Contrôle Continu groupe 13

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}y}{\ln y}.$$

1.1. Quel est le signe de f ?

1.2. Justifier que f est dérivable en tout point de $]0,1[$ et déterminer sa dérivée.

1.3. (a) Prouver que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \ln 2$.

(b) Montrer l'inégalité :

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad x^2 \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x \ln 2.$$

(c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 1, x<1} f(x)$.

(d) Montrer que f tend vers 0 en 0.

Exercice 2

On se donne 4 points dans l'espace muni de sa base canonique :

$$A(2,4,6),\ B(-2,5,-1),\ C(1,-1,1),\ D(1,1,3).$$

2.1. Déterminer un vecteur orthogonal au plan ABC.

2.2. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

2.3. Calculer l'aire du triangle ABC.

2.4. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Exercice 3

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par $x_1(t) = \dfrac{t^3}{(1+t)^2(1-t)}$ et $x_2(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

3.1. Établir le tableau de variations du paramétrage.

3.2. Existe-t-il des points singuliers ?

3.3. Prouver que la droite d'équation $2x_1 - x_2 + \dfrac{1}{4} = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

3.4. Tracer la courbe.

Exercice 4

Soit $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 x_2 < 1\}$.

4.1. Montrer que

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \quad \arctan\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right) = \arctan x_1 + \arctan x_2.$$

On pourra s'aider d'un dessin pour justifier.

4.2. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1 + k + k^2}\right)$$

converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, dès que $y \neq 0$, que l'on calculera.

5.2. Déterminer s'il existe des dérivées partielles en un point de la forme $(x, 0)$.

5.3. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. On définit la dérivée directionnelle selon u en $(0, 0)$ de f (quand elle existe) par

$$\partial_u f(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu) - f(0, 0)}{h}.$$

Montrer que pour tout vecteur u, f admet une dérivée directionnelle en 0 selon u.

5.4. Interpréter les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ comme dérivées directionnelles.

5.5. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.