4.31. <u>REMARQUE</u> : Par contre, dans le cas où n est impair, un tel champ de vecteurs est très facile à construire : poser, pour tout $x = (x_1,x_2,\dots,x_{2p-1},x_{2p}) \in S^{2p-1} \subset \mathbb{R}^{2p}$, $\omega(x) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3,\dots,-x_{2p},x_{2p-1})$. □

Un dernier exemple d'application où la parité apparaît encore plus nettement (cf. aussi 5.4 et suivants) :

4.32. <u>THEOREME</u> : Quel que soit l'entier n, si un groupe cyclique fini opère librement sur $\mathbb{C}P^n$, ce groupe est d'ordre 2.

<u>Démonstration</u> : Soit C un groupe cyclique fini opérant librement sur $\mathbb{C}P^n$, r son ordre, $\omega \in C$ un générateur.

<u>Comme</u> ω^r est l'élément neutre de C, $\tilde{\omega} : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ (cf. III.7.6) vérifie $(\tilde{\omega})^r = (\widetilde{\omega^r}) = Id_{\mathbb{C}P^n}$, donc $\tilde{\omega}^* : H^*(\mathbb{C}P^n) \to H^*(\mathbb{C}P^n)$ vérifie $(\tilde{\omega}^*)^r = (\widetilde{\omega^r})^* = Id_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$.

Or, pout tout entier i $(0 \le i \le n)$, $H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$; ainsi, pour tout i $(0 \le i \le n)$, $\tilde{\omega}^*_{2i} : H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2i}(\mathbb{C}P^n)$ est soit $Id_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$, soit $(-Id_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)})$.

Dans l'un et l'autre cas, $(\tilde{\omega}^*_{2i})^2 = Id_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$ et finalement $(\widetilde{\omega^2})^* = (\tilde{\omega}^*)^2 = Id_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$, d'où $\lambda_{\widetilde{\omega^2}} = \chi(\mathbb{C}P^n) = n+1 \neq 0$: il en résulte que $\widetilde{\omega^2}$ a un point fixe donc, C opérant <u>librement</u> sur $\mathbb{C}P^n$, que ω^2 est l'élément neutre de C. □

5. COMPLÉMENTS ET PROBLÈMES.

D'abord quelques exercices relatifs à la caractéristique d'Euler-Poincaré. On n'a pas besoin pour la définir (cf. 4.16) - non plus d'ailleurs que pour définir le nombre de Lefschetz - de supposer la variété orientable. Par contre la cohomologie de celle-ci doit être de dimension finie, ce qu'on supposera de toutes les variétés qui interviendront dans les énoncés qui suivent.

5.1. : Si U et V sont des ouverts de la variété différentiable M tels que $M = U \cup V$,

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V) .$$

5.2. : Pour un produit cartésien :

$$\chi(M \times N) = \chi(M).\chi(N) .$$

Plus généralement on peut définir (de façon analogue à V.4.11) la notion de <u>fibration différentielle</u> : (E,π,B) est une fibration différentielle de fibre F (B,E,F étant des variétés différentiables et $\pi : E \to B$ une application de classe C^∞) si tout point de B possède un voisinage V (dit trivialisant) au-dessus duquel le diagramme suivant est rendu commutatif par un difféomorphisme ϕ :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Si B est compacte, il existe un recouvrement fini de B par des ouverts trivialisants possédant la propriété 3.1. (ii).

5.3. : Si (E,π,B) est une fibration différentielle de fibre F, B étant compacte,

$$\chi(E) = \chi(B).\chi(F) .$$

En déduire

5.4. : Si G est un groupe fini opérant librement sur la variété compacte E (III.7.6), son ordre $|G|$ divise $\chi(E)$.

De là

5.5. : Seul le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut opérer librement sur S^{2n}.

Par contre, la sphère S^{2n-1} pouvant être regardée comme sphère unité de $\mathbb{C}^n$ (en particulier $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$),

5.6. : S^1 opère librement sur S^{2n-1}

Pour tout entier q, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (isomorphe au groupe des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité) opère librement sur S^{2n-1}.

En ce qui concerne les espaces projectifs complexes (cf. 4.32) :

5.7. : Si n est pair, aucun groupe cyclique fini ne peut opérer librement sur $\mathbb{C}P^n$.

Par contre

5.8. : L'opération de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}P^{2n-1}$ définie par

$$[z_1,z_2,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_{2n}] \mapsto [-\overline{z_{n+1}},\dots,-\overline{z_{2n}},\overline{z_1},\dots,\overline{z_n}]$$

est libre.

Toujours la caractéristique d'Euler-Poincaré :

5.9. : Si M est compacte de dimension <u>impaire</u>,

$$\chi(M) = 0 .$$

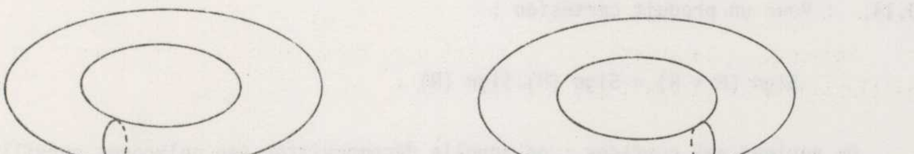
(Démonstration directe si M est orientable. Sinon construire une fibration différentielle $(\widetilde{M},\pi,M)$ de fibre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\dim \widetilde{M} = \dim M$ et $\widetilde{M}$ est orientable : $\widetilde{M}$ est la <u>variété d'orientation</u> de M).

5.10. : Si M est une <u>surface</u> (variété différentiable compacte de dimension 2) orientable de genre g (cf. 2.22),

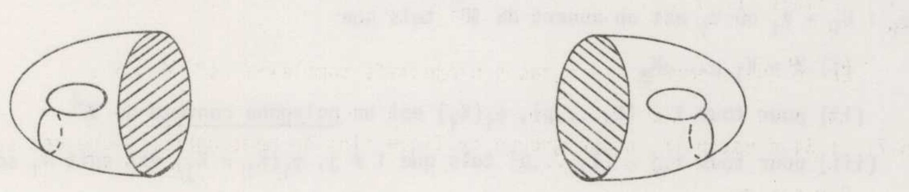
$$\chi(M) = 2 - 2g .$$

Soit $T_1 = S^1 \times S^1$ le tore à 2 dimensions. On admet que l'objet obtenu en

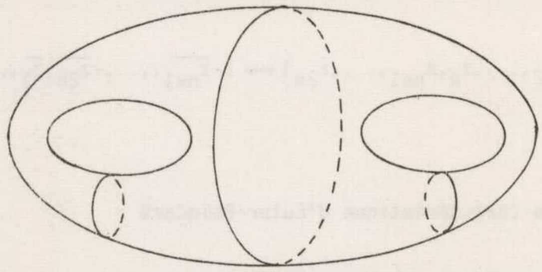
- prenant deux exemplaires de T_1



- ôtant à chacun d'eux l'image d'un disque par une carte



- recollant l'un à l'autre les bords des deux découpes



peut-être muni d'une structure de surface, notée T_2 et baptisée tore à deux trous. (Il est facile de voir que T_2 est une variété topologique. Le problème est de "lisser la soudure" : cf. [13].).

5.11. : Montrer que T_2 est orientable.
Calculer $\chi(T_2)$.

En itérant le procédé, on obtient le tore à m trous T_m (T_3 est le bretzel, T_4 le coup-de-poing américain, etc...).

5.12. : Montrer que T_m est de genre m.

Dans le cas où M est une variété compacte de dimension divisible par 4, sa signature est définie : 2.23.

5.13. : Montrer que Sign (M) $\equiv \chi(M)$ mod. 2

5.14. : Pour un produit cartésien :

$$\text{Sign}(M \times N) = \text{Sign}(M).\text{Sign}(N) .$$

On revient aux surfaces : on appelle <u>décomposition</u> (en polygones curvilignes) d'une surface M la donnée d'une famille finie de compacts $K_1,\ldots,K_p$ de M et, pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, d'un voisinage ouvert U_i de K_i dans M et d'un difféomorphisme $\phi_i : U_i \to V_i$ où V_i est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tels que

(i) $M = K_1 \cup \ldots \cup K_p$

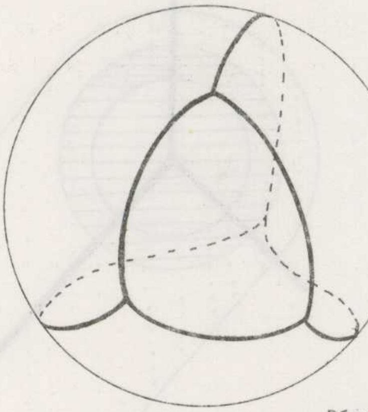
(ii) pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, $\phi_i(K_i)$ est un <u>polygone convexe</u> de $\mathbb{R}^2$

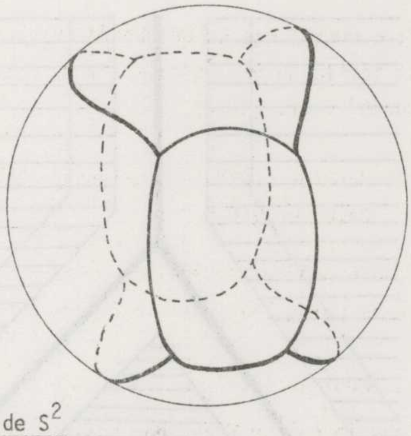
(iii) pour tous $i,j \in \{1,\ldots,p\}$ tels que $i \neq j$, $\phi_i(K_i \cap K_j)$ est soit $\emptyset$, soit un sommet de P_i, soit un côté de P_i.

(Exemples de figures ci-dessous).

On appelle <u>sommets</u> de la décomposition les images des sommets des P_i par les ϕ_i^{-1} ; <u>arêtes</u> les images des côtés ; <u>faces</u> les images des P_i.

Soit S, A, F les nombres respectifs de sommets, arêtes, faces, de la décomposition.



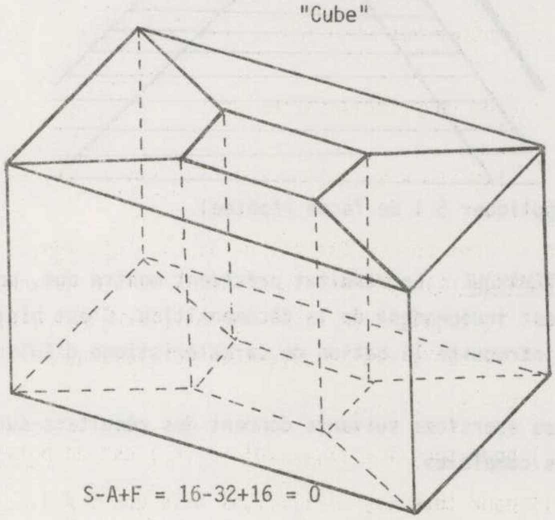


<u>Décompositions de S^2</u>

S-A+F = 4-6+4 = 2
"Tétraèdre"

S-A+F = 8-12+6 = 2
"Cube"

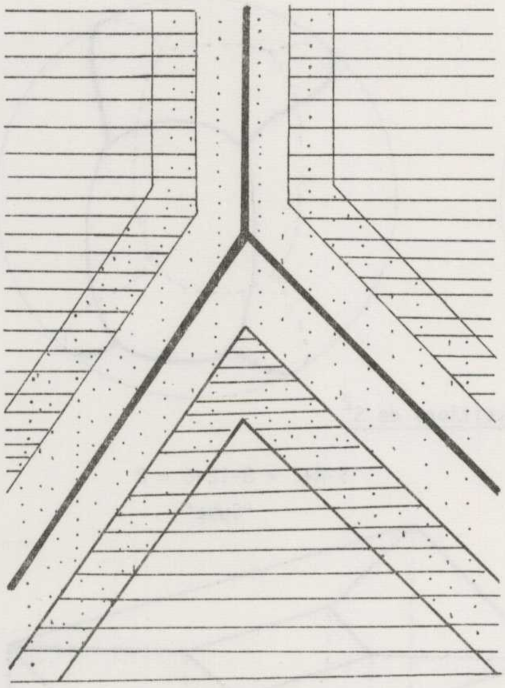
<u>Décomposition de T_1</u>
(à la différentiabilité
près...)

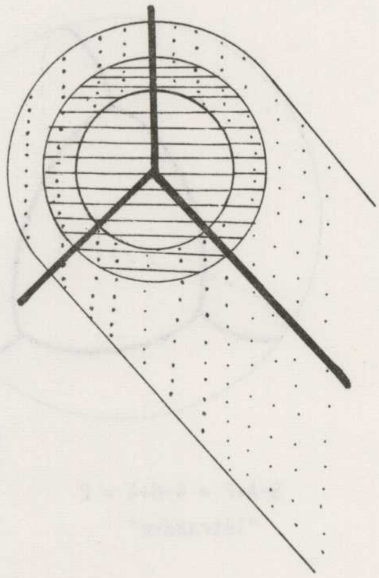


S-A+F = 16-32+16 = 0

5.15. : Montrer que S-A+F = $\chi(M)$.

(Utiliser des disques centrés sur les sommets des polygones P_i, et des polygones inclus dans les P_i et de côtés parallèles à ceux des P_i, pour obtenir des voisinages ouverts des sommets et arêtes de la décomposition inspirés par les figures suivantes :





Appliquer 5.1 de façon répétée).

5.16. <u>REMARQUE</u> : Le résultat précédent montre que, pour une surface donnée, le nombre S-A+F est indépendant de la décomposition. C'est historiquement sous cette forme que s'est introduite la notion de caractéristique d'Euler.

Les exercices suivants donnent des résultats sur la cohomologie des Grasmanniennes complexes.

On décompose en somme directe $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{C}_n$ où $\mathbb{C}^{n-1}$ est "inclus" dans $\mathbb{C}^n$ comme d'habitude par $(z_1,\ldots,z_{n-1}) \mapsto (z_1,\ldots,z_{n-1},0)$ et $\mathbb{C}_n \cong \mathbb{C}$ est le sous-espace vectoriel des éléments de la forme $(0,\ldots,0,z)$. Dans ces conditions, on a pour tout entier $p \le n$ une "inclusion"

$$\varepsilon : G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \longrightarrow G_p(\mathbb{C}^n) : L \mapsto L \oplus \mathbb{C}_n .$$

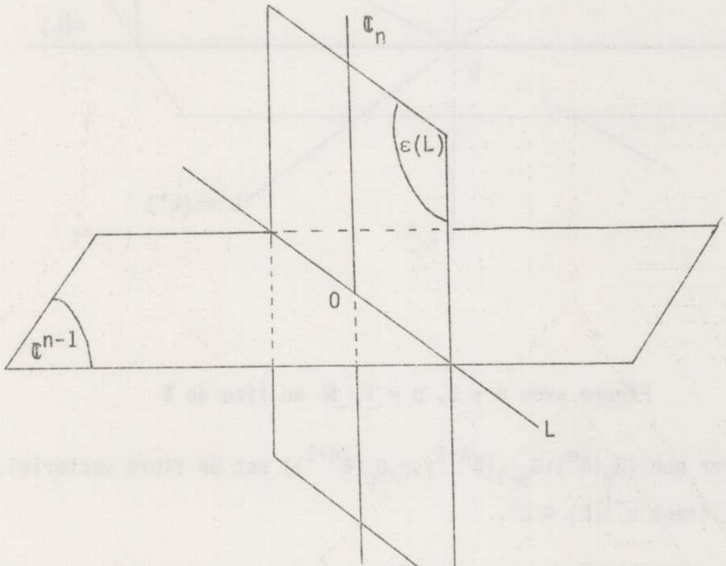


Figure avec n = 3, p = 2 (et, bien sûr, $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$)

Alors $G_p(\mathbb{C}^n)\backslash G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1})$ est l'ensemble des éléments de $G_p(\mathbb{C}^n)$ dont l'intersection avec $\mathbb{C}_n$ est réduite à $\{0\}$. Par conséquent l'inclusion $G_p(\mathbb{C}^{n-1}) \subset G_p(\mathbb{C}^n)$ factorise à travers

$$\iota : G_p(\mathbb{C}^{n-1}) \longrightarrow G_p(\mathbb{C}^n)\backslash G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1}) : L \mapsto L$$

et la projection π sur $\mathbb{C}^{n-1}$ parallèlement à $\mathbb{C}_n$ induit

$$\pi : G_p(\mathbb{C}^n)\backslash G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \longrightarrow G_p(\mathbb{C}^{n-1}) : L \mapsto \pi(L)$$

telle que $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{G_p(\mathbb{C}^{n-1})}$.

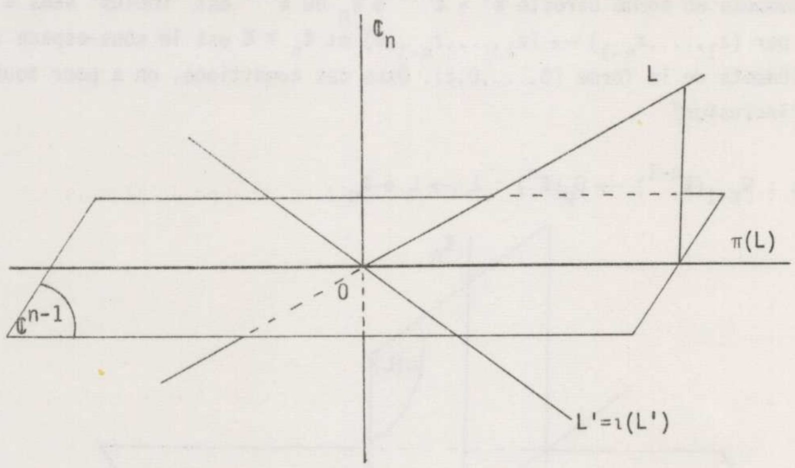


Figure avec n = 3, p = 1, $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.

5.17. : Montrer que $(G_p(\mathbb{C}^n)\setminus G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1}),\pi,G_p(\mathbb{C}^{n-1}))$ est un fibré vectoriel, la fibre au dessus de L étant $\pi^{-1}(L) \cong L^*$.

5.18. : Montrer que π^*, donc ι^*, donc ι_*^C sont des isomorphismes. (cf. 4.12).

En déduire à l'aide de V.4.8 et V.4.10 une suite exacte infinie (préciser ℓ) :

$$\longrightarrow H^{k-1}(G_p(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow H^{k-1}(G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \longrightarrow H^{\ell}(G_p(\mathbb{C}^{n-1})) \longrightarrow H^k(G_p(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow H^k(G_{p-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \rightarrow .$$

5.19. : Montrer que, si k est impair,

$$H^k(G_p(\mathbb{C}^n)) = 0 .$$

Montrer que $\chi(G_p(\mathbb{C}^n)) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Ce résultat suffit à calculer la cohomologie de $G_2(\mathbb{C}^4)$, par exemple :

5.20. : Si $M = G_2(\mathbb{C}^4)$, montrer que

$$H^0(M) \cong H^2(M) \cong H^6(M) \cong H^8(M) \cong \mathbb{R},$$
$$H^4(M) \cong \mathbb{R}^2 ,$$

tous les autres espaces vectoriels de cohomologie de De Rham étant nuls.

Si l'on veut trouver la structure multiplicative (cf. 2.26) de $H^*(G_p(\mathbb{C}^n))$ il faut faire appel à la théorie des <u>classes caractéristiques</u>, qui n'est pas développée dans ce livre (cf. [8]).

On trouve que $H^*(G_p(\mathbb{C}^n))$ est une algèbre de polynômes à plusieurs variables tronquée :

5.21. : <u>THEOREME</u> :

$$H^*(G_p(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_p,Y_1,\ldots,Y_{n-p}]/J$$

où, pour tout entier i $(1 \le i \le p)$, $X_i \in H^{2i}(G_p(\mathbb{C}^n))$, pour tout entier j $(1 \le j \le n-p)$, $Y_j \in H^{2j}(G_p(\mathbb{C}^n))$ et J est le plus petit idéal de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_p,Y_1,\ldots,Y_{n-p}]$ tel que $(1+X_1+\ldots+X_p)(1+Y_1+\ldots+Y_{n-p}) \equiv 1 \mod. J$.

5.22. : Vérifier que, pour p = 1, on retrouve la structure de $H^*(\mathbb{C}P^{n-1})$ établie en 2.26.

D'autres classes caractéristiques permettent de déterminer la cohomologie des groupes classiques. Par exemple on peut définir (comme en II.2.4 mais sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$) la forme $\alpha_{n,p} \in \Omega^p(GL(n,\mathbb{C}))$ par $\alpha_{n,p} = \mathrm{Tr}((M^{-1}dM)^p)$. On montre encore que, pour p pair, $\alpha_{n,p} = 0$, et que $d\alpha_{n,2p-1} = \alpha_{n,2p} = 0$. On note alors $a_{2p-1} = [\alpha_{n,2p-1}|_{U(n)}] \in H^{2p-1}(U(n))$ et $b_{2p-1} = [\alpha_{n,2p-1}|_{SU(n)}] \in H^{2p-1}(SU(n))$.

5.23. : On peut montrer (exercice difficile !) que les cohomologies de U(n) et SU(n) sont des algèbres extérieures :

$$H^*(U(n)) = \Lambda(a_1,a_3,\ldots,a_{2n-1})$$

et $$H^*(SU(n)) = \Lambda(b_3, b_5, \ldots, b_{2n-1}) .$$

(Noter la cohérence de ce résultat avec $\dim U(n) = n^2$ et $\dim SU(n) = n^2-1$).

Enfin les énoncés suivants sont ceux de divers examens et partiels tenus à l'Université Paris VII :

5.24 : Soit $S^{p,q}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+q}$ formé des points de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{p+q})$ vérifiant l'équation

$$(x_1)^2 + \ldots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 - \ldots - (x_{p+q})^2 = 1 .$$

1) Vérifier que $S^{p,q}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{p+q}$.

2) Montrer que l'inclusion naturelle i de $S^{p-1} = S^{p,0}$ dans $S^{p,q}$ est une équivalence d'homotopie (c'est-à-dire qu'il existe $r : S^{p,q} \to S^{p-1}$ telle que $r \circ i \simeq \mathrm{Id}_{S^{p-1}}$ et $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_{S^{p,q}}$). En déduire la cohomologie de la variété $S^{p,q}$.

3) Montrer de même que la sous-variété de $\mathbb{C}^n$ définie par l'équation

$$(z_1)^2 + \ldots + (z_n)^2 = 1$$

a le type d'homotopie de S^{n-1} (c'est-à-dire qu'il existe une équivalence d'homotopie entre les deux).

5.25 :

1) Soit X_n le sous-ensemble de $\mathbb{C}P^n$ formé des points de coordonnées homogènes $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ vérifiant l'équation

$$(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 = 0 .$$

Montrer que X_n est une variété analytique complexe de dimension (complexe) n-1 et que X_{n-1} est naturellement une sous-variété fermée de X_n. En déduire que X_n est une variété réelle orientable de dimension 2n-2.

2) Montrer que X_2 est difféomorphe à S^2.

3) Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de X_n ?

4) Soit Σ_{n-1} le sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ formé des points de coordonnées $(z_1,\ldots,z_n)$ vérifiant l'équation

$$(z_1)^2 + \ldots + (z_n)^2 = 1 .$$

Montrer que $X_n - X_{n-1}$ est difféomorphe à Σ_{n-1}.

5) Soit S^{n-1} la sphère usuelle de $\mathbb{R}^n$ et soit TS^{n-1} son "fibré tangent" c'est-à-dire l'ensemble des couples (x,y) où $x \in S^{n-1}$ et $y \in \mathbb{R}^n$ avec x orthogonal à y. Montrer que TS^{n-1} est une sous-variété de dimension $2n-2$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et que Σ_{n-1} lui est difféomorphe. Décrire complètement la situation lorsque $n = 2$.

6) Montrer que $TS^{n-1} \times \mathbb{R}$ est difféomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$. En déduire la cohomologie à supports compacts de TS^{n-1}. Peut-on aussi déduire cette cohomologie de l'isomorphisme de Thom ?

7) A partir de ce qui précède décrire de la manière la plus complète possible la cohomologie des variétés X_3, X_4 ,...

8) Montrer que X_n s'identifie à la Grassmannienne des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^{n+1}$. Retrouver ainsi l'isomorphisme $X_2 \cong S^2$.

5.26 :

a) Calculer le degré de l'application $f : S^1 \to S^1$ définie par $f(z) = z^k$, z étant ici un nombre complexe de module 1 et $k \in \mathbb{Z}$.

b) On identifie S^2 à $\mathbb{C}P^1$ et on considère l'application $g : S^2 \to S^2$ induite par l'endomorphisme $(z,t) \longmapsto (z^k,t^k)$ de $\mathbb{C}^2$. En utilisant par exemple la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que g est de degré k.

c) Soit $P(z) = a_0z^k + \ldots + a_k$ un polynôme de degré $k \geq 0$ à coefficients complexes et soit h l'application induite sur $S^2 = \mathbb{C}P^1$ par

$$(z,t) \longmapsto (a_0z^k + a_1z^{k-1}t + \ldots + a_kt^k \ , \ t^k) .$$

Montrer que h est homotope à l'application définie en b). Quel est son degré ?

d) Déduire de c) que l'application h définie en c) est surjective si $k \neq 0$ (Théorème de d'Alembert).

e) Soit $m : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application propre définie par

$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto (z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \ldots, z_n^{k_n})$$

où les $k_i \in \mathbb{Z}$. Quel est le degré de l'application

$$m^+ : S^{2n} \to S^{2n}$$

qu'on en déduit en considérant le compactifié d'Alexandroff S^{2n} de $\mathbb{C}^n$?

5.27 : Soit n un nombre pair et soit $f : S^n \to S^n$ une application continue de degré $k \neq 0$. Montrer qu'il existe un point x de la sphère tel que $f(-x) = -f(x)$. Par des contre-exemples appropriés montrer aussi que les restrictions sur la parité de n et sur le degré sont nécessaires.

5.28 : Soit $\pi_1 : O(n) \to S^{n-1}$ la fibration standard qui associe à une matrice orthogonale sa première colonne.

a) On suppose que π_1 admet une section $s : S^{n-1} \to O(n)$ (c'est-à-dire une application s telle que $\pi_1 \circ s = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$) et on considère la fibration $\pi_2 : O(n) \to S^{n-1}$ qui associe à une matrice orthogonale sa deuxième colonne. Montrer que l'application

$$\theta : v \longmapsto \frac{v + \pi_2(s(v))}{\|v + \pi_2(s(v))\|}$$

est une application continue de S^{n-1} dans elle-même homotope à l'identité avec $\theta(v) \neq v$ pour tout v.

b) Si n est impair, en déduire que π_1 n'a en fait pas de section.

5.29 : Soit n un nombre entier strictement positif et soit

$$m : S^n \times S^n \to S^n$$

une application continue de bidegré (p,q).

1) Si $\Delta : S^n \to S^n \times S^n$ désigne l'application diagonale, montrer que $m \circ \Delta : S^n \to S^n$ est une application de degré p+q.

2) A tout point x de S^n associons l'isométrie θ_x de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x. Ainsi $\theta_x(v) = v$ si x est orthogonal à v et $\theta_x(x) = -x$. On désigne encore par $\theta_x : S^n \to S^n$ l'application induite sur S^n. Quel est le degré de θ_x ?

3) Soit maintenant

$$m : S^n \times S^n \to S^n$$

définie par $m(x,y) = \theta_x(y)$. Quel est le degré de l'application $x \longmapsto m(x,x) = \theta_x(x)$? En déduire le bidegré de cette application m.

5.30 : Soit $\Delta : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ l'application diagonale.

1) Déterminer l'homomorphisme de Gysin

$$\Delta_* : H^i(\mathbb{C}P^n) \to H^{i+2n}(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n) \ .$$

2) Pour tout couple d'entiers (n,k) avec $k \leq n$ on désigne par

$$i_{k,n} : \mathbb{C}P^k \to \mathbb{C}P^n$$

l'application induite par l'inclusion $\mathbb{C}^{k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Si r et s sont tels que $n \leq r+s < 2n$ et si $f : \mathbb{C}P^r \to \mathbb{C}P^n$ et $g : \mathbb{C}P^s \to \mathbb{C}P^n$ sont deux applications continues homotopes à $i_{r,n}$ et à $i_{s,n}$ respectivement, montrer que $f(\mathbb{C}P^r) \cap g(\mathbb{C}P^s) \neq \emptyset$ (On s'inspirera pour cela de la démonstration du théorème de Lefschetz).

3) Si $r+s < n$ trouver f et g homotopes à $i_{r,n}$ et $i_{s,n}$ respectivement telles que $f(\mathbb{C}P^r) \cap g(\mathbb{C}P^s) = \emptyset$.

Les deux derniers énoncés font mention des groupes d'homotopie, mais rien d'autre n'y est nécessaire que leur

5.31 : DEFINITION : Soit n un entier ≥ 1, M une variété différentiable. L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues définies sur la sphère S^n et à valeurs dans M se note $\pi_n(M)$.

On montre (cf. [17], etc...) que $\pi_n(M)$ est muni naturellement d'une structure de groupe et que ce groupe est abélien pour $n \geq 2$.

5.32 : On identifie $\mathbb{C}P^n$ à $G_1(\mathbb{C}^{n+1})$ c'est-à-dire à l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n+1 vérifiant les identités

$$p^2 = p \quad p^* = p \quad \mathrm{Tr}(p) = 1 \quad \text{(cf. III.4.15 et 4.23).}$$

1) Soit ω la forme différentielle de degré 2 sur $\mathbb{C}P^n$ définie par

$$\omega = \mathrm{Tr}(p.dp.dp)\ .$$

Montrer que ω est une forme différentielle invariante par l'action du groupe unitaire : si $g \in U(n+1)$ et si $\phi_g : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ est définie par $\phi_g(p) = g.p.g^{-1}$, on a ainsi

$$\phi_g^*(\omega) = \omega\ .$$

2) Pour $k \leq n$ en déduire (par des arguments cohomologiques par exemple) que

$$\omega^k = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k}$$

est une forme différentielle de degré 2k partout différente de 0.

3) Soit S^{2n+1} la sphère de $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ identifiée ici à l'ensemble des matrices colonnes complexes à n+1 lignes telles que $u^*.u = 1$. Soit

$$\theta : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

l'application associant à u le projecteur $u.u^*$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?

4) Pour n = 1 on obtient en particulier une application remarquable

$$\theta : S^3 \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2\ .$$

Expliciter les coordonnées de $\theta(x)$ dans S^2 en fonction de celles de x.

5) Montrer en général que $\theta^*(\omega) = d\alpha$ où α est la forme différentielle de degré 1 définie au point u de S^{2n+1} par

$$\alpha = -\operatorname{Tr}(u^*.du) .$$

6) Montrer que $\bar{\omega} = \theta^*(\omega^n)\wedge\alpha$ est une forme différentielle sur S^{2n+1} invariante par l'action du groupe unitaire $U(n+1)$ opérant par l'action usuelle $(g,u) \longmapsto g.u$ (produit d'une matrice carrée par une matrice colonne). En déduire que $\bar{\omega}$ est une forme volume sur S^{2n+1} (On pourra admettre que $\theta : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ est une fibration localement triviale).

7) Soit maintenant

$$f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

une application différentiable quelconque et soit β une forme différentielle telle que $f^*(\omega) = d\beta$. On pose

$$H(f) = \int_{S^{2n+1}} f^*(\omega^n) \wedge \beta.$$

Montrer que $H(f)$ ne dépend pas du choix de β et ne dépend que de la classe d'homotopie de f. En déduire que l'application explicitée à la 3e question n'est pas homotope à une application constante. En particulier $\pi_3(S^2)$ n'est pas réduit à 0.

5.33 : Soit $GL(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes inversibles d'ordre n muni de la structure de variété différentiable d'ouvert de $\mathbb{C}^{n^2}$. Soit ω_r la forme différentielle sur $GL(n,\mathbb{C})$ définie par la formule

$$\omega_r = \operatorname{Tr}(M^{-1}.dM.M^{-1}.dM\ldots M^{-1}.dM) \quad , \ M \in GL(n,\mathbb{C}) ,$$

où le produit entre parenthèses est effectué dans l'algèbre des matrices à coefficients des formes différentielles (r facteurs M^{-1} et r facteurs dM).

1) Montrer que ω_r est nulle pour r pair et est une forme fermée pour r impair (On remarquera pour cela que $d(M^{-1}) = -M^{-1}.dM.M^{-1}$ et que $\operatorname{Tr}(AB) = (-1)^{pq}\operatorname{Tr}(BA)$ si A et B sont des matrices de formes différentielles de degrés p et q respectivement). (Cf. introduction à 5.23).

2) Soit

$$\phi : S^3 \to GL(2,\mathbb{C})$$

l'application définie par

$$\phi(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x+iy & z+it \\ -z+it & x-iy \end{pmatrix} .$$

Montrer que la classe de cohomologie de $\phi^*(\omega_3)$ n'est pas nulle.

3) Soit V un espace vectoriel complexe de dimension m muni de $2r$ automorphismes $J_1, J_2, \ldots, J_{2r}$ satisfaisant aux identités

$$J_\alpha . J_\beta = -J_\beta . J_\alpha \quad \text{pour } \alpha \neq \beta$$

$$(J_\alpha)^2 = \mathrm{Id} \quad .$$

Soit $J = i^r J_1 . J_2 \ldots J_{2r}$ avec $i = \sqrt{-1}$ et soient $V_0 = \mathrm{Ker}(J-\mathrm{Id})$, $V_1 = \mathrm{Ker}(J+\mathrm{Id})$. Montrer que $J^2 = \mathrm{Id}$, que $V = V_0 \oplus V_1$, que chaque automorphisme J_α applique V_0 sur V_1 et V_1 sur V_0 (remarquer que $J_\alpha . J = -J . J_\alpha$). Quelles sont les dimensions de V_0 et V_1 ?

4) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ une suite d'indices telle que p soit pair $< 2r$ et $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq 2r$. Montrer que l'automorphisme $J' = J_{\alpha_1} . J_{\alpha_2} \ldots J_{\alpha_p}$ laisse stables V_0 et V_1 et que la trace de la restriction de J' à V_0 est nulle.

5) Soit

$$\phi : S^{2r-1} \to \mathrm{Aut}(V_0) \cong GL(n,\mathbb{C}) \quad , \text{ où } n = \dim (V_0),$$

l'application définie par

$$\phi(x_1, \ldots, x_{2r}) = J_1 . (x_1 J_1 + x_2 J_2 + \ldots + x_{2r} J_{2r})$$

restreinte à V_0. En remarquant que $(x_1 J_1 + \ldots + x_{2r} J_{2r})^2 = \mathrm{Id}$ et que $(J_\alpha . dx_\alpha)(J_\beta . dx_\beta) = (J_\beta . dx_\beta)(J_\alpha . dx_\alpha)$ montrer que $\phi^*(\omega_{2r-1})$ s'écrit

$$(2r-1)!\, n \sum_{j=1}^{2r} (-1)^j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_{2r} \quad .$$

En déduire que le groupe d'homotopie $\pi_{2r-1}(GL(n,\mathbb{C})) \neq 0$.

On va voir maintenant que la situation précédente se réalise pour $V = \Lambda\, \mathbb{C}^r$ (algèbre extérieure de $\mathbb{C}^r$). Pour tout vecteur v de $\mathbb{C}^r$ on note $d_v : V \to V$ l'application linéaire définie par $d_v(w) = v \wedge w$ et par ∂_v l'application adjointe pour la forme hermitienne associée à la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^r$.

6) Avec les notations précédentes montrer que $(d_v + \partial_v)^2 = Q(v)\mathrm{Id}$ où Q désigne la forme quadratique standard sur $\mathbb{C}^r \cong \mathbb{R}^{2r}$ (On pourra remarquer que tout élément de $\Lambda(\mathbb{C}^r)$ peut s'écrire $v \wedge w + w'$ où w et w' sont orthogonaux à v). En déduire que les automorphismes J_α définis par

$$J_{2s} = d_{e_s} + \partial_{e_s} \text{ et } J_{2s-1} = d_{ie_s} + \partial_{ie_s} = i(d_{e_s} - \partial_{e_s})$$

satisfont aux hypothèses énoncées en 3). En déduire que $\pi_{2r-1}(GL(n,\mathbb{C})) \neq 0$ avec $n = 2^{r-1}$.