2019-2020

Topologie et calcul différentielPartiel – 6 novembre 2019

Durée : 1h30.

Exercice 1.—Question de cours Démontrer le résultat suivant. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application continue et surjective. Si X est connexe par arcs, alors Y l'est aussi.*

Exercice 2.— Soient (X, d) un espace métrique, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On rappelle que f est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, $f(x) \leq M$. On dit que f est *localement majorée en un point x de X* si

$$\exists \delta > 0 \;\; \exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in B(x, \delta) \;\; f(y) \leq M$$

où $B(x, \delta)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon δ.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant : *toute fonction localement majorée en tout point d'un espace compact est majorée.*

1. *Montrer la caractérisation séquentielle suivante : f n'est pas majorée si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.*

S'il existe $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ alors pour tout $M > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(x_n) > M$. En particulier, f n'est pas majorée.

Réciproquement, si f n'est pas majorée et si $n \in \mathbb{N}$, en niant la définition pour $M = n$ on obtient qu'il existe $x_n \in X$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors que $f(x_n) \to +\infty$.

2. *Montrer la caractérisation séquentielle suivante : étant donné un point x de X, f n'est pas localement majorée en x si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x dans X, telle que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.*

Supposons f localement majorée en x et soit $\delta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ donnés par la définition. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, \delta)$ dès que $n \geqslant N$. En particulier, $f(x_n) \leqslant M$ pour $n \geqslant N$ et $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

Réciproquement, supposons que f n'est pas localement majoré en x. Pour $n > 0$, on nie la définition pour $\delta = 1/n$ et $M = n$ pour obtenir l'existence d'un point x_n tel que $x_n \in B(x, 1/n)$ et $f(x_n) > n$. En particulier, la suite obtenue $(x_n)_{n>0}$ tend vers x et $f(x_n) \to +\infty$.

3. *Démontrer le théorème à l'aide des deux critères séquentiels.*

On suppose donc X compact et f localement majoré. Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X telle que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ (question 1). Par compacité, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge. On note x sa limite. Alors la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\geq 0}$ tend encore vers $+\infty$ et d'après la question 2, f n'est pas localement majorée en x.

4. *Enoncer le théorème de Borel-Lebesgue sur les recouvrements.*
cours

5. *En déduire une autre démonstration du théorème sur les fonctions localement majorées.*

Par hypothèse, il existe pour tout $x \in X$ des réels $\delta_x > 0$ et $M_x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in B(x, \delta_x) \quad f(y) \leq M_x.$$

Les boules $\{B(x, \delta_x), x \in X\}$ forment un recouvrement de X par des ouverts. Par compacité, on peut en extraire un sous recouvrement fini. C'est-à-dire qu'il existe $x_1, \cdots, x_m$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_i)$$

où l'on a noté $\delta_i = \delta_{x_i}$. On note pareillement $M_i = M_{x_i}$. Montrons que f est majorée par $M = \max\{M_i, i \in [1, m]\}$. Soit $y \in X$, il existe i tel que $y \in B(x_i, \delta_i)$. Alors $f(y) \leqslant M_i \leqslant M$.

6. *La propriété suivante est-elle vraie ?*

Si (X, d) est un espace métrique compact, x_0 un point de X, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement majorée en tout point de $X \setminus \{x_0\}$, alors f est majorée.

Non. Considérer par exemple $X = [0, 1]$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est localement bornée en tout $x \neq 0$. Pourtant f n'est pas majorée.

Exercice 3.—

Soit X un espace métrique complet. Pour toute partie F de X, on note $\mathrm{diam}(F)$ le diamètre de F défini par la formule

$$\mathrm{diam}(F) = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in X \times X\}$$

qui est un nombre positif ou $+\infty$.

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties fermées de X. On suppose que :

(a) la suite est *décroissante* : $\forall n \geq 0$, $F_{n+1} \subset F_n$,

(b) le diamètre de F_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On considère, pour chaque entier $n \geq 0$, un point x_n appartenant à F_n.

1. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans X.*

On commence par remarquer (ou montrer par récurrence sur n à m fixé) que pour tout $m < n$, $F_n \subset F_m$. Il vient aussi de l'inclusion $F_{n+1} \subset F_n$ que $\mathrm{diam}(F_{n+1}) \leqslant \mathrm{diam}(F_n)$. Ainsi la suite $(\mathrm{diam}(F_n))_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et N tel que $\mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon$. Alors pour tout $m, n \geqslant N$ on a vu que $x_m \in F_m \subset F_N$ et $x_n \in F_n \subset F_N$. En particulier, par définition du diamètre, $d(x_m, x_n) \leqslant \mathrm{diam}(F_N) < \varepsilon$. On vient de montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme X est complet, la suite converge.

2. *Montrer que la limite appartient à*

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n.$$

Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_m)_{m\geq n}$ est une suite de F_n qui converge encore vers ℓ. Comme F_n est fermé, $\ell \in F_n$. C'est vrai pour tout entier n, donc $\ell \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$.

On a ainsi montré que tout espace métrique complet possède la propriété suivante, notée (*) : *toute famille décroissante de parties fermées non vides dont le diamètre tend vers* 0 *a une intersection non vide.*

3. Question plus difficile, montrer la réciproque : *si un espace métrique (X, d) possède la propriété (*), alors il est complet.*

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Posons $F_n = \overline{\{(x_m)_{m\geq n}\}}$ et $G_n = \{(x_m)_{m\geq n}\}$. L'ensemble F_n est par définition fermé.

Montrons que $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N > 0$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Il est alors clair que pour tout $x, y \in G_N$, $d(x, y) < \varepsilon$. En passant au sup, on obtient que $\operatorname{diam}(G_N) \leqslant \varepsilon$. Le même raisonnement montre que si $n \geqslant N$, alors $\operatorname{diam}(G_n) \leqslant \varepsilon$.

Soit maintenant $n \geqslant N$ et $y, y' \in F_n$. Il existe alors deux suites de G_n, $(y_m)_{m\geqslant 0}$ et $(y'_m)_{m\geqslant 0}$ qui convergent respectivement vers y et y'. En passant à la limite dans les inégalités $d(y_m, y'_m) \leqslant \varepsilon$ on trouve que $d(y, y') \leqslant \varepsilon$. On a donc montré que $\operatorname{diam}(F_n) \leqslant \varepsilon$.

Il vient que la suite $(\operatorname{diam}(F_n))_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Ainsi,

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \varnothing.$$

Mais si $\ell \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$, on trouve que pour tous $n \geqslant 0$, $d(x_n, \ell) \leqslant \operatorname{diam}(F_n)$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.