Contrôle Continu groupe 13

Exercice 1

Soit $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs

$$\mathbf{U}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+x_2}{x_1^2(x_2+1)^2+1} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2(x_2+1)^2+1} \end{pmatrix}.$$

On introduit les points $A(0,1)$ et $B(1/2,1)$.

1.1. Soit Γ une courbe reliant A à B. Justifier que la circulation de $\mathbf{U}$ le long de Γ est indépendant de Γ. Déterminer sa valeur.

1.2. Que vaut la circulation de $\mathbf{U}$ le long d'une courbe fermée ?

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dessiner le domaine $\mathcal{D}$ et calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

2.1. $\mathcal{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 < 1,\ x_2 > 0,\ x_2^2 < x_1\right\}$, $f(x_1, x_2) = x_2^2 x_1$.

2.2. $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(2,2)$ et $(2,0)$, $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{D} \subset [0,1]^2$ le domaine délimité par les courbes d'équations $x_2 = x_1^2$ et $x_1 = x_2^3$. On note alors $\mathscr{C}$ son bord orienté dans le sens direct.

3.1. Déterminer les points d'intersection des courbes composant $\mathscr{C}$ puis faire un dessin.

3.2. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathcal{D}} x_1^2\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

3.3. On note I la circulation le long de $\mathscr{C}$ du champ de vecteurs $(x_1, x_2) \mapsto (1, x_1^3)$.

(a) Calculer I en utilisant des paramétrisations de $\mathscr{C}$.

(b) Déterminer I en appliquant la formule de Green-Riemann.