CONTRÔLE CONTINU N° 2, CORRIGÉ

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être justifiés soigneusement.

1. *Soit E un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

(a) *Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

(b) *Que veut dire : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E ? Comment s'écrit un élément $x \in E$ dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

2. *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.*

(a) *Montrer que l'application définie par*

$$(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} P(X)Q(X)\,dX, \quad \forall P,\, Q \in E$$

est un produit scalaire (on rappellera brièvement pourquoi les intégrales ont bien un sens).

Si P et Q sont de degrés inférieurs à 2 alors PQ est un polynôme de degré inférieur à 4. Comme $e^{-X^2} = o(X^{-6})$, que ce soit en $+$ ou $-$ l'infini, l'intégrale qui définit le produit scalaire converge bien (d'après le critère de Riemann).

Pour montrer qu'on a bien un produit scalaire :

linéaire à gauche : soient P, QR trois polynômes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}(P+\lambda Q, R) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\big(P(X)+\lambda Q(X)\big)R(X)\,dX \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}P(X)R(X)\,dX + \lambda\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}Q(X)R(X)\,dX = (P,R)+\lambda(Q,R),\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.

symétrie : c'est évident :

$$(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}P(X)Q(X)\,dX = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}Q(X)P(X)\,dX = (Q,P), \quad \forall P,\, Q \in E.$$

positivité : c'est évident aussi :

$$(P,P) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}P^2(X)\,dX \geqslant 0, \quad \forall P \in E,$$

par positivité de l'intégrale.

caractère défini : c'est un peu moins évident mais pas tant que ça : si

$$(P,P) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}P^2(X)\,dX = 0$$

comme l'intégrande est **continue** et positive, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x^2}P^2(x) = 0.$$

On conclut que $P(x)$ est identiquement nulle (car l'exponentielle est toujours non nulle).

(b) *A partir de la base $(1, X, X^2)$, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (Q_1, Q_2, Q_3) de E.*

On peut appliquer directement les formules du cours (la norme est celle induite par le produit scalaire) :

$$Q_1 = \frac{1}{\|Q_1\|} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\, dX}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \pi^{-1/4}.$$

Ensuite $Q_2 = \frac{1}{\|--\|}\big(X - (X, Q_1)Q_1\big)$. On calcule

$$(X, Q_1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X \pi^{-1/4}\, dX = \Big[-\frac{1}{2}\pi^{-1/4} e^{-X^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Ainsi $Q_2 = \frac{1}{\|X\|}X$. Pour calculer cette intégrale, on fait une intégration par partie :

$$\|X\|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2\, dX =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \big(-2Xe^{-X^2}\big)\frac{-X}{2}\, dX = \Big[-e^{-X^2}\frac{X}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} \times \frac{-1}{2}\, dX$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\, dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement on conclut que $Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}X$.

On procède pareillement pour Q_3 :

$$Q_3 = \frac{1}{\| - - \|}\big(X^2 - (X^2, Q_1)Q_1 - (X^2, Q_2)Q_2\big).$$

Or $(X^2, Q_1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2 \pi^{-1/4}\, dX = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2}$, d'après le calcul précédent.

$$\begin{aligned}(X^2, Q_2) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} X\, dX \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\int_{\mathbb{R}} \big(-2Xe^{-X^2}\big)\frac{-X^2}{2}\, dX \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\Big\{ \Big[e^{-X^2}\frac{-X^2}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}(-X)\, dX\Big\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \times \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -2Xe^{-X^2}\, dX = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \times \frac{1}{2}\Big[e^{-X^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu voir que la fonction $X^3 e^{-X^2}$ étant impaire, son intégrale est forcément nulle sur $\mathbb{R}$.

Enfin, $Q_3 = \frac{1}{\|--\|}\big(X^2 - \frac{1}{2}\big)$.

$$\begin{aligned}\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\big(X^2 - \frac{1}{2}\big)^2\, dX \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^4\, dX - \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2\, dX + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\, dX.\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on connaît déjà que les valeurs des deux dernières intégrales. Il nous reste à évaluer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^4 \, dX &= \int_{\mathbb{R}} \big(- 2Xe^{-X^2}\big)\big(\frac{-X^3}{2}\big) \, dX \\ &= \Big[e^{-X^2}\big(\frac{-X^3}{2}\big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\big(\frac{-3X^2}{2}\big) \, dX \\ &= \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2 \, dX = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

Bilan

$$\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Enfin,

$$Q_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\big(X^2 - \frac{1}{2}\big).$$

On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la même application

$$(P, Q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} P(X)Q(X) \, dX.$$

Cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On définit $F =$ vect(Q_1, Q_2) et p_F la projection orthogonale sur F.

(c) *Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner la décomposition de $p_F(P)$ dans la base $\{Q_1, Q_2\}$.*
La formule du cours donne que dans cette base, la décomposition est $\big((P, Q_1)\,, \,(P, Q_2)\big)$.

(d) *Calculer $p_F(1)$ et $p_F(1 + X^2)$.*
Comme $1 \in F$, il est égal à sa propre projection et donc $p_F(1) = 1$.
Pour $1 + X^2$, on applique la formule précédente, ses coordonnées dans la base $\{Q_1, Q_2\}$ sont $\big((1 + X^2, Q_1)\,, \,(1 + X^2, Q_2)\big)$. Or

$$(1 + X^2, Q_1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}\pi^{-1/4} \, dX + \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2} X^2\pi^{-1/4} \, dX = \pi^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{3\pi^{\frac{1}{4}}}{2}.$$

De même

$$(1 + X^2, Q_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{-X^2}(1 + X^2) \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} X \, dX = 0,$$

car l'intégrande est impaire. Finalement, $p_F(1 + X^2) = \dfrac{3\pi^{\frac{1}{4}}}{2} Q_1 = \dfrac{3}{2}$.

(e) *Quelles conditions doit satisfaire un polynôme P pour être dans $F^{\perp}$?*
C'est encore du cours il doit vérifier $(P, Q_1) = 0$ et $(P, Q_2) = 0$ ce qui est équivalent à

$$\forall Q \in F, \quad (P, Q) = 0.$$

(f) *Calculer* $(e^{-X^2})'$ *et* $(e^{-X^2})''$*. Commenter brièvement ce résultat et « deviner » un polynôme de degré 3 orthogonal à* E*.*

On vérifie immédiatement que $(e^{-X^2})' = -2Xe^{-X^2}$ et $(e^{-X^2})'' = (-2Xe^{-X^2})' = (4X^2-2)e^{-X^2}$. Ainsi, si l'on écrit $e^{-X^2} = R_1 e^{-X^2}$, $(e^{-X^2})' = R_2 e^{-X^2}$ et $(e^{-X^2})'' = R_3 e^{-X^2}$, où R_1, R_2 et R_3 sont des polynômes, on voit que R_1 est proportionnel à Q_1, R_2 à Q_2 et R_3 à Q_3. On peut donc s'attendre à ce qu'un polynôme orthogonal à $\mathrm{vect}(Q_1, Q_2, Q_3) = E$ sera donné par R_4, où $(e^{-X^2})^{(3)} = R_4 e^{-X^2}$. On fait donc le calcule,

$$(e^{-X^2})^{(3)} = \left((4X^2-2)e^{-X^2}\right)' = (-8X^3+12X)e^{-X^2}.$$

Les polynômes ainsi obtenus quand on continue ce processus de dérivation sont appelés polynômes de Hermite. Ils forment une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.