

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

**METHODES DE GEOMETRIE  
DIFFERENTIELLE EN  
TOPOLOGIE ALGEBRIQUE**

PARTIE I

Max KARÓUBI et Christian LERUSTE

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES & L.A. 212 DU C.N.R.S.



TABLE DES MATIERES

**PARTIE I**

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I - PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.....	3
1. Applications bilinéaires.....	3
2. Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.....	4
3. Commutativité. Associativité.....	9
4. Produit tensoriel d'applications linéaires.....	11
5. Produit tensoriel d'une somme directe ("Distributivité").....	13
6. Suites exactes.....	15
7. Algèbre tensorielle.....	19
8. Puissances extérieures. Algèbre extérieure.....	21
9. Puissances symétriques. Algèbre symétrique.....	27
10. Dualité.....	28
11. Modules.....	30
CHAPITRE II - FORMES DIFFERENTIELLES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$ .....	31
0. Rappels de calcul différentiel.....	31
1. Formes différentielles.....	34
2. Différentielle extérieure.....	38
3. Image réciproque d'une forme différentielle.....	44
4. Cohomologie de De Rham.....	50

5. Homotopie.....	52
6. Cohomologie des espaces $\mathbb{R}^n$ .....	57
7. Cohomologie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .....	58
8. Formes différentielles à support compact.....	63
CHAPITRE III - VARIETES DIFFERENTIABLES.....	67
1. Variétés topologiques.....	68
2. Premiers exemples.....	70
3. Théorème des fonctions implicites.....	77
4. Suite des exemples.....	81
5. Variétés différentiables.....	94
6. Reprise des exemples.....	101
7. Exercices.....	109
CHAPITRE IV - COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIETES DIFFERENTIABLES.....	111
1. Formes différentielles sur une variété différentiable.....	111
2. Images réciproque d'une forme différentielle par une application différentiable.....	118
3. Différentielle extérieure. Cohomologie de De Rham des variétés.....	120
4. Cohomologie à supports compacts.....	123
5. Partitions différentiables de l'unité.....	123
6. Exemples.....	134
7. Structures multiplicatives.....	140
<b>PARTIE II</b>	
CHAPITRE V - CALCUL DE LA COHOMOLOGIE.....	145
1. Préliminaires algébriques.....	145
2. Suite exacte de Mayer-Vietoris.....	150
3. Formule de Künneth (premier épisode).....	153
4. Cohomologie à supports compacts et cohomologie relative.....	162
5. Quelques théorèmes célèbres.....	176
CHAPITRE VI - DUALITE DE POINCARÉ - THEOREME DE LEFSCHETZ.....	189
1. Orientation et cohomologie en dimension maximale.....	139
2. Dualité de Poincaré.....	203

3. A variété compacte cohomologie finie. Formule de Künneth : Suite et fin.....	222
4. Le Théorème de Lefschetz.....	241
5. Compléments et problèmes.....	261
 BIBLIOGRAPHIE.....	 279
 LISTE DE SYMBOLES ET NOTATIONS.....	 281
 INDEX.....	 285



## INTRODUCTION

Il existe plusieurs présentations de la Topologie algébrique : homologie et cohomologie singulières, théorie de l'homotopie, K-théorie, cobordisme, etc... Celle que nous avons choisie est fondée sur la cohomologie de De Rham des variétés différentiables.

Les avantages de cette présentation sont nombreux : formalisme algébrique réduit au minimum (calcul tensoriel, algèbre extérieure), structure multiplicative agréable et naturelle de la cohomologie, démonstrations se suffisant à elles-mêmes sans référence à la littérature. Un autre avantage est la culture mathématique variée et pas trop spécialisée nécessaire à la compréhension de ces notes, ce qui en fait un cours accessible à des étudiants de fin de Maîtrise.

En contrepartie, il est bien clair que cette approche a ses limites en ce sens que les phénomènes de torsion de la cohomologie ne sont pas étudiés (quoique cela soit possible dans la présentation "moderne" de la cohomologie de De Rham due à Sullivan, Grothendieck et Miller : cf. l'article de H. Cartan [ 3]). De même la théorie de l'homotopie est pratiquement absente. Il faut donc voir ce cours comme une première étape vers la Topologie Algébrique et la Géométrie des Variétés. Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons le lecteur par exemple aux références suivantes : [ 6 ], [ 8 ], [ 12 ], [ 15 ], [ 16 ], [ 17 ] ; [ 13 ], [ 18 ].

*N.B. : Une référence donnée par un nombre entre crochets (p.ex. [?]) renvoie à la bibliographie placée en fin de volume.*

*Les références internes au texte sont données :*

- à l'intérieur d'un même chapitre par deux nombres en chiffres arabes (p. ex. 3.17).
- d'un chapitre à l'autre par trois nombres, le premier, en chiffres romains, indiquant le chapitre (p.ex. IV.2.1).

*Max Karoubi - Christian Leruste*

*Université Paris VII*

*Février 1982.*