CONTRÔLE CONTINU N° 1

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Rappeler la définition de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\|f\|$.

2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_1(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ et $N_2(A) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$. Dire (et le montrer) si N_1 et N_2 sont des normes.

3. On note $E = C^1([-1,1];\mathbb{R})$, et on définit $\|f\| = \max\limits_{t \in [-1,1]} |f'(t)|$ pour tout $f \in E$.

(a) L'application $\|\cdot\|$ est-elle une norme ?

(b) On note F le sous-ensemble de E des fonctions f telles que $f(1) = f(-1) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur F.

(c) Si $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, on définit $\Lambda_g : F \to \mathbb{R}$ par

$$\Lambda_g(f) = -\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in F.$$

Montrer que Λ_g est linéaire continue si

i. g est bornée.

ii. Même question si g est continue.

(d) Si g est C^1, montrer que

$$\Lambda_g(f) = \int_{-1}^{1} f(t)g'(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in F.$$

(e) Si g est la fonction qui vaut 1 sur $[-1,0]$ et 0 sur $]0,1]$, donner une expression simple, sans intégrale de $\Lambda_g(f)$.