Contrôle Continu groupe 13

Exercice 1

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+x_2}{x_1^2(x_2+1)^2+1} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2(x_2+1)^2+1} \end{pmatrix}.$$

On introduit les points $A(0,1)$ et $B(1/2,1)$.

1.1. *Soit Γ une courbe reliant A à B. Justifier que la circulation de $\mathbf{U}$ le long de Γ est indépendant de Γ. Déterminer sa valeur.*

Étant donné la question, commençons par calculer le rotationnel de $\mathbf{U}$:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{U} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\ &= \frac{x_1^2(x_2+1)^2+1 - x_1\big(2x_1(x_2+1)^2\big)}{[x_1^2(x_2+1)^2+1]^2} - \frac{x_1^2(x_2+1)^2+1-(1+x_2)\big(x_1^2\times 2(x_2+1)\big)}{[x_1^2(x_2+1)^2+1]^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{U}$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ qui est sans trou, d'après le théorème de Poincaré, $\mathbf{U}$ est un champ de gradient, et d'après le cours, il est donc à circulation conservative.

Choisissons maintenant un chemin de A à B en ligne droite : soit $M(t) = (0,1)+t(1/2,0) = (t/2,1)$ défini pour $t \in [0,1]$. On a alors que la circulation de $\mathbf{U}$ vaut

$$\int_0^1 \mathbf{U}\big(M(t)\big) \cdot \dot{M}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2/4(1+1)^2+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

1.2. *Que vaut la circulation de $\mathbf{U}$ le long d'une courbe fermée ?*

D'après le cours, cette circulation vaut 0. Mais on peut le redémontrer en deux lignes. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{U} = \nabla F$. Soit $t \mapsto M(t)$, $t \in [a,b]$ un paramétrage d'une courbe fermée, c'est-à-dire que $M(a) = M(b)$. On a alors

$$\int_a^b \mathbf{U}\big(M(t)\big) \cdot \dot{M}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \nabla F\big(M(t)\big) \cdot \dot{M}(t)\mathrm{d}t = F\big(M(b)\big) - F\big(M(a)\big) = 0.$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dessiner le domaine $\mathcal{D}$ et calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

2.1. $\mathcal{D} = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 < 1,\ x_2 > 0,\ x_2^2 < x_1\right\}$, $f(x_1,x_2) = x_2^2 x_1$.

Faite un dessin pour suivre le détail du calcul. À chaque fois on utilise le théorème de Fubini :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{x_2=0}^1 \int_{x_1=x_2^2}^1 x_2^2 x_1\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{x_2=0}^1 x_2^2\big((x_2^2)^2-1\big)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3}.$$

2.2. $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(2,2)$ et $(2,0)$, $f(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{x_1=0}^{2}\int_{x_2=0}^{x_1} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\int_{x_1=0}^{2} x_1\big(\ln(2x_1^2)-\ln(x_1^2)\big)\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\int_{x_1=0}^{2} x_1\ln(2)\,\mathrm{d}x_1 = \ln(2).$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{D} \subset [0,1]^2$ le domaine délimité par les courbes d'équations $x_2 = x_1^2$ et $x_1 = x_2^3$. On note alors $\mathscr{C}$ son bord orienté dans le sens direct.

3.1. *Déterminer les points d'intersection des courbes composant $\mathscr{C}$ puis faire un dessin.*

Les points d'intersection des deux courbes sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

3.2. *Calculer l'intégrale double*

$$\iint_{\mathcal{D}} x_1^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{x_1=0}^{1}\int_{x_2=x_1^2}^{x_1^{1/3}} x_1^2\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_{x_1=0}^{1}(x_1^{1/3}-x_1^2)x_1^2 = 3/10 - 1/5 = 1/10.$$

3.3. On note I la circulation le long de $\mathscr{C}$ du champ de vecteurs $(x_1,x_2) \mapsto (1, x_1^3)$.

(a) *Calculer I en utilisant des paramétrisations de $\mathscr{C}$.*

On paramètre dans le sens direct $\mathscr{C}$ comme suit :

$$M(t) = \begin{cases} (t,t^2) & \text{pour } \ t \in [0,1[, \\ (2-t,(2-t)^{1/3}) & \text{pour } \ t \in [1,2]. \end{cases}$$

Et on obtient pour la circulation (avec un changement de variable évident sur la seconde intégrale) :

$$\int_0^1 (1,t^3)\cdot(1,2t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (1,(2-t)^3)\cdot(-1,-(2-t)^{-2/3}/3)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+2t^4)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1+t^{7/3}/3)\,\mathrm{d}t = 1 + 2/5 - 1 - 1/10 = 3/10.$$

(b) *Déterminer I en appliquant la formule de Green-Riemann.*

On calcule que le rotationnel du champ de vecteur vaut $(x_1,x_2) \mapsto 3x_1^2$. Ainsi le calcule de la seconde question combiné à la formule de Green-Riemann donnent à nouveau que la circulation du champ de vecteur vaut $3/10$.