Y$ des applications continues, alors, pour tous $a \in H^i(X), b \in H^{m+p-n-i}(Z)$,

$$\langle \phi^* \circ \psi_*(b), a \rangle = (-1)^{(n-m)(m-i)} \langle b, \psi^* \circ \phi_*(a) \rangle .$$

... et tout est prêt pour la démonstration du théorème de Lefschetz, même si son énoncé ne fait pas intervenir l'homomorphisme de Gysin et ne semble pas à première vue relever de ses propriétés.

On y considère en effet une variété différentiable compacte orientée M de dimension n et $f : M \rightarrow M$ une application continue. On note en cas de besoin $f_i^* : H^i(M) \rightarrow H^i(M)$ la $i^{\text{ème}}$ composante de $f^* : H^*(M) \rightarrow H^*(M)$. La cohomologie de M étant de dimension finie (3.5), on pose la

4.15. DEFINITION : Le nombre de Lefschetz de f est

$$\lambda_f = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(f_i^*)$$

où Tr désigne la trace.

[Signalons tout de suite les

4.16. DEFINITIONS : Si $f = \text{Id}_M$, $\text{Tr}((\text{Id}_M)_i^*) = \dim H^i(M)$ s'appelle le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de M .

Le nombre de Lefschetz de l'application identique se note

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(M)$$

et s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de M . Voir 5.1 et suivants].

On peut alors énoncer le

4.17. THEOREME : (Lefschetz) Sous les hypothèses de 4.15, si $\lambda_f \neq 0$ alors f a un point fixe : il existe un $x \in M$ tel que $f(x) = x$.

En fait il existe des versions "doubles" de 4.15 et 4.17 qui font, elles, intervenir l'homomorphisme de Gysin : soit M, N deux variétés différentiables compactes orientées de même dimension n , $f : M \rightarrow N$, $g : M \rightarrow N$ deux applications continues. On note $f_i^* : H^i(N) \rightarrow H^i(M)$ et $g_*^i : H^i(M) \rightarrow H^i(N)$ les $i^{\text{èmes}}$ composantes de f^* , g_* respectivement.

4.16bis DEFINITION : Le nombre de Lefschetz de (f, g) est

$$\lambda_{f, g} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(f_i^* \circ g_*^i).$$

4.17bis THEOREME : Dans ces conditions, si $\lambda_{f, g} \neq 0$, il existe un $x \in M$ tel que $f(x) = g(x)$.

Il est évident que, si l'on fait $N = M$ et $g = \text{Id}_M$, on trouve $\lambda_{f, g} = \lambda_f$: ainsi 4.17 est un corollaire immédiat de 4.17bis, et c'est celui-ci que nous allons prouver.

Démonstration de 4.17bis : Le retour de l'homomorphisme de Gysin se fait d'abord par le biais de l'opération suivante :

considérer $h : M \rightarrow N \times N : x \mapsto (f(x), g(x))$ et la diagonale $\Delta : N \rightarrow N \times N : y \mapsto (y, y)$.

Il existe alors un $x \in M$ tel que $f(x) = g(x)$ ssi $h(M) \cap \Delta(N) \neq \emptyset$, d'où l'idée d'avoir recours au Lemme 4.13.

En effet $\Delta(N)$ est notoirement une sous-variété fermée de $N \times N$ de sorte que, si l'on note $\varepsilon : \Delta(N) \rightarrow N \times N$ l'inclusion, le Lemme 4.13 assure que $h(M) \cap \Delta(N) \neq \emptyset$ si $h^* \circ \varepsilon_* \neq 0$.

Par ailleurs, comme $\Delta(N)$ est C^∞ -difféomorphe à N par Δ , $h^* \circ \varepsilon_* = 0$ ssi $h^* \circ \Delta_* = 0$.

Ainsi le Lemme 4.13 fait-il apparaître le présent théorème comme un corollaire immédiat du

4.18. THEOREME : Si $h^* \circ \Delta_* = 0$, alors $\lambda_{f,g} = 0$.

A l'aide de 4.14 et de 2.18, ce théorème apparaît à son tour comme un corollaire immédiat du

4.19. THEOREME : Si $\Delta^* \circ h_* = 0$, alors $\lambda_{f,g} = 0$.

Démonstration de 4.19 : C'est une affaire de calcul (cf. 4.24).

Soit, pour tout entier k ($0 \leq k \leq n$), $\mu_k = \dim H^k(M)$, et $(a_\kappa^k)_{\kappa \in \{1, \dots, \mu_k\}}$ une base de $H^k(M)$. On définit par dualité de Poincaré une deuxième famille de bases ; pour tout entier k ($0 \leq k \leq n$), la nouvelle base de $H^k(M)$ est notée $(\bar{a}_\kappa^k)_{\kappa \in \{1, \dots, \mu_k\}}$. Les deux familles sont duales en ce sens que, pour tous entiers k ($0 \leq k \leq n$), κ ($1 \leq \kappa \leq \mu_k$), χ ($1 \leq \chi \leq \mu_{n-k}$),

$$\langle a_\kappa^k, \bar{a}_\chi^{n-k} \rangle = \delta_{\kappa\chi} = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa = \chi \\ 0 & \text{si } \kappa \neq \chi \end{cases}.$$

(Bien entendu, la dualité de Poincaré impose que $\mu_k = \mu_{n-k}$).

La même construction relativement à N donne, pour tout entier k ($0 \leq k \leq n$), des bases $(b_{\kappa}^k)_{\kappa \in \{1, \dots, v_{\kappa}\}}$ et $(\bar{b}_{\kappa}^k)_{\kappa \in \{1, \dots, v_{\kappa}\}}$ de $H^k(N)$ (où $v_{\kappa} = \dim H^k(N)$) telles que $\langle b_{\kappa}^k, \bar{b}_{\chi}^{n-k} \rangle = \delta_{\kappa\chi}$.

4.20. **LEMME** : Soit, pour tous entiers k ($0 \leq k \leq n$), κ ($1 \leq \kappa \leq v_{\kappa}$), χ ($1 \leq \chi \leq v_{\chi}$),

$$c_{\kappa\chi}^k = b_{\kappa}^k \cup b_{\chi}^{n-k} \in H^n(N \times N) \quad \text{et} \quad \bar{c}_{\kappa\chi}^k = (-1)^{n(n-k)} \bar{b}_{\kappa}^{n-k} \cup b_{\chi}^k \in H^n(N \times N).$$

Alors les familles $(c) = (c_{\kappa\chi}^k)$ et $(\bar{c}) = (\bar{c}_{\kappa\chi}^k)$, où k, κ, χ parcourent les ensembles sus-indiqués, sont des bases de $H^n(N \times N)$, duales l'une de l'autre au sens où

$$\langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^{\ell} \rangle = \delta_{k\ell} \delta_{\kappa\sigma} \delta_{\chi\tau}.$$

Démonstration : Qu'il s'agisse de bases est une conséquence immédiate du théorème de Künneth (3.6 ... ou 3.9). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^{\ell} \rangle &= (-1)^{n(n-k)} \langle b_{\kappa}^k \cup b_{\chi}^{n-k}, \bar{b}_{\sigma}^{n-\ell} \cup b_{\tau}^{\ell} \rangle \\ &= (-1)^{n(n-k)} \langle (b_{\kappa}^k \cup b_{\chi}^{n-k}), (\bar{b}_{\sigma}^{n-\ell} \cup b_{\tau}^{\ell}), \underline{1}_{\chi} \rangle \end{aligned}$$

(où $\underline{1}_{\chi} \in H^0(N \times N)$ est la fonction constante égale à 1 sur $N \times N$) d'après 2.16 (i).

Ainsi, d'après V.3.3.(i),

$$\langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^{\ell} \rangle = (-1)^{n(n-k)+(n-k)(n-\ell)} \langle b_{\kappa}^k \cup b_{\chi}^{n-k}, \bar{b}_{\sigma}^{n-\ell} \cup b_{\tau}^{\ell}, \underline{1}_{\chi} \rangle.$$

Comme, pour $j > n$, $H^j(N) = 0$,

$$b_{\kappa}^k \cup b_{\sigma}^{n-\ell} = 0 \quad \text{si} \quad k+n-\ell > n$$

$$\text{et} \quad \bar{b}_{\chi}^{n-k} \cup b_{\tau}^{\ell} = 0 \quad \text{si} \quad n-k+\ell > n,$$

ce qui fait que $\langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^{\ell} \rangle = 0$ si $k \neq \ell$.

On suppose désormais $\ell = k$. Utilisant 2.16 (iv), on obtient :

$$\langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^k \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle b_{\kappa}^k, \bar{b}_{\sigma}^{n-k}, \underline{1}_N \rangle \langle \bar{b}_{\chi}^{n-k}, b_{\tau}^k, \underline{1}_N \rangle$$

où $\underline{1}_N \in H^0(N)$ désigne la fonction constante égale à 1 sur N. Ainsi (2.16(i) de nouveau) :

$$\begin{aligned} \langle c_{\kappa\chi}^k, \bar{c}_{\sigma\tau}^k \rangle &= (-1)^{k(n-k)} \langle b_{\kappa}^k, \bar{b}_{\sigma}^{n-k} \rangle \langle \bar{b}_{\chi}^{n-k}, b_{\tau}^k \rangle \\ &= (-1)^{k(n-k)} \delta_{\kappa\sigma} \cdot (-1)^{k(n-k)} \delta_{\tau\chi} \end{aligned}$$

par définition des bases duales et d'après 2.16 (ii). \square

On pose alors, pour tous entiers k ($0 \leq k \leq n$) et κ ($1 \leq \kappa \leq v_k$) :

$$f^*(b_{\kappa}^k) = \sum_{\sigma=1}^{u_k} \alpha_{\sigma}^k a_{\sigma}^k ;$$

pour tous entiers ℓ ($0 \leq \ell \leq n$) et χ ($1 \leq \chi \leq v_{\ell}$) :

$$g^*(\bar{b}_{\chi}^{\ell}) = \sum_{\tau=1}^{u_{\ell}} \chi^{\ell} \bar{a}_{\tau}^{\ell} .$$

4.21. LEMME : Avec ces notations, si $\underline{1}_M \in H^0(M)$ désigne la fonction constante égale à 1 sur M ,

$$h_*(\underline{1}_M) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n(n-k)} \sum_{\kappa=1}^{v_k} \sum_{\chi=1}^{v_k} \sum_{\sigma=1}^{u_k} \alpha_{\sigma}^k \chi^{\sigma-n-k} \bar{b}_{\kappa}^{n-k} \cup b_{\chi}^k .$$

Démonstration : D'après 4.20, le coefficient relatif à $\bar{c}_{\kappa\chi}^k$ dans la décomposition sur la base (\bar{c}) de $h_*(\underline{1}_M) \in H^n(M \times M)$ est $\langle c_{\kappa\chi}^k, h_*(\underline{1}_M) \rangle$.

Comme $\dim(N \times N) = 2n$ et d'après 4.8 (i), ce coefficient est

$$(-1)^{n^2} \langle h^*(c_{\kappa\chi}^k), \underline{1}_M \rangle = (-1)^n \langle h^*(b_{\kappa}^k \cup \bar{b}_{\chi}^{n-k}), \underline{1}_M \rangle .$$

D'après 3.14,

$$\begin{aligned} h^*(b_{\kappa}^k \cup b_{\chi}^{\bar{n}-k}) &= f^*(b_{\kappa}^k) g^*(b_{\chi}^{\bar{n}-k}) \\ &= \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \sum_{\tau=1}^{H_{\chi}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\tau}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\tau}^{\bar{n}-k} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle h^*(c_{\kappa\chi}^k), 1_{\mathbb{Z}M} \rangle &= \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \sum_{\tau=1}^{H_{\chi}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\tau}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\tau}^{\bar{n}-k} \langle a_{\sigma}^k a_{\tau}^{\bar{n}-k}, 1_{\mathbb{Z}M} \rangle \\ &= \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \sum_{\tau=1}^{H_{\chi}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\tau}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\tau}^{\bar{n}-k} \langle a_{\sigma}^k a_{\tau}^{\bar{n}-k} \rangle \\ &= \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\sigma}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\sigma}^{\bar{n}-k} \end{aligned}$$

Finalement,

$$h_*(1_{\mathbb{Z}M}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\kappa=1}^{V_{\kappa}} \sum_{\chi=1}^{V_{\chi}} ((-1)^n \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\sigma}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\sigma}^{\bar{n}-k}) c_{\kappa\chi}^k$$

qui est le résultat annoncé. \square

4.22. COROLLAIRE :

$$\langle \Delta^* \circ h_*(1_{\mathbb{Z}M}), 1_{\mathbb{Z}N} \rangle = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{\kappa=1}^{V_{\kappa}} \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\sigma}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\sigma}^{\bar{n}-k}$$

Démonstration : Utilisant de nouveau 3.14, on voit que $\Delta^*(b_{\kappa}^{\bar{n}-k} \cup b_{\chi}^k) = b_{\kappa}^{\bar{n}-k} b_{\chi}^k$, d'où, comme $\langle b_{\kappa}^{\bar{n}-k} b_{\chi}^k, 1_{\mathbb{Z}N} \rangle = \langle b_{\kappa}^{\bar{n}-k}, b_{\chi}^k \rangle = (-1)^{k(n-k)} \delta_{\kappa\chi}$,

$$\langle \Delta^* \circ h_*(1_{\mathbb{Z}M}), 1_{\mathbb{Z}N} \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n(n-k)} \sum_{\kappa=1}^{V_{\kappa}} \sum_{\sigma=1}^{H_{\kappa}} (-1)^{k(n-k)} \kappa_{\sigma}^{\alpha} \chi_{\sigma}^{\beta} b_{\sigma}^k b_{\sigma}^{\bar{n}-k}$$

$$\text{Or } n+n(n-k) + k(n-k) \equiv n + (n-k)^2 \pmod{2}$$

$$\equiv n + n - k \pmod{2}$$

$$\equiv k \pmod{2},$$

d'où le résultat annoncé. \square

Mais, d'un autre côté,

4.23. LEMME : Pour tout entier k ($0 \leq k \leq n$),

$$\text{Tr}(f_k^* \circ g_k^*) = \sum_{i=1}^{\mu_k} \sum_{j=1}^{\nu_k} j^{\alpha_i^k} j^{\beta_j^k} j^{-n-k}.$$

Démonstration : Pour tous entiers κ ($1 \leq \kappa \leq \mu_k$) et χ ($1 \leq \chi \leq \nu_k$),

$$\begin{aligned} \langle g_*(a_\kappa^k), b_\chi^{\bar{n}-k} \rangle &= \langle a_\kappa^k, g^*(b_\chi^{\bar{n}-k}) \rangle & (4.2) \\ &= \sum_{\tau=1}^{\mu_k} \chi^{\beta_\tau^k} \langle a_\kappa^k, a_\tau^{\bar{n}-k} \rangle \\ &= \chi^{\beta_\kappa^k}. \end{aligned}$$

Ainsi $g_*(a_\kappa^k) = \sum_{\chi=1}^{\nu_k} \chi^{\beta_\kappa^k} b_\chi^{\bar{n}-k}$.

De là,

$$f^* \circ g_*(a_\kappa^k) = \sum_{\chi=1}^{\nu_k} \chi^{\beta_\kappa^k} \sum_{\sigma=1}^{\mu_k} \chi^{\alpha_\sigma^k} a_\sigma^k.$$

La matrice de $f_k^* \circ g_*$ dans la base $(a_\kappa^k)_{\kappa \in \{1, \dots, \mu_k\}}$ a donc pour coefficient en σ^e ligne et κ^e colonne $\sum_{\chi=1}^{\nu_k} \chi^{\alpha_\sigma^k} \chi^{\beta_\kappa^k}$. La somme des éléments diagonaux donne le résultat annoncé. \square

4.24. COLLAIRE :

$$\lambda_{f,g} = \langle \Delta^* \circ h_*(\frac{1}{2}M), \frac{1}{2}N \rangle.$$

Démonstration : Triviale d'après 4.22 et 4.23. \square

Fin de la démonstration : De 4.24 résulte immédiatement 4.19, donc 4.18, 4.17bis et 4.17. \square

4.25. REMARQUE : L'hypothèse de compacité faite sur M dans 4.17 (sur M et N dans 4.17 bis) n'est pas qu'une commodité de démonstration. Elle est véritablement fondamentale comme on peut le voir très simplement en prenant $M = \mathbb{R}$ (dont la cohomologie est bien de dimension finie !) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x+1$.

L'importance des théorèmes de point fixe est universellement reconnue (cf. ici V.5.2). On trouve parmi les applications classiques de celui-ci :

4.26. THEOREME : Soit M une variété différentiable compacte orientée. Si $f : M \rightarrow M$ est une application continue homotope à une application constante, f a un point fixe.

Démonstration : Soit $c : M \rightarrow M$ une application constante homotope à f . Le nombre de Lefschetz est évidemment invariant par homotopie : $\lambda_f = \lambda_c$.

Or, pour tout entier $k > 0$,

$$c_k^* = 0 : H^k(M) \rightarrow H^k(M) .$$

Par ailleurs, soit M_1, \dots, M_q les composantes connexes de M et supposons que, pour tout $x \in M$, $c(x) \in M_1$ (ce qui, à une renumérotation près, n'est pas une restriction de généralité). Alors $H^0(M) \cong \mathbb{R}^q$ et la matrice de $c_0^* : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} , \text{ d'où } \text{Tr}(c_0^*) = 1. \text{ Finalement } \lambda_f = \lambda_c = 1 \neq 0. \quad \square$$

4.26 bis EXERCICE : Démontrer la version "double" du résultat précédent :

Si M est une variété différentiable compacte orientée ; $f : M \rightarrow M$ une application continue homotope à une application constante ; $g : M \rightarrow M$ une application continue homotope à Id_M ;

alors il existe un $x \in M$ tel que $f(x) = g(x)$.

4.27. THEOREME : Soit M une variété différentiable compacte orientée, telle que $\chi(M) \neq 0$ (cf. 4.16). Si $f : M \rightarrow M$ est une application continue homotope à l'application identique, f a un point fixe.

Démonstration : L'invariance du nombre de Lefschetz par homotopie montre que $\lambda_f = \chi(M)$.
□

4.28. THEOREME : Lorsque n est pair, il n'existe pas d'application continue $f : S^n \rightarrow S^n$ telle que, pour tout $x \in S^n$, $f(x)$ soit orthogonal à x .

Démonstration : Montrons que l'existence d'une telle f implique que n est impair.

De toute façon (quelle que soit la parité de n), si $a \in S^n$, $b \in S^n$, b étant orthogonal à a , alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $ta + (1-t)b \neq 0$.

S'il existait une application f possédant les propriétés de l'énoncé, on peut donc définir une homotopie entre f et Id_{S^n} en posant, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in S^n$,

$$f_t(x) = \frac{tf(x) + (1-t)x}{\|tf(x) + (1-t)x\|}.$$

Alors $\chi_{f_t} = \chi(S^n)$. Par ailleurs une telle f est évidemment sans point fixe, d'où $\chi(S^n) = 0$.

Or (cf. V.2.3) $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Donc n est impair. \square

4.29. REMARQUE : Bien que nous n'ayons pas défini le fibré tangent à une variété différentiable (cf. [11]), la notion de champ de vecteurs tangents est facile à énoncer dans le cas d'une sphère : un champ de vecteurs tangents à S^n est simplement une application continue (resp. différentiable, de classe C^∞)

$$\omega : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

telle que, pour tout $x \in S^n$, $\omega(x)$ soit orthogonal à x .

Le Théorème 4.28 peut se réécrire de ce point de vue sous la forme suivante, la plus célèbre :

4.30. THEOREME : Lorsque n est pair, la sphère S^n n'admet pas de champ de vecteurs tangents partout non nul.

(Ce résultat est décrit classiquement pour $n = 2$, par la remarque qu'"il fait toujours beau quelque part" (il existe un point à la surface de la Terre où le vent tangentiel est nul) ou par l'impossibilité de "peigner une sphère chevelue").

Démonstration : Si $\omega : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est un tel champ de vecteurs, poser, pour tout $x \in S^n$, $f(x) = \frac{\omega(x)}{\|\omega(x)\|}$ pour se ramener à 4.28. \square

4.31. REMARQUE : Par contre, dans le cas où n est impair, un tel champ de vecteurs est très facile à construire : poser, pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2p-1}, x_{2p}) \in S^{2p-1} \subset \mathbb{R}^{2p}$, $\omega(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2p}, x_{2p-1})$. \square

Un dernier exemple d'application où la parité apparaît encore plus nettement (cf. aussi 5.4 et suivants) :

4.32. THEOREME : Quel que soit l'entier n , si un groupe cyclique fini opère librement sur $\mathbb{C}P^n$, ce groupe est d'ordre 2.

Démonstration : Soit C un groupe cyclique fini opérant librement sur $\mathbb{C}P^n$, r son ordre, $\omega \in C$ un générateur.

Comme ω^r est l'élément neutre de C , $\tilde{\omega} : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ (cf. III.7.6) vérifie $(\tilde{\omega})^r = (\tilde{\omega}^r) = \text{Id}_{\mathbb{C}P^n}$, donc $\tilde{\omega}^* : H^*(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P^n)$ vérifie $(\tilde{\omega}^*)^r = (\tilde{\omega}^r)^* = \text{Id}_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$.

Or, pour tout entier i ($0 \leq i \leq n$), $H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$; ainsi, pour tout i ($0 \leq i \leq n$), $\tilde{\omega}_{2i}^* : H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{2i}(\mathbb{C}P^n)$ est soit $\text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$, soit $(-\text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)})$.

Dans l'un et l'autre cas, $(\tilde{\omega}_{2i}^*)^2 = \text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$ et finalement $(\tilde{\omega}^2)^* = (\tilde{\omega}^*)^2 = \text{Id}_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$, d'où $\chi_{\tilde{\omega}^2} = \chi(\mathbb{C}P^n) = n+1 \neq 0$: il en résulte que $\tilde{\omega}^2$ a un point fixe donc, C opérant librement sur $\mathbb{C}P^n$, que ω^2 est l'élément neutre de C . \square

5. COMPLÉMENTS ET PROBLÈMES.

D'abord quelques exercices relatifs à la caractéristique d'Euler-Poincaré. On n'a pas besoin pour la définir (cf. 4.16) - non plus d'ailleurs que pour définir le nombre de Lefschetz - de supposer la variété orientable. Par contre la cohomologie de celle-ci doit être de dimension finie, ce qu'on supposera de toutes les variétés qui interviendront dans les énoncés qui suivent.

5.1. : Si U et V sont des ouverts de la variété différentiable M tels que $M = U \cup V$,

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V) .$$

5.2. : Pour un produit cartésien :

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N) .$$

Plus généralement on peut définir (de façon analogue à V.4.11) la notion de fibration différentielle : (E, π, B) est une fibration différentielle de fibre F (B, E, F étant des variétés différentiables et $\pi : E \rightarrow B$ une application de classe C^∞) si tout point de B possède un voisinage V (dit trivialisant) au-dessus duquel le diagramme suivant est rendu commutatif par un difféomorphisme ϕ :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & V \end{array}$$

Si B est compacte, il existe un recouvrement fini de B par des ouverts trivialisants possédant la propriété 3.1. (ii).

5.3. : Si (E, π, B) est une fibration différentielle de fibre F , B étant compacte,

$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F) .$$

En déduire

5.4. : Si G est un groupe fini opérant librement sur la variété compacte E (III.7.6), son ordre $|G|$ divise $\chi(E)$.

De là

5.5. : Seul le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut opérer librement sur S^{2n} .

Par contre, la sphère S^{2n-1} pouvant être regardée comme sphère unité de \mathbb{C}^n (en particulier $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$),

5.6. : S^1 opère librement sur S^{2n-1} .

Pour tout entier q , $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (isomorphe au groupe des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité) opère librement sur S^{2n-1} .

En ce qui concerne les espaces projectifs complexes (cf. 4.32) :

5.7. : Si n est pair, aucun groupe cyclique fini ne peut opérer librement sur $\mathbb{C}P^n$.

Par contre