CONTRÔLE CONTINU N° 1

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Rappeler la définition de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\|f\|$.

2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_1(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ et $N_2(A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Dire (et le montrer) si N_1 et N_2 sont des normes.

L'application N_1 n'est pas une norme, elle ne vérifie essentiellement aucun des axiomes. Par exemple pour A la matrice identité, on a $N_1(A) = n$ alors que $N_1(2A) = 4n \neq 2n$ et ce pour tout entier n, ainsi, N_1 n'est pas positivement homogène.
N_2 en revanche est une norme, montrons le :
positivité : claire
positive homogénéité : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$N_2(\lambda A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = |\lambda| N_2(A).$$

caractère défini : si $N_2(A) = 0$ alors $\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = 0$. Comme c'est un maximum de réels positif qui est nul, cela implique que tous les réels $|a_{i,j}|$ doivent être nuls, donc que $A = 0$.
inégalité triangulaire : si A et B sont deux matrices alors

$$N_2(A+B) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| + \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}| = N_2(A) + N_2(B).$$

3. On note $E = C^1([-1,1];\mathbb{R})$, et on définit $\|f\| = \max_{t\in[-1,1]} |f'(t)|$ pour tout $f \in E$.

(a) L'application $\|\cdot\|$ est-elle une norme ?

La réponse est non. L'application $\|\cdot\|$ n'est pas définie. Par exemple la fonction $\mathbb{1}$ constante égale à 1 est bien dans E. Comme sa dérivée est identiquement nulle, $\|\mathbb{1}\| = 0$. Pourtant ce n'est pas la fonction nulle.

(b) On note F le sous-ensemble de E des fonctions f telles que $f(1) = f(-1) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur F. Le fait que F est un sous–espace vectoriel de

E est évident. La fonction nulle est dans F. Si $f(1) = f(-1) = 0$ et $g(1) = g(-1) = 0$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(f+\lambda g)(1) = (f+\lambda g)(-1) = 0$ et donc $f + \lambda g \in F$.
Pour la norme :
positivité : claire.
positive homogénéité : $\|\lambda f\| = \max_{t\in[-1,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \max_{t\in[-1,1]} |f'(t)| = |\lambda|\|f\|$.
ingalité triangulaire :

$$\|f+g\| = \max_{t\in[-1,1]} |(f+g)'(t)| \leqslant \max_{t\in[-1,1]} |f'(t)| + |g'(t)| \leqslant \max_{t\in[-1,1]} |f'(t)| + \max_{t\in[-1,1]} |g'(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

caractère défini : si $\|f\| = 0$ cela implique que f' est identiquement nulle et donc que f est constante. Comme $f(-1) = 0$, f est bien la fonction nulle.

(c) Si $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, on définit $\Lambda_g : F \to \mathbb{R}$ par

$$\Lambda_g(f) = -\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in F.$$

Montrer que Λ_g est linéaire continue si

i. g est bornée.

La linéarité est claire vient de la linéarité de l'intégrale. Si g est bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall t \in [-1,1], \quad |g(t)| \leqslant M.$$

Mais alors

$$\left|\Lambda_g(f)\right| = \left|\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f'(t)g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} M\|f\|\mathrm{d}t = 2M\|f\| \ , \quad \forall f \in F.$$

Ainsi Λ_g est continue d'après le cours.

ii. Même question si g est continue.

Si g est continue sur $[-1,1]$ elle est bornée et on peut appliquer le résultat de la question précédente.

(d) Si g est C^1, montrer que

$$\Lambda_g(f) = \int_{-1}^{1} f(t)g'(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in F.$$

On fait une IPP :

$$\Lambda_g(f) = -\int_{-1}^{1} f'(t)g(t) = -[fg]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f(t)g'(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in F$$

et on conclut du fait que f s'annule en 1 et -1.

(e) Si g est la fonction qui vaut 1 sur $[-1,0]$ et 0 sur $]0,1]$, donner une expression simple, sans intégrale de $\Lambda_g(f)$.

$$\Lambda_g(f) = \int_{-1}^{1} f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g'(t)\mathrm{d}t = g(0) - g(-1) = g(0), \quad \forall f \in F.$$

C'est le dirac en 0.